Matematička analiza 1 – vježbe

Rudi Mrazović

Vanja Wagner

Prirodoslovno matematički fakultet – Matematički odsjek
Sveučilište u Zagrebu
E-mail adresa: Rudi.Mrazovic@math.hr

E-mail adresa: Vanja.Wagner@math.hr

Sadržaj

Sažetak

Ovo su bilješke s vježbi s kolegija *Matematička analiza 1* koji se održava tijekom zimskog semestra na PMF – Matematičkom odsjeku u sklopu preddiplomskog studija. Čitatelje koji uoče greške bilo kakve prirode molimo da nam na njih ukažu putem maila. Isto vrijedi i za sve komentare i sugestije koje bi mogle poboljšati izlaganje sadržaja.

Posljednja izmjena napravljena je 25. rujna 2024.

POGLAVLJE 1

Funkcije

Započet ćemo prezentacijom metode *dokazivanja svođenjem na kontradikciju*, što će biti jedan od češćih načina dokazivanja na ovom kolegiju, ali i ostatku studija.

PRIMJER 1.1 ($\sqrt{12}$ je iracionalan broj). Dokažimo da je $\sqrt{12}$ iracionalan broj, odnosno da nije racionalan. Ključna ideja pomoću koje ćemo to učiniti sastojat će se od sljedeća tri koraka:

1. Pretpostavit ćemo da je istinita suprotna tvrdnja.
2. Vodit ćemo se logičkim zaključivanjem kako bismo došli do nekakvog zaključka koji je apsurdan, odnosno *nema smisla*.
3. Zaključit ćemo da je pretpostavka s kojom smo započeli bila netočna.

Provedimo sada skiciranu strategiju u djelo. Dakle, želimo dokazati da je tvrdnja

$$\sqrt{12} \textit{ je iracionalan broj} \tag{1.1}$$

istinita. U skladu s prvim korakom, pretpostavimo da je suprotna tvrdnja istinita odnosno da vrijedi da

$$\sqrt{12} \textit{ nije iracionalan broj} \tag{1.2}$$

Napomenimo da mi trenutno ne znamo je li tvrdnja (1.2) istinita – ideja je da se pravimo da je te da potom vidimo gdje će nas to *pravljenje* dovesti.

Naravno, reći da broj *nije iracionalan* potpuno je isto kao da kažemo da je on *racionalan*, pa stoga, budući da smo se dogovorili da ćemo se neko vrijeme praviti da je tvrdnja (1.2) istinita, dolazimo do zaključka da je istinita i tvrdnja

$$\sqrt{12} \textit{ je racionalan broj.} \tag{1.3}$$

Što znači da je neki broj racionalan? Naravno, da se može prikazati kao količnik dva *cijela* broja, pa otuda dolazimo do zaključka da

$$\textit{Postoje } m, n \in \mathbf{Z} \textit{ takvi da je } \sqrt{12} = \frac{m}{n}. \tag{1.4}$$

Uočimo da zapis iz (1.4) (odnosno odabir cijelih brojeva m i n) nipošto ne mora biti jedinstven. Na primjer, odmah možemo navesti nekoliko načina na koje, na primjer, broj 1.5 možemo zapisati kao količnik dva cijela broja:

$$1.5 = \frac{3}{2} = \frac{6}{4} = \frac{150}{100} = \frac{-3}{-2} = \dots$$

Među svim ovim zapisima, oni koji zauzimaju posebno mjesto su $\frac{3}{2}$ i $\frac{-3}{-2}$ – oni se ne mogu više dodatno skratiti, tj. ne postoji neki cijeli broj $k \in \mathbf{Z}$ takav da je $k \neq \pm 1$ koji bi istodobno bio djelitelj i brojnika i nazivnika. Nadalje, uočimo da svaki racionalan broj ima (barem jedan) ovakav zapis – drugim riječima, ako krenemo od nekog zapisa racionalnog broja, njegov brojnik i nazivnik možemo *kratiti* te tako doći do zapisa u kojem brojnik i nazivnik nemaju zajedničkih djelitelja osim 1 i -1. Iz ovih komentara zaključujemo da ako je tvrdnja (1.4) istinita, tada je istinita i tvrdnja

$$\textit{Postoje } m, n \in \mathbf{Z} \textit{ koji nemaju zajedničkih djelitelja osim } 1 \textit{ i } -1 \textit{ i za koje je } \sqrt{12} = \frac{m}{n}. \tag{1.5}$$

Uzmimo sada takve brojeve m i n, pa kvadriranjem jednakosti u (1.5) dobivamo da je $12 = \frac{m^2}{n^2}$, odnosno

$$12n^2 = m^2. \tag{1.6}$$

Uočimo da je u posljednjoj jednakosti lijeva strana djeljiva s 3, pa takva mora biti i desna strana. Međutim, budući da je m cijeli broj, a 3 prost, ako je m^2 djeljiv s 3, tada mora vrijediti i da

$$m \textit{ je djeljiv s } 3. \tag{1.7}$$

Doista, budući da je 3 prost i da je m^2 djeljiv s 3, to znači da će se broj 3 naći u rastavu broja m^2 na proste faktore. Međutim, rastav na proste faktore od m^2 dobivamo tako da rastavimo m na proste faktore i potom svaki član kvadriramo. To znači da se 3 javlja i u rastavu broja m na proste faktore, odnosno da je m djeljiv s 3.

Sada kad znamo da je m djeljiv s 3, možemo zaključiti da postoji $k \in \mathbf{Z}$ takav da je $m = 3k$, pa ako tu jednakost uvrstimo u (1.6), dobivamo da je $12n^2 = 9k^2$, odnosno

$$4n^2 = 3k^2. \tag{1.8}$$

Iz ove jednakosti sada vidimo da je lijeva strana ($4n^2$) djeljiva s 3, pa mora vrijediti da

$$n \textit{ je djeljiv s } 3. \tag{1.9}$$

Posljednji zaključak vrijedi iz istih razloga kao i prije – 3 se javlja u rastavu na proste faktore broja $4n^2$, a njega dobijemo tako da svaki član u rastavu na proste faktore broja n kvadriramo i još sve skupa pomnožimo s rastavom na proste faktore broja 4.

Uočimo da smo ovim nizom zaključivanja dobili besmislicu. Naime, odlučili smo se praviti da je tvrdnja (1.2) istinita, a logičko zaključivanje potom nas je dovelo do brojeva $m, n \in \mathbf{Z}$ koji nemaju zajedničkih djelitelja osim 1 i -1 (tvrdnja (1.5)), ali su u isto vrijeme oba djeljiva s 3 (tvrdnje (1.7) i (1.9)). To naravno nema smisla, a krajnji uzrok koji nas je doveo do tog apsurdnog zaključka (tj. kontradikcije) bila je početna pretpostavka da je tvrdnja (1.2) istinita. Dakle, ta tvrdnja nikako ne može biti istinita, pa zaključujemo da mora biti istinita njena negacija, odnosno da $\sqrt{12}$ *je* iracionalan broj.

Promotrimo što bi se dogodilo da smo koristeći prethodnu metodu pokušali dokazati da je broj $\sqrt{4}$ iracionalan (što, naravno, nije istina budući da se radi o broju 2 koji je racionalan).

Na potpuno isti način došli bi do analogona tvrdnje (1.6) koja bi sada tvrdila da je $4n^2 = m^2$. Iz toga bi mogli zaključiti da m^2 djeljiv s 2, pa isto mora vrijediti i za m. To znači da je $m = 2k$ za neki $k \in \mathbf{Z}$, pa je

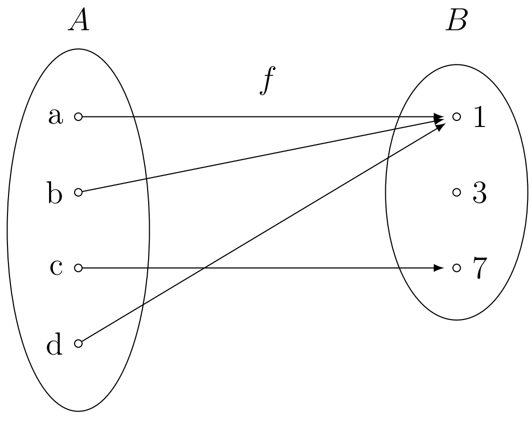
$$4n^2 = m^2 = (2k)^2 = 4k^2,$$

odnosno $n^2 = k^2$. Međutim, sada ne možemo ništa suštinski korisno zaključiti iz ove jednakosti, npr. ni u kojem slučaju ne možemo zaključiti nešto poput (1.9) što bi nas dovelo do kontradikcije kao u prethodnom primjeru.

Dakle, pretpostavka da je $\sqrt{4}$ racionalan broj *nije* nas dovela do kontradikcije. Napomenimo da to što nismo uspjeli doći do kontradikcije samo po sebi nije dokaz da je početna pretpostavka bila istinita – možda nas je neki drugačiji niz zaključivanja mogao dovesti kontradikcije.[1] Međutim, ako malo razmislimo shvatit ćemo da se to u ovom konkretnom slučaju nikako nije moglo dogoditi – da smo došli do kontradikcije značilo bi da je početna pretpostavka bila neistinita, odnosno da $\sqrt{4}$ *nije* racionalan broj. Naravno, mi znamo da $\sqrt{4} = 2$ *je* racionalan broj.

Definicija 1.2. Neka su A i B neprazni skupovi. **Funkcija** $f\colon A \to B$ je pravilo koje svakom elementu skupa A pridružuje neki element skupa B. Često umjesto oznake $f\colon A \to B$ jednostavno koristimo oznaku f, naročito u situacijama kada je jasno s kojim skupovima A i B radimo. Skup A nazivamo **domenom** funkcije f, a skup B **kodomenom** funkcije f. Element koji funkcija f pridružuje elementu $x \in A$ označavamo s $f(x)$.

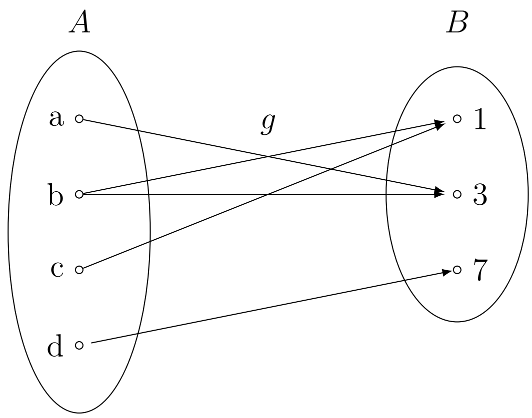
Primjer 1.3. Neka je $A = \{\mathrm{a}, \mathrm{b}, \mathrm{c}, \mathrm{d}\}$ i $B = \{1, 3, 7\}$. Neka je f funkcija koja elementu a pridružuje element 1, elementu b element 1, elementu c element 7, te elementu d opet element 1. Dakle, $f(\mathrm{a}) = f(\mathrm{b}) = f(\mathrm{d}) = 1$ i $f(\mathrm{c}) = 7$.



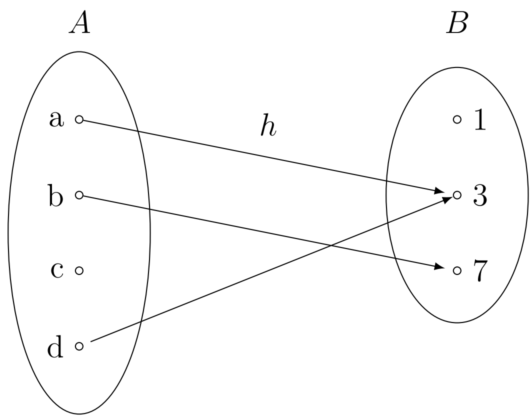
Neprimjer 1.4. Navedimo nekoliko pridruživanja na skupovima A i B iz prethodnog primjera koja, za razliku od pridruživanja f, *nisu* funkcije.

(a) Dolje prikazano pridruživanje g nije funkcija budući da elementu b pridružuje dva elementa iz skupa B (konkretno, elemente 1 i 3).

[1] Na primjer, u Primjeru 1.1 na isti način na koji smo iz (1.6) zaključili da m mora biti djeljiv s 3 mogli smo zaključiti i da m mora biti djeljiv s 2. Ako bismo onda, prateći daljnji postupak, napisali da je $m = 2k$, došli bi do jednakosti $3n^2 = k^2$, a iz nje ne bi mogli zaključiti da je i n djeljiv s 2, tj. ne bi došli do kontradikcije.



(b) Dolje prikazano pridruživanje h nije funkcija budući da elementu c nije pridružilo niti jedan element skupa B.



Dakle, pridruživanje prikazano grafički kao u prethodnim primjerima će biti funkcija ako i samo ako iz svakog elementa iz skupa A izlazi točno jedna strelica prema skupu B.

Primjer 1.5. Neka je $f\colon [0,+\infty) \to \mathbf{R}$ funkcija koje svakom x iz $[0,+\infty)$ pridružuje element x^2 iz $\mathbf{R}$. Dakle, $f(x) = x^2$ za svaki $x \in [0,+\infty)$.

