Fourierovi redovi i primjene

Kolekcija zadataka za vježbu za 2. kolokvij

Vjekoslav Kovač

Zadaci

1. (a) Razvijte funkciju $f(x) = e^x$ u trigonometrijski Fourierov red na intervalu $[-\pi, \pi]$.

   (b) Dokažite jednakost: $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k^2+1} = \frac{\mathrm{sh}\pi - \pi}{2\mathrm{sh}\pi}$.

   (c) Dokažite jednakost: $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2+1} = \frac{\pi\mathrm{cth}\pi - 1}{2}$.

2. (a) Za dani $\alpha \in \langle 0, 1\rangle$ razvijte funkciju $f_\alpha(x) = \cos \alpha x$ u trigonometrijski Fourierov red na intervalu $[-\pi, \pi]$.

   (b) Dokažite jednakost: $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k^2-\alpha^2} = \frac{\alpha\pi - \sin\alpha\pi}{2\alpha^2 \sin\alpha\pi}$.

   (c) Dokažite jednakost: $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2-\alpha^2} = \frac{1 - \alpha\pi \operatorname{ctg}\alpha\pi}{2\alpha^2}$.

   (d) Izračunajte: $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(3k-1)(3k+1)}$.

3. (a) Razvijte funkciju $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{za } x \in [-\pi, 0\rangle \\ \sin x & \text{za } x \in [0, \pi] \end{cases}$ u trigonometrijski Fourierov red na intervalu $[-\pi, \pi]$.

   (b) Izračunajte $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{4k^2-1}$ i $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{4k^2-1}$.

4. Pretpostavimo da za 2π-periodičnu funkciju $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ postoji subdivizija $-\pi = x_0 < x_1 < \ldots < x_{m-1} < x_m = \pi$ segmenta $[-\pi, \pi]$ takva da vrijedi:
   - f je dvaput derivabilna na intervalima $\langle x_{j-1}, x_j\rangle$, $j = 1, \ldots, m$,
   - $f''(x) \neq 0$ kad god je $x \in [-\pi, \pi] \setminus \{x_0, x_1, \ldots, x_m\}$,
   - f i f' su ograničene na intervalima $\langle x_{j-1}, x_j\rangle$, $j = 1, \ldots, m$.

   Pokažite da f zadovoljava pretpostavke Dirichletovog teorema o točkovnoj konvergenciji Fourierovog reda.

5. Obrazložite koje od sljedećih 2π-periodičnih funkcija $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zadovoljavaju Dirichletove uvjete:

   (a) $f(x) = \frac{x}{2\pi} - \lfloor \frac{x}{2\pi} \rfloor$,

   (b) $g(x) = |\cos x|$,

   (c) $h(x) = \begin{cases} 1 & \text{ako je } \frac{x}{\pi} \in \mathbb{Q}, \\ 0 & \text{ako je } \frac{x}{\pi} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$

6. Ako je

$$D_N(x) = \sum_{n=-N}^{N} e^{2\pi i n x} = \frac{\sin((2N+1)\pi x)}{\sin(\pi x)}$$

Dirichletova jezgra i

$$F_N(x) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} D_n(x) = \frac{1}{N} \Big(\frac{\sin(N\pi x)}{\sin(\pi x)} \Big)^2$$

Fejérova jezgra (s pomaknutim indeksom), izračunajte $\dfrac{(D_{2N}(x) - D_N(x))^2}{F_N(x)}$.

7. Ako je D_N Dirichletova jezgra, a F_N Fejérova jezgra (kao gore), izračunajte

(a) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{D_{3N}(x)-2D_{2N}(x)+D_N(x)}{x^2}$, (b) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{F_N(x)-N}{x^2}$.

8. (a) Nađite razvoj funkcije zadane formulom $f(x)=\dfrac{1}{2-e^{2\pi ix}}$ u eksponencijalni Fourierov red.

(b) Dokažite da dobiveni Fourierov red uniformno konvergira prema funkciji f.

