Fourierovi redovi i primjene

Kolekcija zadataka za vježbu za 1. kolokvij

Vjekoslav Kovač

Zadaci

1. Ispitajte konvergira li niz funkcija $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zadan sa

$$f_n\colon [0,1]\to\mathbb{R}, \qquad f_n(x) = nx^n$$

(a) g.s. na $[0,1]$, (b) uniformno na $[0,1\rangle$, (c) u $\mathrm{L}^1([0,1])$.

2. Za parametar $\alpha\in\mathbb{R}$ zadan je niz funkcija $(f_n)_{n=1}^{\infty}$,

$$f_n\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}, \qquad f_n(x) = n^\alpha \chi_{[0,\frac{1}{n}]}(x) = \begin{cases} n^\alpha & \text{za } x\in[0,\frac{1}{n}], \\ 0 & \text{inače.} \end{cases}$$

(a) Odredite sve vrijednosti od α za koje niz $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ konvergira g.s. na $\mathbb{R}$.
(b) Odredite sve vrijednosti od α za koje niz $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ konvergira uniformno na $\mathbb{R}$.
(c) Odredite sve vrijednosti od α za koje niz $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ konvergira u $\mathrm{L}^1(\mathbb{R})$.
(d) Odredite sve vrijednosti od α za koje niz $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ konvergira u $\mathrm{L}^2(\mathbb{R})$.

3. Za koje sve vrijednosti parametra $\alpha\in\mathbb{R}$ red funkcija $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n^\alpha e^{2\pi i n x}$ konvergira

(a) λ-g.s. na $[0,1]$, (b) uniformno na $[0,1]$, (c) u prostoru $\mathrm{L}^2([0,1])$?

4. Koji od sljedećih skupova funkcija su gusti u $\mathrm{L}^2([a,b])$? Ukratko obrazložite svaki odgovor.

(a) $\big\{f\in C([a,b]) : \int_a^b f(t)dt = 0\big\}$
(b) $\big\{f\in C([a,b]) : \int_a^b f(t)dt \neq 0\big\}$
(c) $\big\{f\in C([a,b]) : f(a)=f(b)=0\big\}$
(d) $\big\{f\in C([a,b]) : f \text{ je rastuća}\big\}$

5. Ako je $f\in\mathrm{L}^1([-\pi,\pi])$ takva da su njeni Fourierovi koeficijenti uz sinuse jednaki 0, dokažite da funkcija f mora biti parna.

6. (a) Razvijte funkciju $f(x)=\operatorname{ch} x$ u trigonometrijski Fourierov red na intervalu $[-\pi,\pi]$.
(b) Izračunajte: $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(k^2+1)^2}$.

7. Razvijte sljedeće funkcije u eksponencijalni Fourierov red na intervalu $[0,1]$.

(a) $f(x)=\sin(2\pi x)$, (b) $f(x)=x$.

8. (a) Postoji li funkcija $f\in\mathrm{L}^1([0,1])$ takva da je $\hat{f}(n)=(-1)^n$ za svaki $n\in\mathbb{N}$? Obrazložite.
(b) Postoji li funkcija $f\in\mathrm{L}^1([0,1])$ takva da je $\hat{f}(n)=\frac{1}{n^2}$ za svaki $n\in\mathbb{N}$? Obrazložite.

9. Izračunajte sume sljedećih redova:

(a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2(k+1)^2}$, (b) $\displaystyle\sum_{k\in\mathbb{N},\ k \text{ nije djeljiv s } 3} \frac{1}{k^2}$.

10. Neka su f i g funkcije na $\mathbb{T}$ zadane formulama

$$f(x) := \cos(2\pi x) + \sin(4\pi x), \quad g(x) := \cos(4\pi x).$$

(a) Postoji li funkcija $h \in \mathrm{L}^1(\mathbb{T})$ takva da je $f*h = g$? Ukoliko postoji, nađite jednu takvu funkciju. Ukoliko ne postoji, obrazložite svoj odgovor.

(b) Postoji li funkcija $h \in \mathrm{L}^1(\mathbb{T})$ takva da je $g*h = f$? Ukoliko postoji, nađite jednu takvu funkciju. Ukoliko ne postoji, obrazložite svoj odgovor.

Izrazite rezultate bilo u terminima trigonometrijskih, bilo u terminima eksponencijalnih funkcija.

11. (a) Postoji li realna parna funkcija $f \in \mathrm{L}^1(\mathbb{T})$ koja nije g.s. jednaka 0 takva da vrijedi $f * f = -f$?

(b) Postoji li realna parna funkcija $f \in \mathrm{L}^1(\mathbb{T})$ koja nije g.s. jednaka 0 takva da vrijedi $f*f*f = -f$?

Obrazložite svoje odgovore.