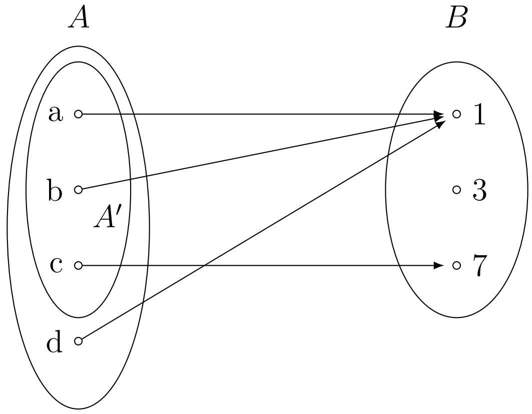
Nadalje, neka je $g\colon [0,+\infty) \to [0,+\infty)$ funkcija takva da je također $g(x) = x^2$ za svaki $x \in [0,+\infty)$.

Konačno, neka je $h\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ funkcija takva da je $h(x) = x^2$ za svaki $x \in \mathbf{R}$.

Uočimo da f, g i h, iako imaju istu formulu za pridruživanje elemenata, *nisu* iste funkcije – da bi funkcije bile iste nije dovoljno da imaju istu formulu, već moraju imati i istu domenu i kodomenu.

Definicija 1.6. Neka je $f\colon A \to B$ neka funkcija, te neka je $A' \subseteq A$. Funkciju $g\colon A' \to B$ za koju vrijedi da je $g(x) = f(x)$ za sve $x \in A'$ nazivamo **restrikcijom funkcije f na skup** A'. Takvu funkciju g češće označavamo s $f|_{A'}$.

Primjer 1.7. Vratimo se na funkciju f iz Primjera 1.3. Neka je $A' \subseteq A$ skup $A' = \{\mathrm{a}, \mathrm{b}, \mathrm{c}\}$. Tada je, na primjer, $(f|_{A'})(\mathrm{b}) = f(\mathrm{b}) = 1$. S druge strane, vrijednost $(f|_{A'})(\mathrm{d})$ nije definirana budući da je domena funkcije $f|_{A'}$ skup A', a $\mathrm{d} \notin A'$.



DEFINICIJA 1.8. Neka je $f\colon A \to B$ funkcija i $C \subseteq A$. **Slika skupa** C **po funkciji** f je skup

$$f(C) = \{f(x) : x \in C\}.$$

Posebno, ako je $C = A$, tada skup $f(A)$ nazivamo **slikom funkcije** f i označavamo s $\mathcal{R}(f)$. Dakle, $\mathcal{R}(f) = f(A) = \{f(x) : x \in A\}$.

Uočimo da za svaki skup C imamo da je $f(C) = \mathcal{R}(f|_C)$.

PRIMJER 1.9. Neka je f ponovno funkcija iz Primjera 1.3. Tada je, na primjer, $f(\{\mathrm{a}, \mathrm{b}\}) = \{1\}$ i $f(\{\mathrm{c}, \mathrm{d}\}) = \{1, 7\}$.

Naglasimo i jednu suptilnost oznake $f(\cdot)$. Ta oznaka u biti može označavati dvije stvari ovisno o tome što se nalazi u zagradama. Ako je u zagradama neki element x iz skupa A, tada $f(x)$ označava neki element skupa B – konkretno, onaj element koji funkcija f pridružuje elementu x. S druge strane, ako je u zagradama neki podskup C skupa A, tada $f(C)$ označava njegovu sliku po funkciji f. Dakle, $f(\mathrm{c}) = 7$, ali $f(\{\mathrm{c}\}) = \{7\}$ – obratite pozornost na vitičaste zagrade koje u potonjem slučaju označavaju da se radi o skupovima.

ZADATAK 1.10. Neka je $f\colon A \to B$ i $C, D \subseteq A$.

(a) Dokažite da je $f(C \cup D) = f(C) \cup f(D)$.
(b) Dokažite da je $f(C \cap D) \subseteq f(C) \cap f(D)$, ali da obratna inkluzija ne mora općenito vrijedi.
(c) Dokažite da je $f(C \setminus D) \supseteq f(C) \setminus f(D)$, ali da obratna inkluzija ne mora općenito vrijedi.

RJEŠENJE. (a) Da bismo dokazali da je $f(C \cup D) = f(C) \cup f(D)$, trebamo pokazati da je svaki element skupa na lijevoj strani ujedno i element skupa na desnoj strani i obratno. Drugim riječima, moramo pokazati da je $f(C \cup D) \subseteq f(C) \cup f(D)$ i $f(C \cup D) \supseteq f(C) \cup f(D)$.

Dokažimo da je $f(C \cup D) \subseteq f(C) \cup f(D)$, odnosno da za svaki $y \in f(C \cup D)$ mora biti i da je $y \in f(C) \cup f(D)$.

Uzmimo, dakle, proizvoljni $y \in f(C \cup D)$. Po definiciji slike skupa $C \cup D$ po funkciji f znamo da postoji neki $x \in C \cup D$ takav da je $y = f(x)$. Budući da je $x \in C \cup D$, znamo da je $x \in C$ ili $x \in D$ (a možda i jedno i drugo). Ukoliko je $x \in C$, tada je

$f(x) \in f(C)$. S druge strane, ako je $x \in D$, tada je $f(x) \in f(D)$. Dakle, vidimo da je $f(x) \in f(C)$ ili $f(x) \in f(D)$, pa je u svakom slučaju $f(x) \in f(C) \cup f(D)$. Budući da je $y = f(x)$, zaključujemo da je $y \in f(C) \cup f(D)$. Prethodni niz zaključivanja možemo i grafički skicirati:

$$
\begin{tikzcd}
 & y \in f(C \cup D) \arrow[d, Rightarrow] & \\
 & x \in C \cup D, y = f(x) \arrow[dl, Rightarrow] \arrow[dr, Rightarrow] & \\
x \in C \arrow[d, Rightarrow] & \text{ili} & x \in D \arrow[d, Rightarrow] \\
f(x) \in f(C) \arrow[dr, Rightarrow] & & f(x) \in f(D) \arrow[dl, Rightarrow] \\
 & f(x) \in f(C) \cup f(D) \arrow[d, Rightarrow] & \\
 & y \in f(C) \cup f(D) &
\end{tikzcd}
$$

Dokažimo i obratnu inkluziju, tj. da je $f(C \cup D) \supseteq f(C) \cup f(D)$, odnosno da za svaki $y \in f(C) \cup f(D)$ mora vrijediti i da je $y \in f(C \cup D)$.

Uzmimo, dakle, proizvoljni $y \in f(C) \cup f(D)$. Tada po definiciji unije skupova znamo da je $y \in f(C)$ ili $y \in f(D)$ (a možda i jedno i drugo). U prvom slučaju, ako je $y \in f(C)$ tada po definiciji slike skupa C postoji $x \in C$ takav da je $y = f(x)$. Međutim, ako je $x \in C$, tada je i $x \in C \cup D$, pa je stoga $f(x) \in f(C \cup D)$. Budući da je $y = f(x)$, zaključujemo da je $y \in f(C \cup D)$. Na potpuno jednaki način dobivamo isti zaključak i u drugom slučaju, tj. ako je $y \in f(D)$. Ponovno dajemo i skicu prethodnog zaključivanja:

$$
\begin{tikzcd}
 & y \in f(C) \cup f(D) \arrow[dl, Rightarrow] \arrow[dr, Rightarrow] & \\
y \in f(C) \arrow[d, Rightarrow] & \text{ili} & y \in f(D) \arrow[d, Rightarrow] \\
x \in C, y = f(x) \arrow[dr, Rightarrow] & & x \in D, y = f(x) \arrow[dl, Rightarrow] \\
 & x \in C \cup D \arrow[d, Rightarrow] & \\
 & y \in f(C \cup D) &
\end{tikzcd}
$$

(b) Neka je $y \in f(C \cap D)$. Tražena inkluzija bit će dokazana ukoliko pokažemo da je nužno i $y \in f(C) \cap f(D)$. Iz definicije slike skupa $C \cap D$ vidimo da postoji $x \in C \cap D$ takav da je $y = f(x)$. Budući da je $x \in C \cap D$, slijedi da je $x \in C$ i $x \in D$. Iz $x \in C$

i $y = f(x)$ imamo da je $y \in f(C)$, dok iz $x \in D$ i $y = f(x)$ imamo da je $y \in f(D)$. Budući da je $y \in f(C)$ i $y \in f(D)$, zaključujemo da je $y \in f(C) \cap f(D)$.

Obratna inkluzija će za neke funkcije f i neke skupove C i D vrijediti, ali to ne mora vrijediti *uvijek*. Jedan primjer u kojem obratna inkluzija neće biti zadovoljena možemo konstruirati tako da odaberemo skupove *disjunktne* skupove C i D što će automatski osigurati da je $f(C \cap D) = \emptyset$, ali da u isto vrijeme funkcija f nekoj točki iz skupa C i nekoj točki iz skupa D pridruži isti element kodomene, što će osigurati da je $f(C) \cap f(D) \neq \emptyset$. Uz tako odabranu funkciju f i skupove C i D nikako nećemo moći imati da je $f(C \cap D) \supseteq f(C) \cap f(D)$. Jedan konkretan takav primjer bila bi funkcija $f\colon \{1, 2\} \to \{1\}$ takva da je $f(1) = f(2) = 1$, dok bi za skupove uzeli $C = \{1\}$ i $D = \{2\}$. U ovom slučaju imamo $f(C \cap D) = f(\emptyset) = \emptyset$ i $f(C) \cap f(D) = \{1\} \cap \{1\} = \{1\}$.

(c) Uzmimo proizvoljni $y \in f(C) \setminus f(D)$, te dokažimo da je tada i $y \in f(C \setminus D)$. Budući da je $y \in f(C) \setminus f(D)$, onda je posebno i $y \in f(C)$ pa postoji neki $x \in C$ takav da je $y = f(x)$. Uočimo da za taj x mora nužno vrijediti da je $x \notin D$. Naime, kada to ne bi bio slučaj, imali bi da je $x \in D$, odakle bi slijedilo da je $y \in f(D)$ što bi zajedno s prethodnom činjenicom da je $y \in f(C)$ dovelo do zaključka $y \notin f(C) \setminus f(D)$.[2] Dakle, $x \in C$ i $x \notin D$, što znači da je $x \in C \setminus D$ odnosno $y \in f(C \setminus D)$.

Pokažimo još i da obratna inkluzija ne mora uvijek vrijediti. Drugim riječima, trebamo pronaći neku funkciju f i skupove C i D tako da $f(C \setminus D)$ *nije* podskup od $f(C) \setminus f(D)$. Jedan način da to postignemo je da odaberemo skupove C i D tako da je skup D *pravi* podskup od C, ali da je u isto vrijeme $f(C) = f(D)$. Ako to uspijemo, onda će biti $f(C) \setminus f(D) = \emptyset$ i $f(C \setminus D) \neq \emptyset$ pa sigurno nećemo moći imati da je $f(C \setminus D) \subseteq f(C) \setminus f(D)$. Da funkciju f i skupove C i D doista možemo odabrati na opisani način vidljivo je iz primjera funkcije $f\colon \{1, 2\} \to \{1\}$ za koju je $f(1) = f(2) = 1$ i skupova $C = \{1, 2\}$ i $D = \{2\}$. Za njih imamo $f(C \setminus D) = f(\{1, 2\} \setminus \{2\}) = f(\{1\}) = \{1\}$ i $f(C) \setminus f(D) = \{1\} \setminus \{1\} = \emptyset$.

□

DEFINICIJA 1.11. Neka je $f\colon A \to B$ funkcija i $E \subseteq B$. **Praslika skupa E po funkciji f** je skup

$$f^{-1}(E) = \{x \in A : f(x) \in E\}.$$

Uočimo da u prethodnoj definiciji, za razliku od definicije slike skupa, *ekstremni* slučaj $E = B$ nije pretjerano zanimljiv. Naime, $f^{-1}(B)$ uvijek je upravo skup A, budući da je za svaki $x \in A$ uvijek $f(x) \in B$.

PRIMJER 1.12. Vratimo se još jednom na funkciju f iz Primjera 1.3. Tada je, na primjer, $f^{-1}(\{7\}) = \{\mathrm{c}\}$, $f^{-1}(\{1, 3\}) = \{\mathrm{a, b, d}\}$ i $f^{-1}(\{3\}) = \emptyset$.

Čitatelja pozivamo da sljedeći zadatak usporedi sa Zadatkom 1.10.

---

[2]Uočite da smo u zaključivanju u ovoj rečenici koristili metodu svođenja na kontradikciju iz Primjera 1.1.

Zadatak 1.13. Neka je $f\colon A \to B$ i $E, F \subseteq B$.

(a) Dokažite da je $f^{-1}(E \cup F) = f^{-1}(E) \cup f^{-1}(F)$.
(b) Dokažite da je $f^{-1}(E \cap F) = f^{-1}(E) \cap f^{-1}(F)$.
(c) Dokažite da je $f^{-1}(E \setminus F) = f^{-1}(E) \setminus f^{-1}(F)$.

Uočimo da, za razliku od situacije u Zadatku 1.10, svuda imamo znakove jednakosti, pa možemo reći da *praslika bolje "surađuje" sa skupovnim operacijama od slike* – ovu nit vodilju bilo bi dobro zapamtiti budući da ćemo se s njom sretati i kroz nekoliko drugih kolegija.