(c) Izračunajte $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{|2-e^{2\pi ix}|^2}$.

9. (a) Razvijte funkciju $f(x)=\begin{cases} \frac{\pi}{2}+x & \text{za } x\in[-\pi,0\rangle \\ \frac{\pi}{2}-x & \text{za } x\in[0,\pi] \end{cases}$ u trigonometrijski Fourierov red na intervalu $[-\pi,\pi]$.

(b) Konvergira li taj red uniformno prema funkciji f na intervalu $[-\pi,\pi]$?

(c) Izračunajte: $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^4}$.

10. Izračunajte sume redova u smislu Cesàra:

(a) $\displaystyle (C)\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{(n-1)n/2}$, (b) $\displaystyle (C)\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{n\pi}{2}$.

Izračunajte sume redova u smislu Abela:

(c) $\displaystyle (A)\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n(n+1)/2}$, (d) $\displaystyle (A)\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\binom{n+5}{5}$.

11. Poznato je da je $\big(\mathrm{C}^1(\mathbb{T}),\|\cdot\|_{\mathrm{C}^1(\mathbb{T})}\big)$ Banachov prostor, pri čemu je norma definirana sa

$$\|f\|_{\mathrm{C}^1(\mathbb{T})}:=\sup_{x\in\mathbb{R}}|f(x)|+\sup_{x\in\mathbb{R}}|f'(x)|.$$

Pokažite da postoji $f\in\mathrm{C}^1(\mathbb{T})$ takva da

$$\lim_{N\to\infty}(S_Nf)(x)=\lim_{N\to\infty}\sum_{n=-N}^{N}\hat{f}(n)e^{2\pi inx}$$

ne postoji kao limes niza u prostoru $\big(\mathrm{C}^1(\mathbb{T}),\|\cdot\|_{\mathrm{C}^1(\mathbb{T})}\big)$.

12. Izračunajte Fourierove koeficijente 1-periodične funkcije $u\colon\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ klase C^1 koja zadovoljava diferencijalnu jednadžbu

$$\big(e^{2\pi ix}-1\big)u'(x)-4\pi i\,u(x)+\pi ie^{2\pi ix}=0$$

i uvjet $\int_0^1 u(x)dx=0$.

13.* Dokažite da za svaku $f\in\mathrm{L}^2(\mathbb{T})$ i svaki $\alpha\in\mathbb{R}$ niz funkcija $(g_m)_{m=1}^{\infty}$ definiran formulom

$$g_m(x):=\frac{1}{m}\sum_{k=0}^{m-1}f(x+k\alpha)$$

konvergira u prostoru $\mathrm{L}^2(\mathbb{T})$ i opišite sve moguće vrijednosti limesa tog niza.

14.* Označimo

$$(S_N f)(x) := \sum_{n=-N}^{N} \hat{f}(n) e^{2\pi i n x}, \qquad (Mf)(x) := \sup_{N\in\mathbb{N}} |(S_N f)(x)|.$$

Ako znamo da postoji konstanta $C \in \langle 0, +\infty\rangle$ takva da za svaku $f \in \mathrm{L}^2([0,1])$ imamo

$$\|Mf\|_{\mathrm{L}^2([0,1])} \leq C\|f\|_{\mathrm{L}^2([0,1])},$$

dokažite da za svaku $f \in \mathrm{L}^2([0,1])$ vrijedi

$$\lim_{N\to\infty} (S_N f)(x) = f(x) \qquad \text{za g.s. } x \in [0,1].$$

Upute, odgovori, rezultati

1. (a) *Rezultat*: $\frac{\mathrm{sh}\pi}{\pi} + \frac{2\mathrm{sh}\pi}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2+1} \cos kx + \frac{2\mathrm{sh}\pi}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1} k}{k^2+1} \sin kx$.
   (b) *Uputa*: Možemo primijeniti Dirichletov teorem i uvrstiti $x = 0$.
   (c) *Uputa*: Uvrstimo $x = \pi$ i uočimo da je $\frac{1}{2} f(\pi-) + f(\pi+) = \mathrm{ch}\pi$.