12. Izračunajte $f * g$ ako su $f, g \in \mathrm{L}^1(\mathbb{T})$ zadane sa:

(a) $f(x) = g(x) = \sin(2\pi x)$,

(b) $f(x) = g(x) = D_N(x) = \dfrac{\sin((2N+1)\pi x)}{\sin(\pi x)}$, za prirodan broj N,

(c) $f(x) = \dfrac{3}{5 - 4\cos(4\pi x)}$, $g(x) = \dfrac{2\cos(2\pi x)}{5 - 4\cos(4\pi x)}$.

13. Dokažite da je za 1-periodični (kompleksni eksponencijalni) trigonometrijski polinom $f \colon \mathbb{T} \to \mathbb{C}$ ekvivalentno:

(1) Postoji trigonometrijski polinom $g \colon \mathbb{T} \to \mathbb{C}$ takav da je $g^\star * g = f$, pri čemu je funkcija $g^\star$ definirana sa $g^\star(x) := \overline{g(-x)}$.

(2) Vrijedi $\hat{f}(n) \geq 0$ za svaki $n \in \mathbb{Z}$.

14. Neka je $f \colon \mathbb{T} \to \mathbb{C}$ 1-periodični trigonometrijski polinom čiji Fourierovi koeficijenti su nenegativni, tj. $\hat{f}(n) \geq 0$ za svaki $n \in \mathbb{Z}$. Pokažite da za svaku $g \in \mathrm{L}^1(\mathbb{T})$ vrijedi

$$\int_{\mathbb{T}} f(x)\,(g^\star * g)(x)\,dx \;\geq\; 0,$$

pri čemu je $g^\star \in \mathrm{L}^1(\mathbb{T})$ funkcija definirana sa $g^\star(x) := \overline{g(-x)}$.

15. (a) Ako je $a = (a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ “obostrano beskonačni niz” kompleksnih brojeva, dokažite da za $1 \leq q < r < \infty$ vrijedi $\|a\|_{\ell^q} \geq \|a\|_{\ell^r}$, tj.

$$\Big(\sum_{n\in\mathbb{Z}} |a_n|^q\Big)^{1/q} \geq \Big(\sum_{n\in\mathbb{Z}} |a_n|^r\Big)^{1/r}.$$

(b) Pretpostavimo da za neki $q \in [1, +\infty]$ postoji konstanta $C_q \in \langle 0, +\infty\rangle$ takva da vrijedi

$$\Big(\sum_{n\in\mathbb{Z}} |\hat{f}(n)|^q\Big)^{1/q} \leq C_q\, \|f\|_{2,[0,1]}$$

za svaku funkciju $f \in \mathrm{L}^2([0,1])$. Dokažite da mora biti $q \geq 2$.

(c) Dokažite da gornja nejednakost doista vrijedi za $q \geq 2$.

16. Pokažite da su sljedeće tvrdnje ekvivalentne za $f \in \mathrm{L}^1(\mathrm{S}^1)$, $\mathrm{S}^1 := \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\} \equiv \mathbb{T}$.

    (1) Funkcija f se može proširiti (do na jednakost g.s. na $\mathrm{S}^1 \equiv \mathbb{T}$) do holomorfne (tj. kompleksno-analitičke) funkcije na kružnom vijencu

    $$\big\{z \in \mathbb{C} \ : \ 1 - \varepsilon < |z| < 1 + \varepsilon\big\}$$

    za neki $0 < \varepsilon < 1$.

    (2) Fourierovi koeficijenti od f opadaju eksponencijalno, tj.

    $$\big|\hat{f}(n)\big| \leq C\rho^{|n|}; \quad n \in \mathbb{Z}$$

    za neke $C > 0,\ 0 < \rho < 1$.

Upute, odgovori, rezultati

1. (a) *Odgovor*: Da i to prema $f \equiv 0$, čak u svakoj točki od $[0, 1\rangle$.

   (b) *Odgovor*: Ne, jer je $\sup_{x \in [0,1\rangle} |f_n(x) - f(x)| \geq n$.

   (c) *Odgovor*: Ne, jer je $\|f_n - f\|_{1,[0,1]} = \frac{n}{n+1}$.

2. *Odgovori*: (a) $\alpha \in \mathbb{R}$, (b) $\alpha \in \langle -\infty, 0\rangle$, (c) $\alpha \in \langle -\infty, 1\rangle$, (d) $\alpha \in \langle -\infty, \frac{1}{2}\rangle$.
   Napomena: Već u (a) dijelu zadatka vidimo da je jedini kandidat za limes konstanta $f \equiv 0$. Ta se činjenica koristi kod računa u (b),(c),(d).