Rješenje. (a) Trebamo pokazati da je $f^{-1}(E \cup F) \subseteq f^{-1}(E) \cup f^{-1}(F)$ i $f^{-1}(E \cup F) \supseteq f^{-1}(E) \cup f^{-1}(F)$. Tome bismo mogli pristupiti kao dvjema odvojenim tvrdnjama i dokazati svaku zasebno kao što smo učinili u Zadatku 1.10(a). Međutim, možemo pokušati i dokazati obje tvrdnje odjednom i to tako da pokažemo da je $x \in f^{-1}(E \cup F)$ ako i samo ako je $x \in f^{-1}(E) \cup f^{-1}(F)$. Kako to dokazati pokazuje sljedeći niz ekvivalencija

$$\begin{aligned} x \in f^{-1}(E \cup F) &\iff f(x) \in E \cup F \\ &\iff f(x) \in E \text{ ili } f(x) \in F \\ &\iff x \in f^{-1}(E) \text{ ili } x \in f^{-1}(F) \\ &\iff x \in f^{-1}(E) \cup f^{-1}(F). \end{aligned}$$

Napominjemo da kod ovakvog zapisivanja ekvivalencija treba biti iznimno oprezan te izbjegavati automatizmom pisati da vrijedi i jedna i druga implikacija u ekvivalenciji.

(b) Dokazujemo slično kao u (a) dijelu:

$$\begin{aligned} x \in f^{-1}(E \cap F) &\iff f(x) \in E \cap F \\ &\iff f(x) \in E \text{ i } f(x) \in F \\ &\iff x \in f^{-1}(E) \text{ i } x \in f^{-1}(F) \\ &\iff x \in f^{-1}(E) \cap f^{-1}(F). \end{aligned}$$

(c) Slično kao i prije:

$$\begin{aligned} x \in f^{-1}(E \setminus F) &\iff f(x) \in E \setminus F \\ &\iff f(x) \in E \text{ i } f(x) \notin F \\ &\iff x \in f^{-1}(E) \text{ i } x \notin f^{-1}(F) \\ &\iff x \in f^{-1}(E) \setminus f^{-1}(F). \end{aligned}$$

□

Zadatak 1.14 (za zadaću). Neka je $f\colon A \to B$, te $C \subseteq A$ i $E \subseteq B$.

(a) Ispitajte odnos skupova C i $f^{-1}(f(C))$, tj. ispitajte hoće li uvijek biti prvi podskup od drugoga i/ili obratno. Kao i u prethodnim zadacima, inkluzije za koje smatrate da su istinite dokažite, a za ostale primjerima pokažite da ne moraju uvijek vrijediti.

(b) Ispitajte odnos skupova E i $f(f^{-1}(E))$.

Zadatak 1.15. Neka je $f\colon \mathbf{Z} \to \mathbf{Z}$ s pravilom pridruživanja $f(n) = 2n^2 + 1$. Odredite $f(\{-1, 0, 1\})$, $f^{-1}(\{10, 11\})$ i $f^{-1}(\{51\})$.

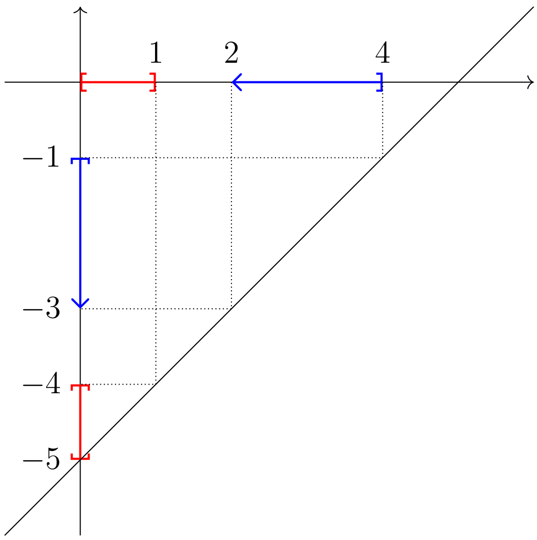
Rješenje. Budući da je $f(-1) = 2\cdot(-1)^2+1 = 3$, $f(0) = 2\cdot 0^2+1 = 1$ i $f(1) = 2\cdot 1^2+1 = 3$, zaključujemo da je $f(\{-1, 0, 1\}) = \{1, 3\}$.

Da bismo odredili $f^{-1}(\{10, 11\})$ trebamo pronaći sve $n \in \mathbf{Z}$ za koje je $f(n) = 10$ ili $f(n) = 11$. Ako je $f(n) = 10$, tada je $2n^2+1 = 10$, odnosno $n^2 = \frac{9}{2}$, što je naravno nemoguće za $n \in \mathbf{Z}$. Slično, ako je $f(n) = 11$, tada je $2n^2 + 1 = 11$, odnosno $n^2 = 5$, što je ponovno neostvarivo za $n \in \mathbf{Z}$. Dakle, $f^{-1}(\{10, 11\}) = \emptyset$.

Da bismo odredili $f^{-1}(\{51\})$ trebamo pronaći sve $n \in \mathbf{Z}$ za koje je $f(n) = 51$, odnosno $2n^2 + 1 = 51$. Ova jednakost svodi se na $n^2 = 25$, a jedini $n \in \mathbf{Z}$ koji to zadovoljavaju su $n = 5$ i $n = -5$. Dakle, $f^{-1}(\{51\}) = \{-5, 5\}$. □

Zadatak 1.16. Neka je $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ funkcija s pravilom pridruživanja $f(x) = x - 5$. Iz njenog grafa odredite $\mathcal{R}(f)$, $f([0, 1])$ i $f^{-1}(\langle -3, -1])$.

Rješenje. Najprije crtamo graf funkcije f:



Iz grafa, te definicija slike i praslike, vidimo da je $\mathcal{R}(f) = \mathbf{R}$, $f([0, 1]) = [-5, -4]$ i $f^{-1}(\langle -3, -1]) = \langle 2, 4]$. U posljednjoj jednakosti posebno treba paziti na rubove, odnosno koji ćemo uključiti, a koji ne. Razlog zašto 2 nije uključen, a 4 jest je taj što je $f(2) = -3$ i $f(4) = -1$ te što u $\langle -3, -1]$ rub -3 nije uključen, a -1 je. □

Prije nego što se krenemo baviti nekim konkretnim klasama funkcija, navedimo još dvije bitne definicije.

Definicija 1.17. Funkciju čija je domena podskup skupa $\mathbf{R}$ nazivat ćemo **funkcijom realne varijable**. Funkciju čija je kodomena podskup skupa $\mathbf{R}$ nazivamo **realnom funkcijom**.

Kada govorimo o realnim funkcijama realne varijable, jako ćemo često imati situaciju da je navedeno samo njihovo pravilo pridruživanja, odnosno samo formula poput $f(x) = \sqrt{x}$, a da domena i kodomena nisu eksplicitno navedene. Kodomena će nam u takvim situacijama biti manje bitna i uglavnom ćemo se ponašati da je to jednostavno skup $\mathbf{R}$. S druge strane, što se tiče domene, često ćemo biti zainteresirani za **prirodnu domenu** (oznaka $\mathcal{D}(f)$), odnosno najveći podskup od $\mathbf{R}$ koji može biti domena funkcije f, a da formula i dalje ima smisla za sve x iz te domene. Na primjer, ako imamo pravilo pridruživanja $f(x) = \sqrt{x}$, tada je prirodna domena $\mathcal{D}(f) = [0, +\infty\rangle$, budući da je veličina $\sqrt{x}$ dobro definirana za sve $x \in [0, +\infty\rangle$, ali niti za jedan $x \in \mathbf{R} \setminus [0, +\infty\rangle = \langle -\infty, 0\rangle$.[3]

Prelazimo na neke tipične primjere realnih funkcija realne varijable.

1.1. Polinomi

DEFINICIJA 1.18. **Polinom** p **stupnja** n je realna funkcija realne varijable s pravilom pridruživanja

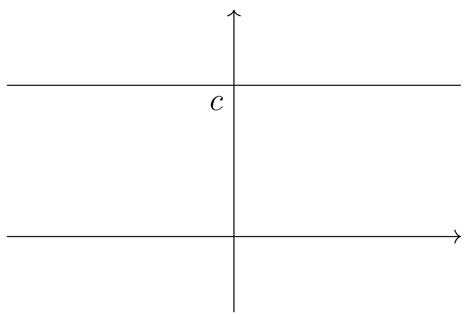
$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0, \tag{1.10}$$

pri čemu brojeve $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0 \in \mathbf{R}$ nazivamo njegovim **koeficijentima**, te vrijedi da je $a_n \neq 0$. Broj n, odnosno stupanj polinoma f, ponekad označavamo i s $\deg f$.

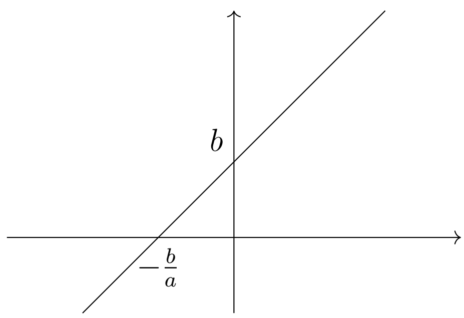
Uočimo da je za svaki polinom prirodna domena cijeli skup $\mathbf{R}$ – desna strana u (1.10) ima smisla za sve $x \in \mathbf{R}$.

PRIMJER 1.19. Navedimo neke najjednostavnije primjere polinoma.

(a) Polinome stupnja 0, odnosno funkcije oblika $p(x) = c$ nazivamo **konstantnim polinomima**. Graf konstantnog polinoma je pravac paralelan s osi apscisa. U posebnom slučaju $c = 0$ funkciju $p(x) = 0$ nazivamo i **nul-polinomom**.[4]

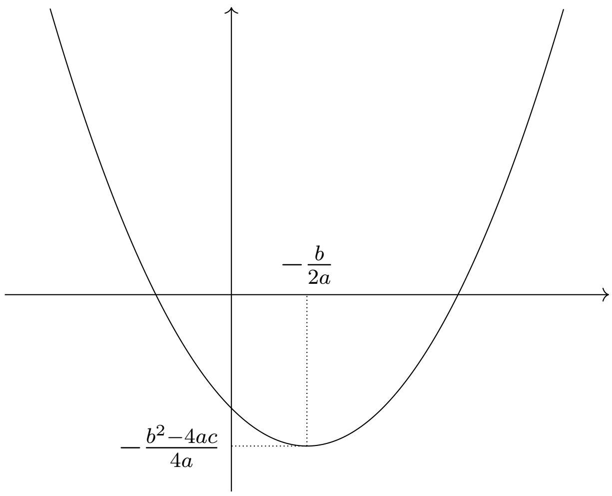


(b) Polinome stupnja 1, odnosno funkcije oblika $p(x) = ax + b$ uz $a \neq 0$ nazivamo **afinim funkcijama**. Graf afine funkcije je pravac.

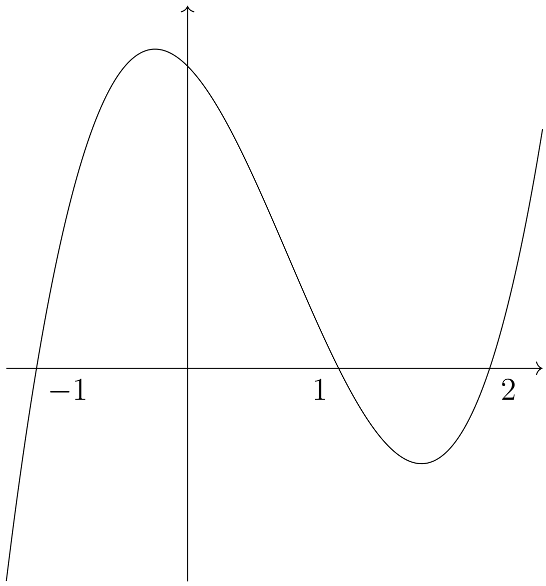


[3] Ovdje zanemarujemo da $\sqrt{x}$ za $x < 0$ u biti može imati smisla ukoliko gledamo i kompleksne brojeve.
[4] Ponekad se u literaturi navodi da stupanj nul-polinoma nije 0, već -1 ili čak $-\infty$. To je isključivo stvar dogovora i za trenutnu raspravu nebitno.

(c) Polinome stupnja 2, odnosno funkcije oblika $p(x) = ax^2 + bx + c$ uz $a \neq 0$ nazivamo **kvadratnim polinomima** (ili kvadratnim funkcijama). Graf kvadratnog polinoma je parabola.



(d) Ilustrirajmo i jedan **kubni polinom**, odnosno polinom stupnja 3, na primjer $p(x) = (x-1)(x-2)(x+1) = x^3 - 2x^2 - x + 2$.