2. (a) *Rezultat*: $\frac{\sin \alpha\pi}{\alpha\pi} + \frac{2\alpha \sin \alpha\pi}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k^2-\alpha^2} \cos kx$.
   (b) *Uputa*: Uvrstimo $x = 0$.
   (c) *Uputa*: Uvrstimo $x = \pi$.
   (d) *Rezultat*: $\frac{9-\pi\sqrt{3}}{18}$.

3. (a) *Rezultat*: $\frac{1}{\pi} + \frac{1}{2} \sin x - \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos 2kx}{4k^2-1}$.
   (b) *Rezultati*: $\frac{1}{2}$ i $\frac{2-\pi}{4}$.

4. *Uputa*: Iz ograničenosti od f na $[-\pi, \pi] \setminus \{x_0, x_1, \ldots, x_m\}$ dobivamo $f \in \mathrm{L}^1([-\pi, \pi])$. Uočite da na svakom intervalu $\langle x_{j-1}, x_j\rangle$ vrijedi ili $f''(x) > 0$ za sve x ili $f''(x) < 0$ za sve x. To slijedi iz Darbouxovog teorema, koji kaže da derivacija poprima sve međuvrijednosti, makar ne mora biti neprekidna. Zato je f' monotona na intervalima $\langle x_{j-1}, x_j\rangle$, a kako je i ograničena, mora imati lijeve i desne limese.

5. *Odgovori*: (a) da, (b) da, (c) ne.

6. *Rezultat*: $4N \cos^2((3N + 1)\pi x)$.

7. (a) *Rezultat*: $-4\pi^2 N^2 (4N + 1)$.
   (b) *Rezultat*: $-\frac{1}{3}(N - 1)N(N + 1)\pi^2$.

8. (a) *Rezultat*: $\sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k-1} e^{2\pi i k x}$. *Uputa*: Umjesto da direktno računate Fourierove koeficijente, koristite razvoj $\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n$, koji vrijedi za kompleksne brojeve $z \in \mathbb{C}$, $|z| < 1$.
   (b) *Uputa*: Koristite da je f klase C^1.
   (c) *Rezultat*: $\frac{1}{3}$.

9. (a) *Rezultat*: $\frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} \cos(2k + 1)x$.
   (b) *Odgovor*: Da.
   (c) *Rezultat*: $\frac{\pi^4}{96}$.

10. (a) *Rezultat*: 0. *Uputa*: Uočite da su članovi zapravo $1, -1, -1, 1, \ldots$ i ponavljaju se s periodom 4 pa su parcijalne sume $1, 0, -1, 0, \ldots$.

 (b) *Rezultat*: $\frac{1}{2}$.

 (c) *Rezultat*: 0. *Uputa*: $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n(n+1)/2}r^n = \frac{1-r-r^2+r^3}{1-r^4} = \frac{1-r}{1+r^2}$ za $r \in [0, 1\rangle$.

 (d) *Rezultat*: $\frac{1}{64}$. *Uputa*: $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\binom{n+5}{5}r^n = \frac{1}{(1+r)^6}$.

11. *Uputa*: Najprije pokažite da operator parcijalnih Fourierovih suma komutira s operatorom deriviranja, tj.

$$\frac{d}{dx}\sum_{n=-N}^{N}\hat{f}(n)e^{2\pi inx} = \sum_{n=-N}^{N}(f')\widehat{\ }(n)e^{2\pi inx}.$$

Potom iskoristite poznatu činjenicu da postoji neprekidna funkcija čiji Fourierov red ne konvergira u svakoj točki pa onda ne konvergira ni uniformno.