3. *Odgovori*: (a) $\alpha \in \langle -\infty, 0\rangle$, (b) $\alpha \in \langle -\infty, -1\rangle$, (c) $\alpha \in \langle -\infty, -\frac{1}{2}\rangle$.
   Napomena: U (a) dijelu je za dokaz konvergencije reda koristan trik tzv. parcijalne sumacije: $\sum_{n=1}^{N} a_n(b_{n+1} - b_n) = a_{N+1}b_{N+1} - a_1 b_1 - \sum_{n=1}^{N} b_{n+1}(a_{n+1} - a_n)$.

4. *Odgovori*: (a) ne, (b) da, (c) da, (d) ne.

5. *Uputa*: Zapišite funkciju kao zbroj parne i neparne L^1 funkcije, $f = f_{\text{parna}} + f_{\text{neparna}}$. Potom zaključite da f_{neparna} ima sve Fourierove koeficijente jednake 0.
   Napomena: Ne smijemo koristiti razvoj od f u Fourierov red, jer ne znamo konvergira li on prema polaznoj funkciji.

6. (a) *Rezultat*: $\frac{\mathrm{sh}\pi}{\pi} + \frac{2\mathrm{sh}\pi}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2+1} \cos kx$.

   (b) *Uputa*: Iskoristite Plancherelov indentitet.
   Rezultat: $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k^2+1)^2} = \frac{\pi}{4\mathrm{sh}^2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{ch}^2 x \, dx - \frac{1}{2} = \frac{\pi(\pi + \mathrm{sh}\pi\mathrm{ch}\pi)}{4\mathrm{sh}^2\pi} - \frac{1}{2}$.

7. (a) *Rezultat*: $\frac{i}{2}e^{-2\pi i x} - \frac{i}{2}e^{2\pi i x}$. Naprosto se kompleksna funkcija sinus raspiše pomoću eskponencijalne.

   (b) *Rezultat*: $\frac{1}{2} + \frac{i}{2\pi} \sum_{n \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}} \frac{1}{n} e^{2\pi i n x}$.

8. *Odgovori*: (a) ne, (b) da.

9. *Rezultati*: (a) $\frac{1}{3}\pi^2 - 3$, (b) $\frac{4\pi^2}{27}$.
   Upute: (a) Rastavite na parcijalne razlomke: $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2(k+1)^2} = -\frac{2}{k} + \frac{1}{k^2} + \frac{2}{k+1} + \frac{1}{(k+1)^2}$.
   (b) Zapišite sumu kao $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(3k)^2}$.

10. (a) *Odgovor*: Postoji, npr. $h(x) = -2\sin(4\pi x)$.

    (b) *Odgovor*: Ne postoji.

    Uputa: Koristite formulu $(f * g)\widehat{\ }(n) = \hat{f}(n)\hat{g}(n)$.

11. *Odgovori*: (a) da, (b) ne.

12. (a) *Rezultat*: $(f * g)(x) = -\frac{1}{2}\cos(2\pi x)$.

    (b) *Rezultat*: $(f * g)(x) = D_N(x)$.

    (c) *Rezultat*: $(f * g)(x) = 0$.

    Uputa: Nekad je $f * g$ lakše izračunati pomoću Fourierovih koeficijenata i formule $(f * g)\hat{}(n) = \hat{f}(n)\hat{g}(n)$.

13. *Uputa*: Za dokaz od (1)$\Longrightarrow$(2) naprosto raspišite po definiciji Fourierov koeficijent navedene konvolucije. Za dokaz od (2)$\Longrightarrow$(1) definirajte funkciju g takvu da je $\hat{g}(n) = \sqrt{\hat{f}(n)}$ za svaki $n \in \mathbb{Z}$.

14. *Uputa*: Raspisivanjem konvolucije $g^\star * g$ po definiciji dobije se da je integral na lijevoj strani $\int_{\mathbb{T}}\int_{\mathbb{T}} f(y-z)g(y)\overline{g(z)}dydz$. Sada raspišite f po koeficijentima i prikladno grupirajte članove.

15. *Rješenje.*

    (a) U sljedećem računu koristimo jedino činjenicu da za $b \in [0,1]$ i $0 < q < r$ vrijedi $b^q \geq b^r$.

$$\frac{\|a\|_{\ell^q}}{\|a\|_{\ell^r}} = \Big(\sum_{n\in\mathbb{Z}}\Big(\frac{|a_n|}{\|a\|_{\ell^r}}\Big)^q\Big)^{1/q} \geq \Big(\sum_{n\in\mathbb{Z}}\Big(\frac{|a_n|}{\|a\|_{\ell^r}}\Big)^r\Big)^{1/q} = \Big(\frac{1}{\|a\|_{\ell^r}^r}\sum_{n\in\mathbb{Z}}|a_n|^r\Big)^{1/q} = 1^{1/q} = 1$$

Konkretno smo primijenili spomenutu tvrdnju na izraze $b = \frac{|a_n|}{\|a\|_{\ell^r}}$.