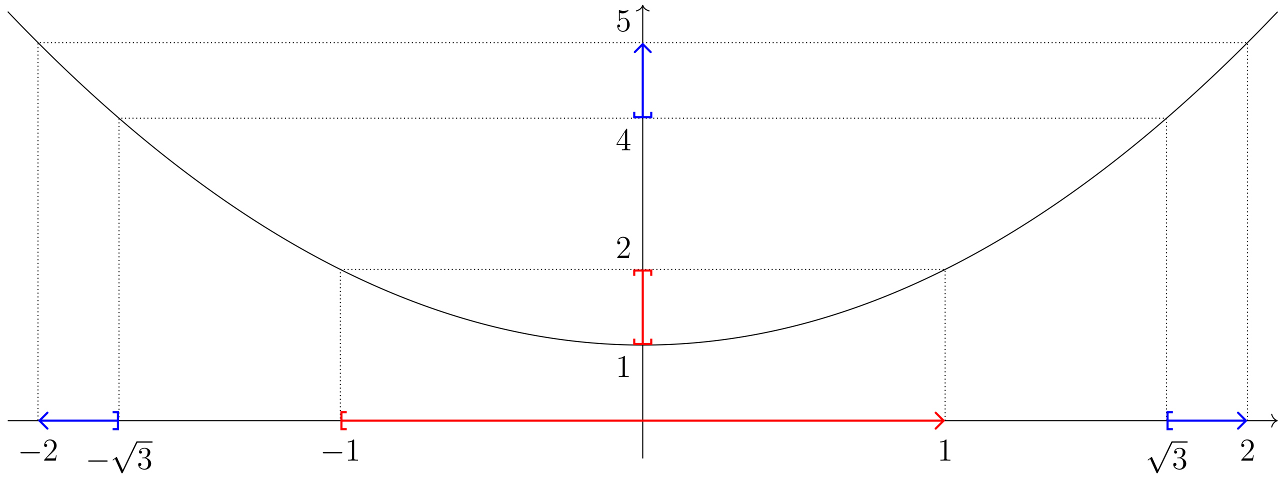


Iz prethodna četiri primjera vidimo trend da što je veći stupanj polinoma, to je pripadni graf *kompliciraniji.* Tu tvrdnju možemo na neke načine čak i precizirati – na primjer, polinom stupnja n može imati najviše $n-1$ *grba.*[5]

Zadatak 1.20. Neka je $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ funkcija s pravilom pridruživanja $f(x) = x^2 + 1$. Iz njenog grafa odredite $\mathcal{R}(f)$, $f([-1, 1\rangle)$ i $f^{-1}([4, 5\rangle)$.

Rješenje. Crtamo graf funkcije f:

[5]Riječ *najviše* u prethodnoj rečenici je bitna. Iako će *tipični* polinom stupnja n imati $n-1$ grba, moguće je da neki specifični polinomi imaju i manje – to će imati veze s postojanjem takozvanih degeneriranih nultočaka. Na primjer, iako je $p(x) = (x-1)^{100}$ polinom stupnja 100, on ima samo jednu grbu.



Iz grafa vidimo da je $\mathcal{R}(f) = [1, +\infty\rangle$, $f([-1, 1\rangle) = [1, 2]$ i $f^{-1}([4, 5\rangle) = \langle -2, -\sqrt{3}] \cup [\sqrt{3}, 2\rangle$.

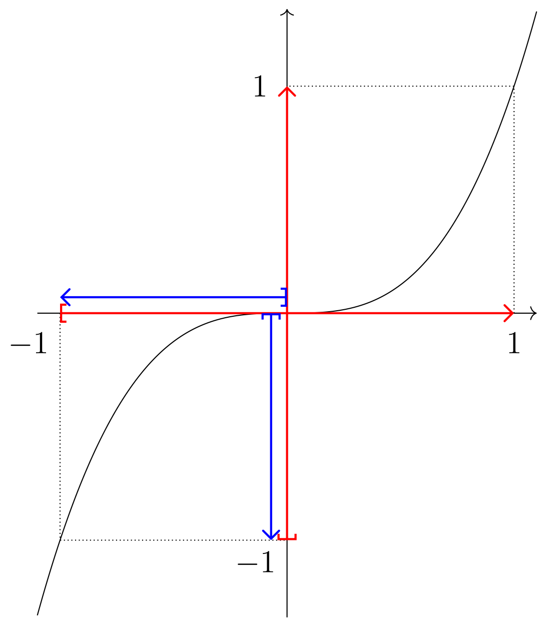
Pokažimo kako možemo pronaći $f^{-1}([4, 5\rangle)$ i čistim računom, bez poznavanja grafa:

$$\begin{aligned} x \in f^{-1}([4,5\rangle) &\iff f(x) \in [4,5\rangle \\ &\iff x^2 + 1 \in [4,5\rangle \\ &\iff x^2 \in [3,4\rangle \\ &\iff x \in \langle -2, -\sqrt{3}] \cup [\sqrt{3}, 2\rangle. \end{aligned}$$

□

Zadatak 1.21. Neka je $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ funkcija s pravilom pridruživanja $f(x) = x^3$. Iz njenog grafa odredite $\mathcal{R}(f)$, $f([-1, 1\rangle)$ i $f^{-1}(\langle -1, 0])$.

Rješenje. Crtamo graf funkcije f:



Iz grafa vidimo da je $\mathcal{R}(f) = \mathbf{R}$, $f([-1, 1\rangle) = [-1, 1\rangle$ i $f^{-1}(\langle -1, 0]) = \langle -1, 0]$.

Pokažimo opet kako možemo pronaći $f^{-1}(\langle -1, 0])$. Kao i u prethodnom zadatku vidimo da će taj skup sadržavati točno one x za koje je $x^3 \in \langle -1, 0]$, što će vrijediti ako i samo ako je $x^3 > -1$ i $x^3 \leq 0$. Sada analiziramo svaku od posljednje dvije nejednakosti zasebno.

S jedne strane, imamo

$$x^3 > -1 \iff x^3 + 1 > 0 \iff (x+1)(x^2 - x + 1) > 0.$$

Međutim, lako se vidi da je uvijek $x^2 - x + 1 > 0$, na primjer tako što primijetimo da su koordinate tjemena kvadratne funkcije na lijevoj strani $(\frac{1}{2}, \frac{3}{4})$. Zbog toga je

$$x^3 > -1 \iff x + 1 > 0 \iff x > -1.$$

S druge strane, očito je

$$x^3 \leq 0 \iff x \leq 0.$$

Spajanjem dva dobivena zaključka dobivamo da je doista $f^{-1}(\langle -1, 0]) = \langle -1, 0]$. $\square$

1.2. Racionalne funkcije

Definicija 1.22. **Racionalna funkcija** je realna funkcija realne varijable s pravilom pridruživanja

$$r(x) = \frac{p(x)}{q(x)}, \tag{1.11}$$

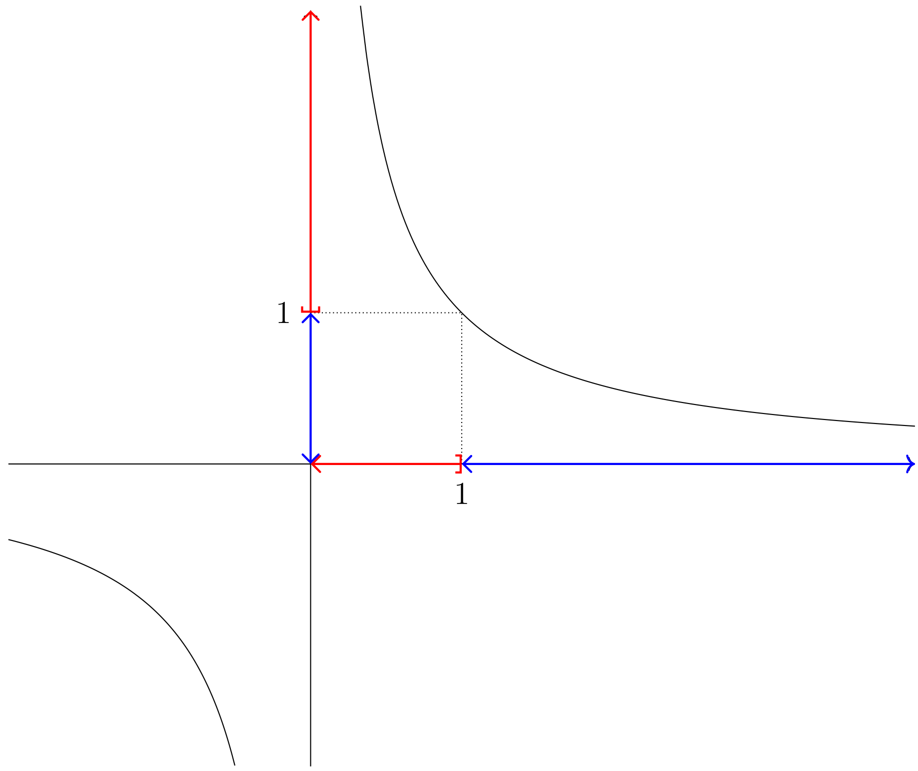
pri čemu su p i q polinomi i q nije nul-polinom. Ako je $\deg p < \deg q$, tada r nazivamo **pravom racionalnom funkcijom**.

Uočimo da je prirodna domena racionalne funkcije $r(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ skup $\mathcal{D}(r) = \{x \in \mathbf{R} : q(x) \neq 0\}$.

$f(x) = \frac{1}{x}$ primjer je prave racionalne funkcije, dok je $g(x) = \frac{x^3 - x + 1}{x^2 + 2}$ primjer racionalne funkcije koja nije prava. Uočimo da svaku racionalnu funkciju $r(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ uvijek možemo zapisati kao sumu polinoma i *prave* racionalne funkcije. Doista, ako je $\deg q = 0$ onda je ta tvrdnja očita jer je već sama funkcija r u tom slučaju polinom. S druge strane, ako je $\deg q \geq 1$ tada iz teorema o dijeljenju polinoma znamo da postoje polinomi s i t takvi da je $p(x) = q(x)s(x) + t(x)$ i $\deg t < \deg q$. Tada je $r(x) = s(x) + \frac{t(x)}{q(x)}$.

Zadatak 1.23. Neka je $f(x) = \frac{1}{x}$. Odredite $\mathcal{D}(f)$, $f(\langle 0, 1])$ i $f^{-1}(\langle 0, 1\rangle)$.

Rješenje. Jedina što sprečava formulu $f(x) = \frac{1}{x}$ da bude dobro definirana je 0 u nazivniku pa je $\mathcal{D}(f) = \mathbf{R} \setminus \{0\}$.



Iz grafa vidimo da je $f(\langle 0,1]) = [1,+\infty\rangle$ i $f^{-1}(\langle 0,1\rangle) = \langle 1,+\infty\rangle$. $\square$

ZADATAK 1.24. Neka je $f(x) = \frac{x^2+1}{x^2-1}$. Odredite $\mathcal{D}(f)$ i $f^{-1}(\langle -\infty,-2\rangle)$.

RJEŠENJE. Jedina što sprečava formulu $f(x) = \frac{x^2+1}{x^2-1}$ da bude dobro definirana je 0 u nazivniku pa je $\mathcal{D}(f) = \mathbf{R} \setminus \{-1,+1\}$.

Funkcija f je sada ipak nešto kompliciranija i ne može se pouzdati u vještine preciznog crtanja grafa iz kojeg bi onda jednostavno kao i prije iščitali koja je tražena praslika. Međutim, možemo krenuti računski:

$$x \in f^{-1}(\langle -\infty,-2\rangle) \iff f(x) \in \langle -\infty,-2\rangle \iff \frac{x^2+1}{x^2-1} < -2$$

U posljednjoj nejednakosti sada bismo najradije pomnožili obje strane s x^2-1. Međutim, tu je potreban oprez – znak nejednakosti možda će se promijeniti ovisno o tome je li $x^2-1<0$ ili $x^2-1>0$ (mogućnost $x^2-1=0$ odbačena je time što gledamo samo $x \in \mathcal{D}(f)$). Pogledajmo ta dva slučaja zasebno.

Promotrimo najprije one x za koje je $x^2-1<0$, a to su upravo $x \in \langle -1,1\rangle$. Za takve x množenje s x^2-1 uzrokovat će promjenu znaka nejednakosti pa je

$$\frac{x^2+1}{x^2-1} < -2 \iff x^2+1 > -2(x^2-1) \iff x^2 > \frac{1}{3} \iff x \in \left\langle -1,-\frac{1}{\sqrt{3}}\right\rangle \cup \left\langle \frac{1}{\sqrt{3}},1\right\rangle$$

Promotrimo sada još i one x za koje je $x^2-1>0$, odnosno $x \in \langle -\infty,-1\rangle \cup \langle 1,+\infty\rangle$. Za takve x množenje s x^2-1 neće promijeniti znak nejednakosti pa je

$$\frac{x^2+1}{x^2-1} < -2 \iff x^2+1 < -2(x^2-1) \iff x^2 < \frac{1}{3}.$$

Međutim, posljednja nejednakost je neostvariva za promatrane x. Naime, da bi bilo $x^2 < \frac{1}{3}$, trebali bi imati da je $x \in \langle -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \rangle$, što je nemoguće budući da promatramo samo one x iz $\langle -\infty, -1\rangle \cup \langle 1, +\infty\rangle$.

Dakle, $f^{-1}(\langle -\infty, -2\rangle) = \left\langle -1, -\frac{1}{\sqrt{3}} \right\rangle \cup \left\langle \frac{1}{\sqrt{3}}, 1 \right\rangle$.

Pokažimo i drugi način na koji smo mogli riješiti nejednadžbu $\frac{x^2+1}{x^2-1} < -2$ – pomoću **tablice predznaka**. Kod rješavanja nejednadžbi metodom tablice predznaka ideja je da promatranu nejednadžbu svedemo na neku kod koje trebamo ispitati kada je produkt nekih jednostavnijih članova manji ili veći od 0. Taj posao bi trebao biti lagan, budući da je predznak produkta određen predznacima faktora (na primjer, produkt dva pozitivna faktora i jednog negativnog uvijek će biti negativan).