12. *Rezultat*: $\hat{u}(n) = \begin{cases} \frac{1}{n(n+1)(n+2)} & \text{za } n \geq 1, \\ 0 & \text{za } n \leq 0. \end{cases}$

Rješenje. Funkcije u i u' su integrabilne pa imaju smisla njihovi Fourierovi koeficijenti. Korištenjem formula $\widehat{u'}(n) = 2\pi in\hat{u}(n)$ i $\big(e^{2\pi ix}v(x)\big)\widehat{\ }(n) = \hat{v}(n-1)$ dobivamo da je n-ti Fourierov koeficijent lijeve strane jednadžbe jednak

$$2\pi i(n-1)\hat{u}(n-1) - 2\pi in\hat{u}(n) - 4\pi i\hat{u}(n) + \pi i \cdot \begin{cases} 1 & \text{za } n = 1, \\ 0 & \text{za } n \neq 1. \end{cases}$$

Izjednačavanjem s nulom za $n = 1$ dobivamo

$$-6\pi i\hat{u}(1) + \pi i = 0 \implies \hat{u}(1) = \frac{1}{6},$$

za $n \geq 2$ dobivamo

$$\hat{u}(n) = \frac{n-1}{n+2}\,\hat{u}(n-1), \tag{$\diamondsuit$}$$

a za $n \leq 0$ dobivamo

$$\hat{u}(n-1) = \frac{n+2}{n-1}\,\hat{u}(n). \tag{$\heartsuit$}$$

Iz rekurzivne relacije ($\diamondsuit$) sada lako računamo $\hat{u}(2) = \frac{1}{24}$, $\hat{u}(3) = \frac{1}{60}$, itd., odakle možemo naslutiti $\hat{u}(n) = \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$ za $n \geq 1$, a potom to i dokazati indukcijom. Po uvjetu iz zadatka imamo $\hat{u}(0) = \int_0^1 u(x)dx = 0$ pa iz rekurzivne relacije ($\heartsuit$) trivijalnom indukcijom dobivamo $\hat{u}(n) = 0$ za $n \leq 0$.

13. *Rješenje.* Primijetimo da je

$$\hat{g}_m(n) = \Big(\frac{1}{m}\sum_{k=0}^{m-1}e^{2\pi ikn\alpha}\Big)\hat{f}(n)$$

za svaki $n \in \mathbb{Z}$ i svaki $m \in \mathbb{N}$. Najprije ćemo pretpostaviti da je f trigonometrijski polinom, tj. da je samo konačno mnogo koeficijenata $\hat{f}(n)$ različito od 0. Dakle, postoji $N \in \mathbb{N}$ takav da za svaki $n \in \mathbb{Z}$, $|n| > N$ vrijedi $\hat{f}(n) = 0$. Razlikujemo dva slučaja.

(1°) $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

Imamo $\hat{g}_m(0) = \hat{f}(0) = \int_{\mathbb{T}} f$ te za svaki $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ zahvaljujući $e^{2\pi in\alpha} \neq 1$ vrijedi

$$\hat{g}_m(n) = \frac{1}{m}\frac{1-e^{2\pi imn\alpha}}{1-e^{2\pi in\alpha}}\hat{f}(n).$$

Plancherelov identitet daje

$$\Big\|g_m - \int_{\mathbb{T}} f\Big\|_2^2 = \sum_{n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}}|\hat{g}_m(n)|^2 \leq \frac{4}{m^2}\sum_{\substack{n\in\mathbb{Z} \\ 0<|n|\leq N}}\frac{|\hat{f}(n)|^2}{|1-e^{2\pi in\alpha}|^2}$$

pa puštanjem $m \to \infty$ dobivamo da niz $(g_m)_{m=1}^{\infty}$ konvergira prema konstanti $\int_{\mathbb{T}} f$ po normi $\|\cdot\|_2$.