(b) Pretpostavimo $q < 2$. Za bilo koji $N \in \mathbb{N}$ definirajmo

$$f_N(x) := \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^{1/q}} e^{2\pi i n x}.$$

Očigledno je $\hat{f}(n) = \frac{1}{n^{1/q}}$ za $n = 1, 2, \ldots, N$ te $\hat{f}(n) = 0$ inače. Po Plancherelovoj formuli imamo

$$\|f\|_{\mathrm{L}^2} = \Big(\sum_{n\in\mathbb{Z}}|\hat{f}(n)|^2\Big)^{1/2} = \Big(\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n^{2/q}}\Big)^{1/2} \leq \Big(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{2/q}}\Big)^{1/2} < +\infty$$

jer je $2/q > 1$. S druge strane je

$$\Big(\sum_{n\in\mathbb{Z}}|\hat{f}(n)|^q\Big)^{1/q} = \Big(\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n}\Big)^{1/q} \to +\infty \quad \text{kada } N \to \infty.$$

Zato nejednakost iz zadatka ne može vrijediti ni za koju konstantu $C_q < +\infty$.

(c) Po (a) dijelu zadatka i Plancherelovoj formuli je

$$\Big(\sum_{n\in\mathbb{Z}}|\hat{f}(n)|^q\Big)^{1/q} \leq \Big(\sum_{n\in\mathbb{Z}}|\hat{f}(n)|^2\Big)^{1/2} = \|f\|_{2,[0,1]}.$$

16. *Rješenje.*

    (1) $\Longrightarrow$ (2) Neka je F holomorfno proširenje od f na spomenuti kružni vijenac. Možemo ga razviti u Laurentov red

$$F(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n \quad \text{za } 1-\varepsilon < |z| < 1+\varepsilon$$

uz unifomnu konvergenciju na kompaktima sadržanima u tom vijencu. Uvrštavanjem $z = e^{2\pi i x}$ za $x \in \mathbb{R}$ dobivamo

$$f(x) = F(e^{2\pi i x}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{2\pi i n x}$$

uz uniformnu konvergenciju pa množenjem s $e^{-2\pi imx}$ i integriranjem slijedi $\hat{f}(m) = a_m$ za svaki $m \in \mathbb{Z}$.

Sada za bilo koji r takav da je $1-\varepsilon < r < 1+\varepsilon$ promotrimo funkciju $f_r\colon \mathbb{T} \to \mathbb{C}$, $f_r(x) := F(re^{2\pi ix})$. I za nju vrijedi uniformno konvergentni razvoj (dobiven uvrštavanjem $z = re^{2\pi ix}$):

$$f_r(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n r^n e^{2\pi inx}$$

pa analogno dobivamo i njezine Fourierove koeficijente: $\widehat{f_r}(m) = a_m r^m$ za svaki $m \in \mathbb{Z}$. Dakle, $\widehat{f_r}(n) = \hat{f}(n) r^n$ za svaki $n \in \mathbb{Z}$.

Odaberimo ρ takav da je $1 - \varepsilon < \rho < 1 < 1/\rho < 1 + \varepsilon$. Uzmemo li $r = 1/\rho$ za $n \geq 0$ ćemo dobiti

$$|\hat{f}(n)| = |\widehat{f_{1/\rho}}(n)| \rho^n \leq \|f_{1/\rho}\|_1 \, \rho^{|n|}.$$

Ako pak uzmemo $r = \rho$, za $n \leq 0$ možemo pisati

$$|\hat{f}(n)| = |\widehat{f_\rho}(n)| \rho^{-n} = |\widehat{f_\rho}(n)| \rho^{|n|} \leq \|f_\rho\|_1 \, \rho^{|n|}.$$

(2) $\Longrightarrow$ (1) Promotrite vijenac konvergencije Laurentovog reda $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \hat{f}(n) z^n$. Njegov vanjski radijus je dan formulom

$$R_{\text{vanjski}} = \frac{1}{\limsup\limits_{n\to\infty} |\hat{f}(n)|^{1/n}} \geq \frac{1}{\limsup\limits_{n\to\infty} C^{1/n}\rho} = \frac{1}{\rho},$$

dok mu je unutarnji radijus dan formulom

$$R_{\text{unutarnji}} = \limsup_{n\to\infty} |\hat{f}(-n)|^{1/n} \leq \limsup_{n\to\infty} C^{1/n}\rho = \rho.$$

Zato taj Laurentov red konvergira na kružnom vijencu $\{z \in \mathbb{C} : \rho < |z| < 1/\rho\}$ prema nekoj holomorfnoj funkciji F.

Iz dokaza prethodnog smjera znamo da su $\hat{f}(n)$ Fourierovi koeficijenti funkcije $x \mapsto F(e^{2\pi ix})$. Po teoremu jedinstvenosti ona mora biti g.s. jednaka funkciji f, tj. F doista proširuje f.