U konkretnoj promatranoj nejednadžbi najprije dodamo 2 na obje strane, čime dobivamo da je ona ekvivalentna s

$$\frac{3x^2 - 1}{x^2 - 1} < 0.$$

Sada u tablicu unosimo kada će dva faktora koja imamo (tj. brojnik i nazivnik) biti pozitivni, a kada negativni. Na kraju za svaku kombinaciju lako iščitamo i hoće li cijeli razlomak biti pozitivan ili negativan.

x	$-\infty$		-1		$-\frac{1}{\sqrt{3}}$		$\frac{1}{\sqrt{3}}$		1		$+\infty$
$3x^2-1$		$+$		$+$	0	$-$	0	$+$		$+$	
x^2-1		$+$	0	$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$\frac{3x^2-1}{x^2-1}$		$+$	$\Vert$	$-$	0	$+$	0	$-$	$\Vert$	$+$	

Iz tablice predznaka ponovno je vidljivo da su traženi x u intervalu $\left\langle -1, -\frac{1}{\sqrt{3}} \right\rangle \cup \left\langle \frac{1}{\sqrt{3}}, 1 \right\rangle$. $\square$

Prije nego što nastavimo s uvođenjem ostalih elementarnih funkcija, navodimo još jedno bitno svojstvo koje posjeduju neke realne funkcije realne varijable.

DEFINICIJA 1.25. Neka je $f\colon A \to B$ realna funkcija realne varijable.

- Ako je $f(x_1) \leq f(x_2)$ za sve $x_1, x_2 \in A$ takve da je $x_1 < x_2$ kažemo da je f **rastuća** funkcija. Ako je $f(x_1) < f(x_2)$ za sve $x_1, x_2 \in A$ takve da je $x_1 < x_2$ kažemo da je f **strogo rastuća** funkcija.
- Ako je $f(x_1) \geq f(x_2)$ za sve $x_1, x_2 \in A$ takve da je $x_1 < x_2$ kažemo da je f **padajuća** funkcija. Ako je $f(x_1) > f(x_2)$ za sve $x_1, x_2 \in A$ takve da je $x_1 < x_2$ kažemo da je f **strogo padajuća** funkcija.

Za funkciju koja je rastuća ili padajuća kažemo da je **monotona** funkcija. Za funkciju koja je strogo rastuća ili strogo padajuća kažemo da je **strogo monotona**.

PRIMJER 1.26. Neka je $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ afina funkcija $f(x) = ax + b$, te neka su $x_1, x_2 \in \mathbf{R}$ proizvoljni elementi domene takvi da je $x_1 < x_2$. Tada je

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{(ax_2 + b) - (ax_1 + b)}{x_2 - x_1} = \frac{a(x_2 - x_1)}{x_2 - x_1} = a.$$

Sada vidimo da ako je $a > 0$ tada je i $\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} > 0$. Budući da je nazivnik prethodnog razlomka uvijek pozitivan (zbog $x_2 > x_1$), isto mora vrijediti i za brojnik pa su afine funkcije s $a > 0$ strogo rastuće.

Slično, ako je $a < 0$ tada je i $\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} < 0$. Budući da je nazivnik pozitivan, brojnik mora biti negativan pa su afine funkcije s $a < 0$ strogo padajuće.

Konačno, ako je $a = 0$ tada će se raditi o konstantnoj funkciji, a takve su i rastuće i padajuće (ali niti strogo rastuće niti strogo padajuće).

PRIMJER 1.27. Vratimo se još malo na funkciju $f\colon \mathbf{R} \setminus \{0\} \to \mathbf{R}$, $f(x) = \frac{1}{x}$ iz Zadatka 1.23. Uočimo da su uvjeti koje je potrebno ispuniti da bi funkcija bila monotona iznimno snažni – navedene nejednakosti trebaju vrijediti za *sve* x_1 i x_2 iz domene za koje je $x_1 < x_2$. To znači da bi dokazali da funkcija nije, na primjer, rastuća, dovoljno je pronaći *neke* x_1 i x_2 iz domene takve da je $x_1 < x_2$ i $f(x_1) > f(x_2)$.

Konkretno, kod funkcije $f(x) = \frac{1}{x}$, uočimo da je $1 = f(1) > f(2) = \frac{1}{2}$ pa budući da je $1 < 2$ slijedi da f nije rastuća. S druge strane, vrijedi da je $-1 = f(-1) < f(1) = 1$ pa budući da je $-1 < 1$ slijedi da f nije niti padajuća. Svojstvo funkcije f da nije niti rastuća niti padajuća (dakle, nije monotona) nije nipošto neobično – većina funkcija su takve.

Primijetimo da promatrana funkcija f, iako nije monotona, ima intervale na kojima jest. Na primjer, njena restrikcija $f|_{\langle -\infty,0\rangle}$ je strogo padajuća, a isto vrijedi i za restrikciju $f|_{\langle 0,\infty\rangle}$.

ZADATAK 1.28. Neka je $f\colon A \to B$ strogo rastuća funkcija. Dokažite da za sve $x_1, x_2 \in A$ vrijedi da je $x_1 \le x_2$ ako i samo ako je $f(x_1) \le f(x_2)$.

RJEŠENJE. Jedan smjer je očit: ako je $x_1 \le x_2$, tada je ili $x_1 = x_2$ i u tom slučaju je očito $f(x_1) = f(x_2)$, ili je $x_1 < x_2$ i u tom je slučaju $f(x_1) < f(x_2)$ jer je f strogo rastuća.

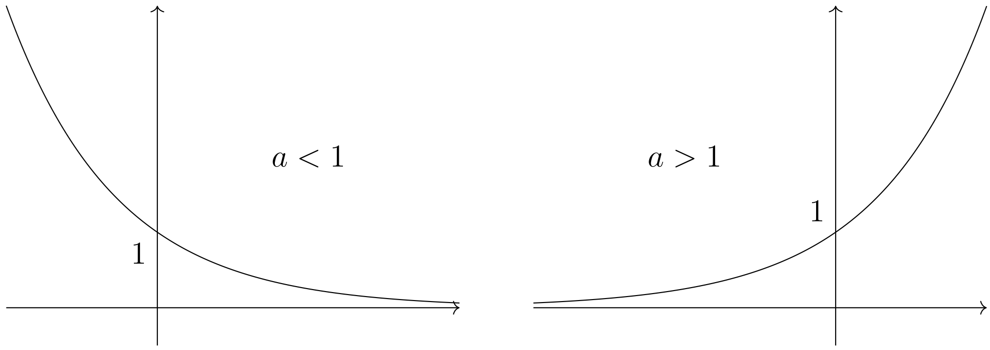
Dokažimo i drugi smjer. Pretpostavimo suprotno, tj. da drugi smjer ne vrijedi, odnosno da postoje neki $x_1, x_2 \in A$ takvi da je $f(x_1) \le f(x_2)$, ali $x_1 > x_2$. Iz potonjeg i činjenice da je f strogo rastuća, slijedi da je $f(x_1) > f(x_2)$, što je u kontradikciji s $f(x_1) \le f(x_2)$. $\square$

1.3. Eksponencijalne funkcije

DEFINICIJA 1.29. Neka je $a > 0$ i $a \neq 1$. Funkciju $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ s pravilom pridruživanja $f(x) = a^x$ nazivamo **eksponencijalnom funkcijom s bazom** a.

Prirodna domena eksponencijalne funkcije je, kao što i sama definicija sugerira, cijeli $\mathbf{R}$, a slika $\langle 0, +\infty\rangle$.

Razlikujemo dva osnovna režima kod eksponencijalne funkcije: ukoliko je $a < 1$ eksponencijalna funkcija je strogo padajuća, a ukoliko je $a > 1$ eksponencijalna funkcija je strogo rastuća.



Zadatak 1.30. Neka je $f(x) = (2+\sqrt{3})^{x^2-2x+1} + (2-\sqrt{3})^{x^2-2x-1}$. Odredite $f^{-1}\left(\left\{\frac{4}{2-\sqrt{3}}\right\}\right)$.

Rješenje. U situacijama poput ove u kojima nije eksplicitno navedeno koja je domena funkcije f, uzimamo da radimo na prirodnoj domeni koja je u ovom slučaju jednaka $\mathcal{D}(f) = \mathbf{R}$.

Trebamo odrediti sve $x \in \mathbf{R}$ takve da je $f(x) = \frac{4}{2-\sqrt{3}}$, odnosno

$$(2+\sqrt{3})^{x^2-2x+1} + (2-\sqrt{3})^{x^2-2x-1} = \frac{4}{2-\sqrt{3}}.$$

Ako pomnožimo obje strane s $(2-\sqrt{3})^{x^2-2x+1}$ dobivamo da je

$$1 + (2-\sqrt{3})^{2(x^2-2x)} = 4(2-\sqrt{3})^{x^2-2x}.$$

Ako označimo s $t = (2-\sqrt{3})^{x^2-2x}$, imamo

$$t^2 - 4t + 1 = 0,$$

pa rješavanjem kvadratne jednadžbe dobivamo rješenja $t = 2+\sqrt{3}$ i $t = 2-\sqrt{3}$. Analizirajmo svako od njih.

Rješenje $t = 2+\sqrt{3}$ povlači da je $(2-\sqrt{3})^{x^2-2x} = 2+\sqrt{3}$. Množenjem s $2-\sqrt{3}$ daje $(2-\sqrt{3})^{x^2-2x+1} = 1$. Otuda slijedi da je $x^2-2x+1 = 0$, a jedino rješenje te kvadratne jednadžbe je $x = 1$.

S druge strane, rješenje $t = 2-\sqrt{3}$ povlači da je $(2-\sqrt{3})^{x^2-2x} = 2-\sqrt{3}$, odakle slijedi da je $(2-\sqrt{3})^{x^2-2x-1} = 1$. Zaključujemo da je $x^2-2x-1 = 0$, a rješenja te jednadžbe su $x = 1+\sqrt{2}$ i $x = 1-\sqrt{2}$.

Dakle, $f^{-1}\left(\left\{\frac{4}{2-\sqrt{3}}\right\}\right) = \{1, 1+\sqrt{2}, 1-\sqrt{2}\}$. □

Zadatak 1.31 (za zadaću). Neka je $f(x) = 4^x + 2^{x+1} + 1$. Odredite $f^{-1}([0, +\infty\rangle)$.

Zadatak 1.32. Neka je $f(x) = 5^x - 5^{3-x}$. Odredite $f^{-1}(\langle -\infty, 20])$.

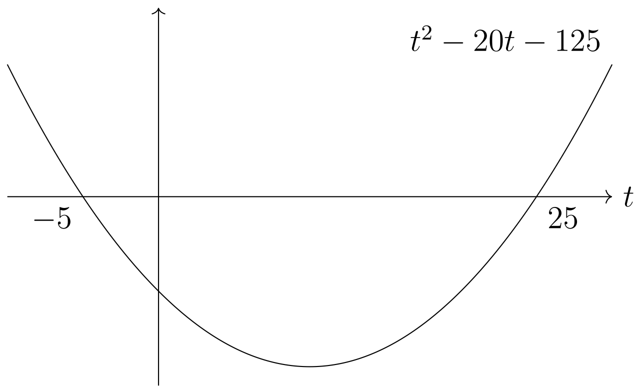
Rješenje. Iz definicije praslike funkcije znamo da je $f^{-1}(\langle -\infty, 20]) = \{x \in \mathcal{D}(f) : f(x) \in \langle -\infty, 20]\} = \{x \in \mathbf{R} : 5^x - 5^{3-x} \leq 20\}$. Za takve x je

$$5^x - \frac{125}{5^x} \leq 20.$$

Ako je $t = 5^x$, tada je $t - \frac{125}{t} \leq 20$, pa množenjem s t dobivamo da je (ne trebamo brinuti o mogućoj promjeni predznaka budući da je zbog $t = 5^x$ uvijek $t > 0$)

$$t^2 - 20t - 125 \leq 0. \tag{1.12}$$

Rješenja kvadratne jednadžbe $t^2 - 20t - 125 = 0$ su $t = -5$ i $t = 25$, pa su rješenja nejednadžbe (1.12) točno $t \in [-5, 25]$.



Preostaje, dakle, za odrediti sve x takve da je $5^x \in [-5, 25]$. Naravno, to se svodi na traženje svih x za koje $5^x \geq -5$ i $5^x \leq 25$. Prvi uvjet je ispunjen za sve $x$budući da je $5^x > 0$. Što se tiče drugog uvjeta, imamo $5^x \leq 5^2$, odnosno $x \leq 2$ (ovdje koristimo činjenicu da je funkcija 5^x strogo rastuća te Zadatak 1.28).

Zaključujemo da je $f^{-1}(\langle -\infty, 20]) = \langle -\infty, 2]$. □

1.4. Hiperbolne funkcije

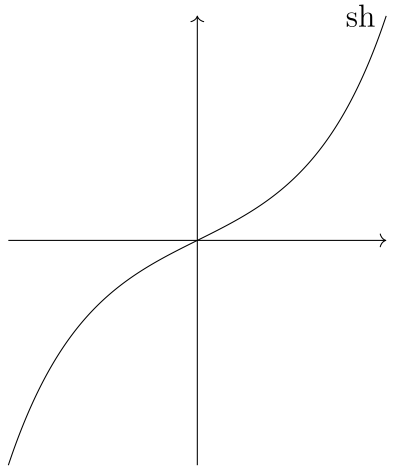
Definicija 1.33. Funkciju $\mathrm{sh}\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ s pravilom pridruživanja

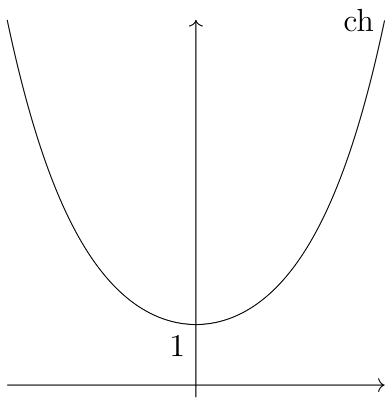
$$\mathrm{sh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

nazivamo **sinus hiperbolni**. Funkciju $\mathrm{ch}\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ s pravilom pridruživanja

$$\mathrm{ch}(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

nazivamo **kosinus hiperbolni**.