(2°) $\alpha \in \mathbb{Q}$, tj. $\alpha = p/q$, $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}$, p i q relativno prosti.
Ako je $n \in \mathbb{Z}$ višekratnik od q, tada imamo

$$\hat{g}_m(n) = \Big(\frac{1}{m}\sum_{k=0}^{m-1} e^{2\pi i k p(n/q)}\Big)\hat{f}(n) = \Big(\frac{1}{m}\sum_{k=0}^{m-1} 1\Big)\hat{f}(n) = \hat{f}(n),$$

dok za $n \in \mathbb{Z}$ koji nije djeljiv s q zbog $e^{2\pi i n p/q} \neq 1$ vrijedi

$$\hat{g}_m(n) = \frac{1}{m}\frac{1 - e^{2\pi i m n p/q}}{1 - e^{2\pi i n p/q}}\hat{f}(n).$$

Definiramo li

$$g(x) := \sum_{\substack{n\in\mathbb{Z}\\ |n|\leq N\\ n \text{ je višekratnik od } q}} \hat{f}(n)\, e^{2\pi i n x} = \sum_{\substack{l\in\mathbb{Z}\\ |l|\leq N/q}} \hat{f}(lq)\, e^{2\pi i l q x},$$

možemo ocijeniti (korištenjem Plancherelovog identiteta):

$$\|g_m - g\|_2^2 \leq \frac{4}{m^2} \sum_{\substack{n\in\mathbb{Z}\\ |n|\leq N\\ n \text{ nije višekratnik od } q}} \frac{|\hat{f}(n)|^2}{|1 - e^{2\pi i n p/q}|^2}.$$

Puštanjem $m \to \infty$ dobivamo $g_m \to g$ po normi $\|\cdot\|_2$.

Sada ćemo aproksimacijskim argumentom dokazati da uočeno vrijedi sasvim općenito. Za proizvoljnu $f \in \mathrm{L}^2(\mathbb{T})$ definirajmo $T_\alpha f \in \mathrm{L}^2(\mathbb{T})$ i to tako da stavimo

$$T_\alpha f := \int_{\mathbb{T}} f \quad \text{ako je } \alpha \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$$

te

$$(T_\alpha f)(x) := \underbrace{\sum_{l\in\mathbb{Z}} \hat{f}(lq) e^{2\pi i l q x}}_{\text{konvergencija u } \|\cdot\|_2} \qquad \text{ako je } \alpha = p/q,\ p\in\mathbb{Z},\ q\in\mathbb{N},\ p \text{ i } q \text{ relativno prosti.}$$

Iz Plancherelovog teorema se vidi da je uvijek $\|T_\alpha f\|_2 \leq \|f\|_2$ pa je T_α ograničeni linearni operator. Tvrdimo da niz $(g_m)_{m=1}^{\infty}$ konvergira po normi $\|\cdot\|_2$ prema funkciji $T_\alpha f$. Fiksirajmo $\varepsilon > 0$. Zbog gustoće postoji trigonometrijski polinom $\widetilde{f}$ takav da je $\|f - \widetilde{f}\|_2 < \varepsilon$ i označimo njemu odgovarajući niz iz zadatka sa $(\widetilde{g}_m)_{m=1}^{\infty}$. Prema dokazanom slučaju doista imamo $\widetilde{g}_m \to T_\alpha\widetilde{f}$ pa postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da za $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$ vrijedi $\|\widetilde{g}_m - T_\alpha\widetilde{f}\|_2 < \epsilon$. Za takve n možemo ocijeniti:

$$\begin{aligned}\|g_m - Tf\| &\leq \|g_m - \widetilde{g}_m\|_2 + \|\widetilde{g}_m - T_\alpha\widetilde{f}\|_2 + \|T_\alpha(\widetilde{f} - f)\|_2\\ &\leq \frac{1}{m}m\|f - \widetilde{f}\|_2 + \|\widetilde{g}_m - T_\alpha\widetilde{f}\|_2 + \|\widetilde{f} - f\|_2 < 3\varepsilon.\end{aligned}$$

Sjetimo li se da je $\varepsilon > 0$ bio proizvoljan, dobivamo traženu konvergenciju.