Kao što je vidljivo iz grafova, sh je strogo rastuća, dok je ch strogo padajuća na $\langle -\infty, 0]$, a strogo rastuća na $[0, +\infty\rangle$. Također, $\mathcal{R}(\mathrm{sh}) = \mathbf{R}$ i $\mathcal{R}(\mathrm{ch}) = [1, +\infty\rangle$.

Jednako kao što pomoću sinusa i kosinusa možemo definirati tangens i kotangens, tako i pomoću sinusa hiperbolnog i kosinusa hiperbolnog možemo definirati tangens hiperbolni i kotangens hiperbolni.

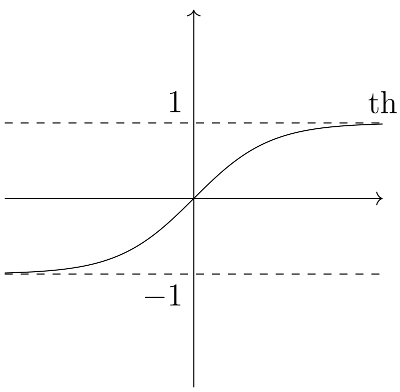
Definicija 1.34. Funkciju $\mathrm{th}\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ s pravilom pridruživanja

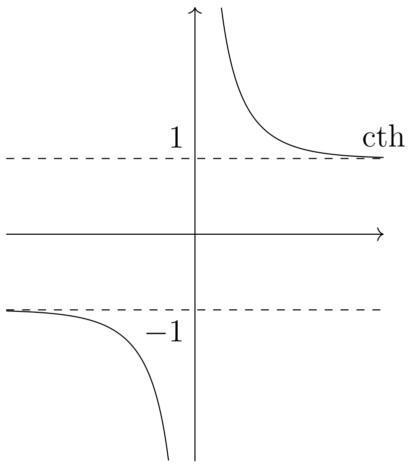
$$\mathrm{th}(x) = \frac{\mathrm{sh}\, x}{\mathrm{ch}\, x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

nazivamo **tangens hiperbolni**. Funkciju $\mathrm{cth}\colon \mathbf{R} \setminus \{0\} \to \mathbf{R}$ s pravilom pridruživanja

$$\mathrm{cth}(x) = \frac{\mathrm{ch}\, x}{\mathrm{sh}\, x} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$$

nazivamo **kotangens hiperbolni**.





Primjetimo da smo za domene funkcija th i cth odabrali prirodne domene, koristeći da je $\mathrm{sh}^{-1}(\{0\}) = \{0\}$ i $\mathrm{ch}^{-1}(\{0\}) = \emptyset$.

Funkcija th je strogo rastuća, dok je cth strogo padajuća na $\langle -\infty, 0\rangle$ i $\langle 0, +\infty\rangle$ (ali ne i na cijelom $\mathbf{R} \setminus \{0\}$). Iz grafa je jasno da je $\mathcal{R}(\mathrm{th}) = \langle -1, 1\rangle$ i $\mathcal{R}(\mathrm{cth}) = \langle -\infty, -1\rangle \cup \langle 1, +\infty\rangle$.

Kroz ovaj ćemo se kolegij na nekoliko mjesta susresti s opravdanjima za korištenje *trigonometrijskih* termina pri imenovanju hiperbolnih funkcija. Konkretno, mnoge formule koje vrijede za trigonometrijske funkcije u istom ili samo malo izmijenjenom obliku vrijede i za hiperbolne funkcije. Na primjer, formule u sljedećem zadatku usporedite s adicijskim formulama za trigonometrijske funkcije.

Zadatak 1.35. Dokažite formule:

(a) $\mathrm{sh}(x + y) = \mathrm{sh}\, x\, \mathrm{ch}\, y + \mathrm{ch}\, x\, \mathrm{sh}\, y$,

(b) (za zadaću) $\mathrm{ch}(x + y) = \mathrm{ch}\, x\, \mathrm{ch}\, y + \mathrm{sh}\, x\, \mathrm{sh}\, y$.

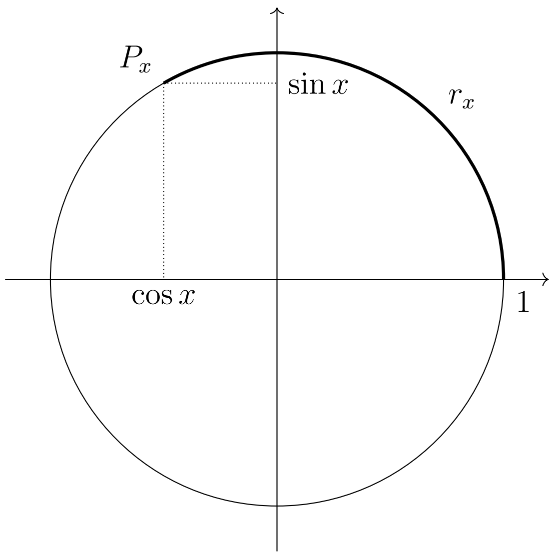
Rješenje. (a)

$$\begin{aligned}\mathrm{sh}\, x\, \mathrm{ch}\, y + \mathrm{ch}\, x\, \mathrm{sh}\, y &= \frac{e^x - e^{-x}}{2}\frac{e^y + e^{-y}}{2} + \frac{e^x + e^{-x}}{2}\frac{e^y - e^{-y}}{2} \\ &= \frac{e^{x+y} + e^{x-y} - e^{-x+y} - e^{-x-y} + e^{x+y} - e^{x-y} + e^{-x+y} - e^{-x-y}}{4} \\ &= \frac{e^{x+y} - e^{-(x+y)}}{2} = \mathrm{sh}(x + y)\end{aligned}$$

□

1.5. Trigonometrijske funkcije

Definicija 1.36. Za proizvoljni $x \in \mathbf{R}$ neka je $r_x \in [0, 2\pi\rangle$ takav da je $x = r_x + 2k\pi$ za neki $k \in \mathbf{Z}$,[6] te neka je P_x točka na jediničnoj kružnici[7] takva da je duljina luka koji povezuje točku $(1,0)$ s P_x (u smjeru obrnutom od smjera kazaljke na satu) jednaka r_x. Funkcije **kosinus** i **sinus** $\cos, \sin\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ definiramo redom kao apscisu i ordinatu točke P_x.

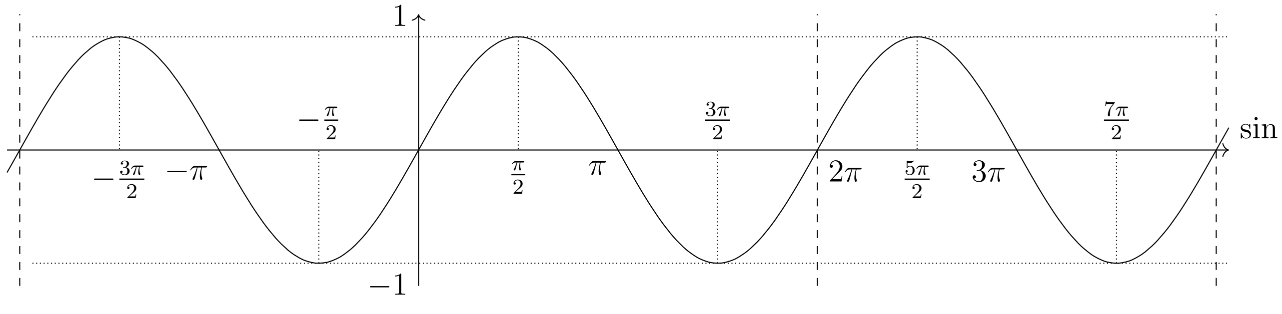


Važno svojstvo koje funkcije sinusa i kosinusa posjeduju je svojstvo periodičnosti.

Definicija 1.37. Neka je $f\colon A \to B$ neka funkcija realne varijable i $\tau > 0$. Za f ćemo reći da je **periodična s periodom** τ ako za svaki $x \in A$ vrijedi da je $x + \tau \in A$ i $f(x+\tau) = f(x)$.

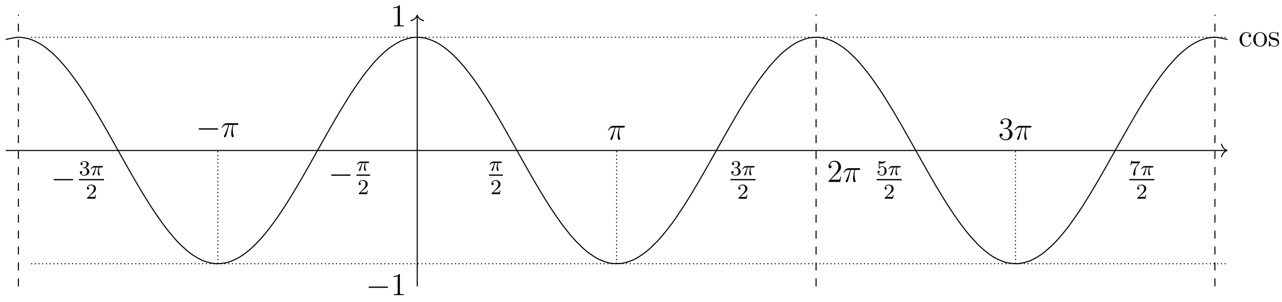
Ako postoji najmanji takav period τ_0, tada ćemo τ_0 zvati **temeljnim periodom** funkcije f.

Iz definicije sinusa i kosinusa jasno je da se radi o periodičnim funkcijama s temeljnim periodom 2π, te da je $\mathcal{R}(\sin) = \mathcal{R}(\cos) = [-1, 1]$. Sve ove tvrdnje jasno su vidljive i iz pripadnih grafova.



[6] Drugim riječima, od broja x oduzimamo ili dodajemo 2π (ovisno o tome je li x pozitivan ili negativan) sve dok ne dobijemo neki broj iz $[0, 2\pi\rangle$ – taj broj je upravo r_x.

[7] Jedinična kružnica je kružnica u Kartezijevoj koordinatnoj ravnini sa središtem u ishodištu i radijusom 1.



Definicija 1.38. Funkciju $\operatorname{tg}\colon \mathbf{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbf{Z}\} \to \mathbf{R}$ s pravilom pridruživanja $\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$ nazivamo **tangensom**. Funkciju $\operatorname{ctg}\colon \mathbf{R} \setminus \{k\pi : k \in \mathbf{Z}\} \to \mathbf{R}$ s pravilom pridruživanja $\operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\sin x}$ nazivamo **kotangensom**.

Uočimo da je domena tangensa u biti prirodna domena izraza $\frac{\sin x}{\cos x}$ budući da je $\{x \in \mathbf{R} : \cos x = 0\} = \{\frac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbf{Z}\}$. Slično, domena kotangensa u biti je prirodna domena izraza $\frac{\cos x}{\sin x}$ budući da je $\{x \in \mathbf{R} : \sin x = 0\} = \{k\pi : k \in \mathbf{Z}\}$.

Zadatak 1.39. Dokažite da je tangens periodična funkcija s temeljnim periodom π.

Rješenje. Koristeći adicijske formule sinusa i kosinusa za svaki $x \in \mathbf{R}$ dobivamo

$$\operatorname{tg}(x+\pi) = \frac{\sin(x+\pi)}{\cos(x+\pi)} = \frac{\sin x \cos \pi + \cos x \sin \pi}{\cos x \cos \pi - \sin x \sin \pi} = \frac{-\sin x}{-\cos x} = \operatorname{tg} x.$$

Ovime smo dokazali da je π jedan period tangensa. Preostaje za dokazati da je to *temeljni* period.

Dokažimo najprije da je tangens strogo rastuća funkcija na $[0, \frac{\pi}{2}\rangle$. Ako su $x_1, x_2 \in [0, \frac{\pi}{2}\rangle$ takvi da je $x_1 < x_2$, tada je iz definicije sinusa i kosinusa očito $\sin x_1 < \sin x_2$ i $\cos x_1 > \cos x_2$. Zbog toga imamo

$$\operatorname{tg} x_1 = \frac{\sin x_1}{\cos x_1} < \frac{\sin x_1}{\cos x_2} < \frac{\sin x_2}{\cos x_2} = \operatorname{tg} x_2.$$

Uočimo sada da iz jednakosti $\sin(-x) = -\sin x$ i $\cos(-x) = \cos x$ slijedi da je $\operatorname{tg}(-x) = -\operatorname{tg} x$. Iz toga te upravo dokazane činjenice da je tangens strogo rastući na $[0, \frac{\pi}{2}\rangle$, slijedi da je tangens strogo rastući i na $\langle -\frac{\pi}{2}, 0]$. Doista, neka su $x_1, x_2 \in \langle -\frac{\pi}{2}, 0]$ takvi da je $x_1 < x_2$. Tada je $-x_1, -x_2 \in [0, \frac{\pi}{2}\rangle$ i $-x_2 < -x_1$ pa slijedi da je $-\operatorname{tg} x_2 = \operatorname{tg}(-x_2) < \operatorname{tg}(-x_1) = -\operatorname{tg} x_1$, odnosno $\operatorname{tg} x_1 < \operatorname{tg} x_2$.

Iz upravo dokazanih činjenica da je tangens strogo rastući na $\langle -\frac{\pi}{2}, 0]$ i na $[0, \frac{\pi}{2}\rangle$, slijedi da je strogo rastući i na $\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\rangle$. Doista, neka su $x_1, x_2 \in \langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\rangle$ takvi da je $x_1 < x_2$. Ako je $x_1, x_2 \in \langle -\frac{\pi}{2}, 0]$ ili $x_1, x_2 \in [0, \frac{\pi}{2}\rangle$, tada već znamo da je $\operatorname{tg} x_1 < \operatorname{tg} x_2$. Jedina preostala mogućnost je da je $x_1 \in \langle -\frac{\pi}{2}, 0\rangle$ i $x_2 \in [0, \frac{\pi}{2}\rangle$, a u tom je slučaju

$$\operatorname{tg} x_1 < \operatorname{tg} 0 \leq \operatorname{tg} x_2.$$

Pretpostavimo sada da funkcija tangens ima period $\tau > 0$ manji od π. Tada postoji $x \in \langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\rangle$ takav da je i $x + \tau \in \langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\rangle$. Zbog periodičnosti vrijedi da je $\operatorname{tg} x = \operatorname{tg}(x+\tau)$. Međutim, posljednja jednakost je u kontradikciji s dokazanom činjenicom da je tangens strogo rastući na $\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\rangle$.

Da je π temeljni period tangensa mogli smo dokazati i na drugi način. Neka je $\tau > 0$ proizvoljan period tangensa. Tada je

$$\operatorname{tg}(x+\tau) = \operatorname{tg} x \quad \text{za sve } x \in \mathbf{R} \setminus \{\tfrac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbf{Z}\}.$$

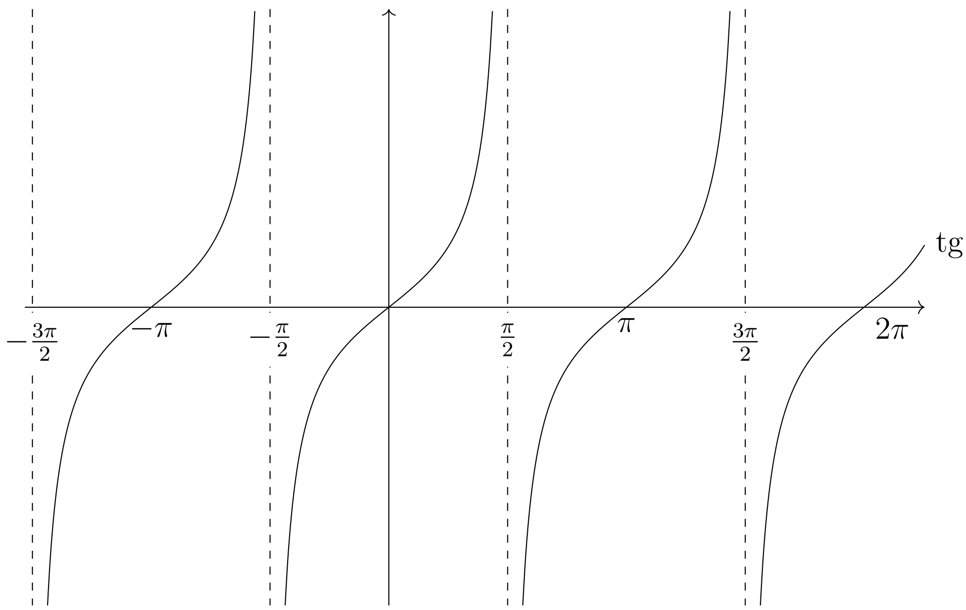
Iz toga slijedi da je

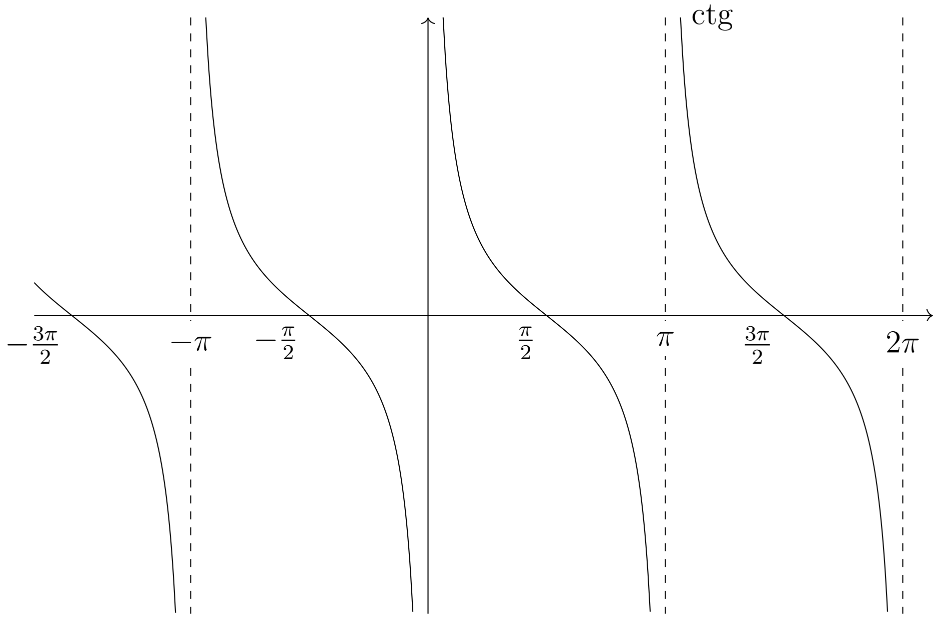
$$\sin(x+\tau)\cos x - \sin x \cos(x+\tau) = 0 \quad \text{za sve } \in \mathbf{R} \setminus \{\tfrac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbf{Z}\}.$$

Međutim, lijeva strana je točno ono što nam adicijska formula daje za $\sin((x+\tau)-x)$. Zaključujemo da je $\sin\tau = 0$, pa budući da je $\tau > 0$ slijedi da je $\tau \in \{k\pi : k \in \mathbf{N}\}$. Sada je očito da je $\tau = \pi$ temeljni period. $\square$

Naravno, na sličan način kao u prethodnom zadatku može se pokazati da je i kotangens periodična funkcija s temeljnim periodom π.

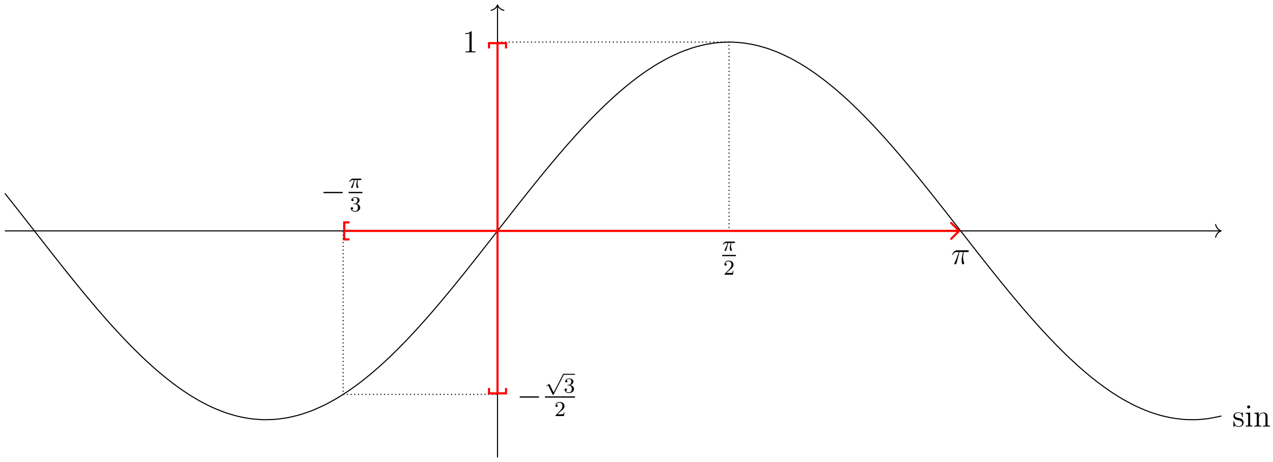
Periodičnost tangensa i kotangensa jasno je vidljiva i na njihovim grafovima iz kojih iščitavamo i da je $\mathcal{R}(\operatorname{tg}) = \mathcal{R}(\operatorname{ctg}) = \mathbf{R}$.





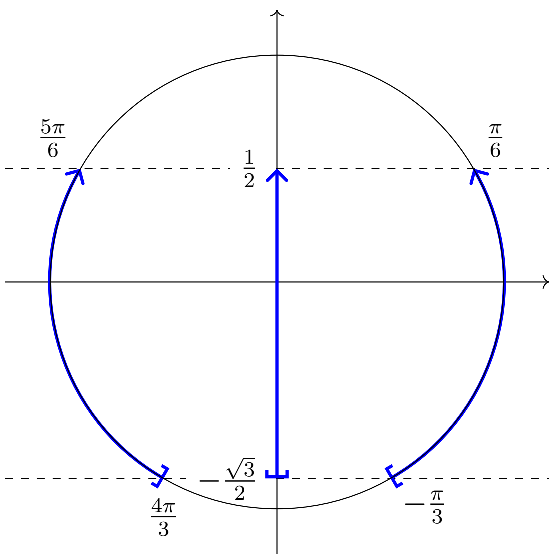
ZADATAK 1.40. Odredite $\sin([-\frac{\pi}{3},\pi\rangle)$ i $\sin^{-1}([-\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2}\rangle)$.

RJEŠENJE. Iz grafa funkcije lako iščitavamo da je $\sin([-\frac{\pi}{3},\pi\rangle) = [-\frac{\sqrt{3}}{2},1]$.



Sada prelazimo na određivanje praslike $\sin^{-1}([-\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2}\rangle)$. Budući da je funkcija sin periodična s periodom 2π, dovoljno je koncentrirati se na neki interval duljine 2π, na primjer $[-\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\rangle$, te odrediti sve x iz tog intervala za koje je $\sin x \in [-\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2}\rangle$. Jednom kada to napravimo, zahvaljujući periodičnosti funkcije sin traženu prasliku lako dobivamo. Naime, jednako kao što translacijama promatranog intervala $[-\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\rangle$ za cjelobrojne višekratnike od njegove duljine (tj. za $2k\pi$ uz $k \in \mathbf{Z}$) dobivamo cijeli $\mathbf{R}$, tako i translacijama dobivenih x-eva iz $[-\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\rangle$ za $2k\pi$ dobivamo cijelu prasliku.[8]

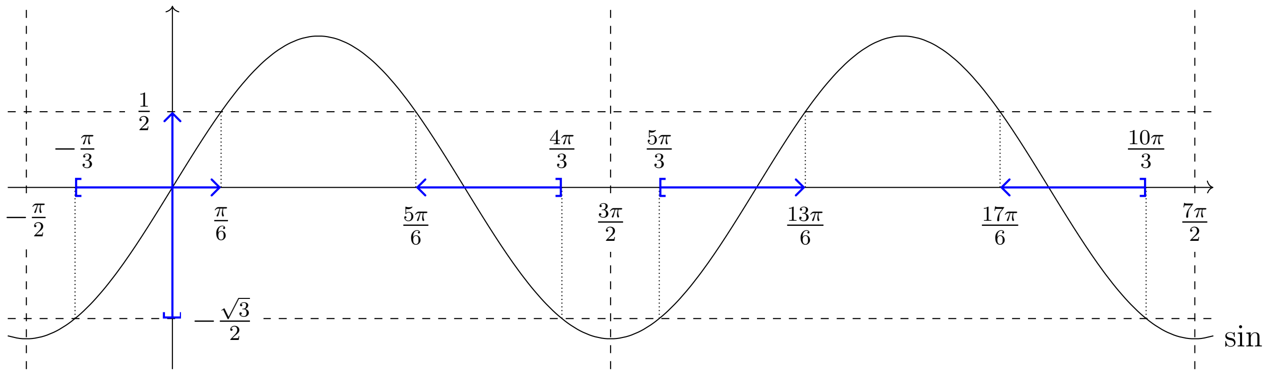
Promatrajući brojevnu kružnicu lako vidimo da je traženi skup $\{x \in [-\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\rangle : \sin x \in [-\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2}\rangle\}$ jednak $[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{6}\rangle \cup \langle\frac{5\pi}{6},\frac{4\pi}{3}]$.



[8]Uočite da je u ovoj raspravi bilo nebitno je li 2π temeljni period. Na primjer, mogli smo i koristiti činjenicu da je i 6π period funkcije sin te ponovno prvo riješiti problem na nekom intervalu duljine 6π, na primjer $[\pi,7\pi\rangle$ te potom dobiveni skup translatirati za sve $6k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$ kako bi dobili cijelu prasliku. Međutim, na ovaj način bi si značajno otežali posao – sigurno da je lakše pronaći sve tražene x-eve iz intervala duljine 2π nego iz duljeg intervala duljine 6π.