14. *Rješenje.* Najprije pokažimo poznatu tvrdnju da za svaku $f \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R})$ i svaki $\alpha > 0$ vrijedi

$$\lambda\big(\{x\in\mathbb{R} : |f(x)| \geq \alpha\}\big) \leq \alpha^{-2}\|f\|_{\mathrm{L}^2(\mathbb{R})}^2.$$

To je tzv. *Čebiševljeva nejednakost.* Za njen dokaz označimo $A_\alpha := \{x\in\mathbb{R} : |f(x)| \geq \alpha\}$.

$$\|f\|_{\mathrm{L}^2(\mathbb{R})}^2 = \int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 dx = \int_{A_\alpha} \underbrace{|f(x)|^2}_{\geq\alpha^2} dx + \underbrace{\int_{\mathbb{R}\setminus A_\alpha} |f(x)|^2 dx}_{\geq 0} \geq \alpha^2 \int_{A_\alpha} 1 dx = \alpha^2\lambda(A_\alpha)$$

Vratimo se zadatku. Po pretpostavci za svaku funkciju $h \in \mathrm{L}^2([0,1])$ imamo

$$\big\| Mh + |h| \big\|_{\mathrm{L}^2([0,1])} \leq \|Mh\|_{\mathrm{L}^2([0,1])} + \|h\|_{\mathrm{L}^2([0,1])} \leq (C+1)\|h\|_{\mathrm{L}^2([0,1])}$$

pa iz Čebiševljeve nejednakosti slijedi da za svaki $\delta > 0$ vrijedi

$$\lambda\big(\big\{x \in [0,1] : (Mh)(x) + |h(x)| > \delta\big\}\big) \leq (C+1)^2 \delta^{-2} \|h\|^2_{\mathrm{L}^2([0,1])}. \qquad (\clubsuit)$$

Uzmimo sada proizvoljnu $f \in \mathrm{L}^2([0,1])$ te neke brojeve $\delta, \varepsilon > 0$. Označimo

$$E_\delta := \Big\{x \in [0,1] : \limsup_{N\to\infty} |(S_N f)(x) - f(x)| \geq \delta\Big\}.$$

Zbog gustoće postoji trigonometrijski polinom g takav da je $\|f - g\|_{\mathrm{L}^2([0,1])} < \varepsilon$. Ako u nejednakosti

$$|(S_N f)(x) - f(x)| \leq |(S_N(f-g))(x)| + |(S_N g)(x) - g(x)| + |(g-f)(x)|$$

pustimo $\limsup_{N\to\infty}$ i iskoristimo da za dovoljno velike N vrijedi $S_N g = g$, dobit ćemo

$$\limsup_{N\to\infty} |(S_N f)(x) - f(x)| \leq \limsup_{N\to\infty} |(S_N(f-g))(x)| + |(g-f)(x)|$$

te pogotovo

$$\limsup_{N\to\infty} |(S_N f)(x) - f(x)| \leq (M(f-g))(x) + |(f-g)(x)|.$$

Sada možemo iskoristiti ocjenu ($\clubsuit$) za funkciju $h = f - g$:

$$\lambda(E_\delta) \leq (C+1)^2 \delta^{-2} \varepsilon^2.$$

Sjetimo se da je $\varepsilon > 0$ bio proizvoljan pa puštanjem $\lim_{\varepsilon\to 0}$ dobivamo $\lambda(E_\delta) = 0$ za svaki $\delta > 0$. Zbog σ-subaditivnosti je čak

$$\lambda\Big(\bigcup_{\delta>0} E_\delta\Big) = \lambda\Big(\bigcup_{m\in\mathbb{N}} E_{1/m}\Big) = 0,$$

a s druge strane za svaki $x \in [0,1] \setminus \bigcup_{\delta>0} E_\delta$ vrijedi

$$\limsup_{N\to\infty} |(S_N f)(x) - f(x)| = 0,$$

tj. $\lim_{N\to\infty} (S_N f)(x) = f(x)$.