Najavljenom translacijom za $2k\pi$ dobivamo da je

$$\sin^{-1}([-\tfrac{\sqrt{3}}{2},\tfrac{1}{2}\rangle) = \bigcup_{k\in\mathbf{Z}} \left(\left[-\frac{\pi}{3}+2k\pi, \frac{\pi}{6}+2k\pi\right\rangle \cup \left\langle \frac{5\pi}{6}+2k\pi, \frac{4\pi}{3}+2k\pi\right]\right).$$



□

Zadatak 1.41. Odredite temeljni period funkcije $f(x) = \sin^2 x$.

Rješenje. Pretpostavimo da je $\tau > 0$ neki period funkcije f. Tada je

$$\sin^2(x+\tau) = \sin^2 x \quad \text{za sve } x \in \mathbf{R},$$

pa koristeći formulu za kosinus dvostrukog kuta dobivamo

$$\frac{1-\cos(2x+2\tau)}{2} = \frac{1-\cos 2x}{2} \quad \text{za sve } x \in \mathbf{R}.$$

Pretvaranjem razlike $\cos(2x+2\tau) - \cos 2x$ u produkt slijedi da je

$$-2\sin\frac{(2x+2\tau)+2x}{2}\sin\frac{(2x+2\tau)-2x}{2} = 0 \quad \text{za sve } x \in \mathbf{R},$$

odnosno

$$\sin(2x+\tau)\sin\tau = 0 \quad \text{za sve } x \in \mathbf{R}. \tag{1.13}$$

Budući da posljednja jednakost vrijedi za sve $x \in \mathbf{R}$, vrijedit će i za $x = \frac{\pi}{4} - \frac{\tau}{2}$.[9] Iz (1.13) sada slijedi da je $\sin\tau = 0$, a budući da je $\tau > 0$ zaključujemo da je $\tau \in \{k\pi : k \in \mathbf{N}\}$.

Dakle, svi periodi funkcije f nužno su sadržani u skupu $\{k\pi : k \in \mathbf{N}\}$.[10] To znači da temeljni period funkcije f nikako ne može biti manji od π. Da je doista jednak π slijedi jednostavnom provjerom:

$$f(x+\pi) = (\sin(x+\pi))^2 = (-\sin x)^2 = \sin^2 x = f(x).$$

□

Zadatak 1.42. Dokažite da funkcija $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ zadana s $f(x) = x\cos x$ nije periodična.

[9] Jedino što je bitno kod ovakvog x je da je za njega $\sin(2x+\tau) \neq 0$ – bilo koji drugi x s istim svojstvim bi isto bio korektan izbor.

[10] Treba paziti – ovime *nismo* dokazali da su svi elementi tog skupa periodi, već samo da se svaki period nalazi u tom skupu. Drugim riječima, dokazali smo da je skup perioda funkcije f *podskup* skupa $\{k\pi : k \in \mathbf{N}\}$. Da je skup perioda funkcije f doista *jednak* tom skupu slijedit će tek iz činjenice da je τ temeljni period.

RJEŠENJE. Pretpostavimo suprotno, tj. da f ima neki period $\tau > 0$. Tada je

$$(x+\tau)\cos(x+\tau) = x\cos x \quad \text{za sve } x \in \mathbf{R}. \tag{1.14}$$

Posebno, uzevši $x = 0$ slijedi da je $\tau\cos\tau = 0$, pa zbog $\tau > 0$ onda je i $\cos\tau = 0$. Zaključujemo da je $\tau = \frac{\pi}{2} + k\pi$ za neki $k \in \mathbf{N} \cup \{0\}$. Uvrštavanjem natrag u (1.14) dobivamo da je

$$(x + \tfrac{\pi}{2} + k\pi)\cos(x + \tfrac{\pi}{2} + k\pi) = x\cos x \quad \text{za sve } x \in \mathbf{R}.$$

Posebno, uzevši $x = \frac{\pi}{2}$ dobivamo da je $(k+1)\pi\cos((k+1)\pi) = 0$, odnosno $\cos((k+1)\pi) = 0$. Međutim, ovime smo dobili kontradikciju budući da je za svaki $k \in \mathbf{Z}$ vrijednost $\cos((k+1)\pi)$ uvijek jednaka 1 ili -1.

□

ZADATAK 1.43. Pronađite neku nekonstantnu periodičnu funkciju $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ koja nema temeljni period.

RJEŠENJE. Neka je

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{ako je } x \in \mathbf{Q} \\ 0 & \text{ako je } x \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}. \end{cases}$$

Pokažimo da je $\tau > 0$ period ovako definirane funkcije f ako i samo ako je $\tau \in \mathbf{Q}$. Jedan smjer slijedi iz činjenice da je 0 racionalan broj, a τ period:

$$1 = f(0) = f(0+\tau) = f(\tau),$$

pa je $\tau \in \mathbf{Q}$. Preostaje za dokazati i drugi smjer, odnosno da je svaki racionalni $\tau > 0$ period od f. Neka je $x \in \mathbf{R}$ proizvoljan. Ako je $x \in \mathbf{Q}$, tada je $x + \tau$ suma dva racionalna broja pa je $x + \tau \in \mathbf{Q}$, odnosno $f(x+\tau) = f(x) = 1$. S druge strane, ako je $x \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$ tada mora biti i $x + \tau \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$ – u suprotnom bi imali da je $x = (x+\tau) - \tau$ razlika dva racionalna broja pa bi i sam bio racionalan. Zaključujemo, dakle, da je za $x \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$ nužno $f(x+\tau) = f(x) = 0$.

Budući da ne postoji najmanji pozitivan racionalan broj, zaključujemo da funkcija f nema najmanji period, iako je periodična. □

Adicijske formule i formule pretvorbe. Koristeći elementarne geometrijske relacije u srednjoj školi se dokaže da vrijede sljedeći identiteti

$$\sin(x \pm y) = \sin x\cos y \pm \cos x\sin y$$
$$\cos(x \pm y) = \cos x\cos y \mp \sin x\sin y.$$

U nastavku navodimo tehniku kojom se gore navedene formule brzo izvedu pomoću trigonometrijskog i eksponencijalnog zapisa kompleksnih brojeva. Raspis u nastavku nije dokaz adicijskih formula (jer ćemo koristiti identitet koji slijedi iz adicijskih formula) nego način za njihovo pamćenje i brzo izvođenje.

Definiramo $e^{ix} := \cos x + i\sin x$. Kako za eksponencijalnu funkciju i realne brojeve a i b vrijedi $e^a \cdot e^b = e^{a+b}$, očekujemo da ista formula vrijedi i kad su a i b imaginarni brojevi, tj. očekujemo da vrijedi jednakost $e^{ix} \cdot e^{iy} = e^{i(x+y)}$. Taj identitet zapravo slijedi iz adicijskih formula, ali ako upamtimo da on vrijedi, iz njega lako možemo rekonstruirati adicijske formule. Naime, iz definicije i tog identiteta slijedi

$$\begin{aligned}\cos(x+y)+i\sin(x+y) &= e^{i(x+y)}\\ &= e^{ix}\cdot e^{iy}\\ &= (\cos x+i\sin x)\cdot(\cos y+i\sin y)\\ &= \cos x\cos y-\sin x\sin y+i(\sin x\cos y+\cos x\sin y).\end{aligned}$$

Iz jednakosti realnih i imaginarnih dijelova dobivamo adicijske formule za zbroj, dok identitet za razliku slijedi iz identiteta za zbroj korištenjem neparnosti funkcije sin i parnosti funkcije cos. Više o definiciji eksponencijalne funkcije kompleksnog broja bit će na kolegiju iz kompleksne analize.

Zadatak 1.44. Koristeći adicijske formule za sinus i kosinus dokažite

(a)
$$\operatorname{tg}(x\pm y)=\frac{\operatorname{tg}x\pm\operatorname{tg}y}{1\mp\operatorname{tg}x\operatorname{tg}y}$$

(b)
$$\operatorname{ctg}(x\pm y)=\frac{\operatorname{ctg}x\operatorname{ctg}y\mp 1}{\operatorname{ctg}y\pm\operatorname{ctg}x}$$

Koristeći adicijske formule lako se izvedu i formule pretvorbe sume u produkt i produkta u sumu za trigonometrijske funkcije.

Zadatak 1.45. Koristeći adicijske formule za trigonometrijske funkcije dokažite sljedeće identitete.

(a)
$$\cos x\cos y=\frac{\cos(x-y)+\cos(x+y)}{2}$$

(b)
$$\sin x\sin y=\frac{\cos(x-y)-\cos(x+y)}{2}$$

(c)
$$\sin x\cos y=\frac{\sin(x+y)+\sin(x-y)}{2}$$

(d)
$$\operatorname{tg}x\operatorname{tg}y=\frac{\cos(x-y)-\cos(x+y)}{\cos(x-y)+\cos(x+y)}$$

Zadatak 1.46. Koristeći adicijske formule za trigonometrijske funkcije dokažite sljedeće identitete.

(a)
$$\sin x\pm\sin y=2\sin\left(\frac{x\pm y}{2}\right)\cos\left(\frac{x\mp y}{2}\right)$$

(b)
$$\cos x+\cos y=2\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right)$$

(c)
$$\cos x - \cos y = -2 \sin\left(\frac{x+y}{2}\right) \sin\left(\frac{x-y}{2}\right)$$

(c)
$$\operatorname{tg} x \pm \operatorname{tg} y = \frac{\sin(x \pm y)}{\cos x \cos y}$$

RJEŠENJE. Dokazat ćemo formulu za zbroj u (a) podzadatku, a ostale formule se dokazuju analogno. Označimo li $u = \frac{x+y}{2}$ i $v = \frac{x-y}{2}$, vrijedi $x = u + v$ i $y = u - v$. Iz adicijskih formula slijedi

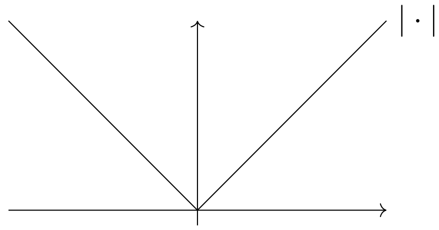
$$\begin{aligned}
\sin x + \sin y &= \sin(u+v) + \sin(u-v) \\
&= \sin u \cos v + \cos u \sin v + \sin u \cos v - \cos u \sin v \\
&= 2 \sin u \cos v \\
&= 2 \sin\left(\frac{x+y}{2}\right) \cos\left(\frac{x-y}{2}\right)
\end{aligned}$$

□

1.6. Apsolutna vrijednost

DEFINICIJA 1.47. Apsolutna vrijednost $|\cdot|\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ je funkcija s pravilom pridruživanja

$$|x| = \begin{cases} x & \text{za } x \geq 0 \\ -x & \text{za } x < 0. \end{cases}$$



PRIMJER 1.48. Apsolutnu vrijednost možemo interpretirati i geometrijski – ako su $x, y \in \mathbf{R}$, tada je udaljenost između x i y jednaka $|x-y|$. U nekim situacijama geometrijska interpretacija nam može pomoći u brzom pronalaženju odgovora.

Na primjer, pretpostavimo da nas zanima za koje $x \in \mathbf{R}$ vrijedi da je $|x-2| = |10-x|$. Geometrijski, to pitanje se svodi na pronalazak $x \in \mathbf{R}$ za koji/koje vrijedi da su jednako udaljeni od 2 i 10. Naravno, samo je jedan takav x – onaj koji se nalazi na pola puta od 2 do 10. Dakle, $x = 6$.

Slično, ako nas zanima za koje $x \in \mathbf{R}$ vrijedi da je $|2-x| \geq 3$, tada se geometrijski možemo pitati za koje $x \in \mathbf{R}$ vrijedi da su od 2 udaljeni barem za 3. Naravno, odgovor su svi $x \in \langle \infty, -1] \cup [5, +\infty\rangle$.

ZADATAK 1.49. Skicirajte graf funkcije f i odredite $f(\langle -2, 2\rangle)$ i $f^{-1}(\langle 1, 2])$ ako je:

(a) $f(x) = |x| - |x-1|$,

(b) $f(x) = |x + |x + |x - 1|||$.

Rješenje. (a) Ideja je da se razdvajanjem na slučajeve riješimo apsolutnih vrijednosti.

Ako je $x \geq 0$, tada je $|x| = x$ pa je $f(x) = x - |x - 1|$. Nadalje, ako je $x \geq 1$, tada je i $x - 1 \geq 0$ pa je $|x - 1| = x - 1$. Zaključujemo da za sve x takve da je $x \geq 0$ i $x \geq 1$ vrijedi da je $f(x) = x - (x - 1) = 1$. S druge strane, ako je $x < 1$, tada je $|x - 1| = -(x - 1)$, pa slijedi da za x za koje je $x \geq 0$ i $x < 1$ vrijedi da je $f(x) = x + (x - 1) = 2x - 1$.

Preostaje za analizirati $x < 0$. Za njih je $|x| = -x$. Nadalje, ako je $x < 0$, tada je i $x - 1 < 0$, pa je $|x - 1| = -(x - 1)$. Zaključujemo da je $f(x) = -x + x - 1 = -1$.

$$\begin{array}{c} x \in \mathbf{R} \\ f(x) = |x| - |x - 1| \end{array}$$

$$\swarrow \qquad \searrow$$

$$\begin{array}{c} x \in [0, +\infty\rangle \\ f(x) = x - |x - 1| \end{array} \qquad \begin{array}{c} x \in \langle -\infty, 0\rangle \\ f(x) = -1 \end{array}$$

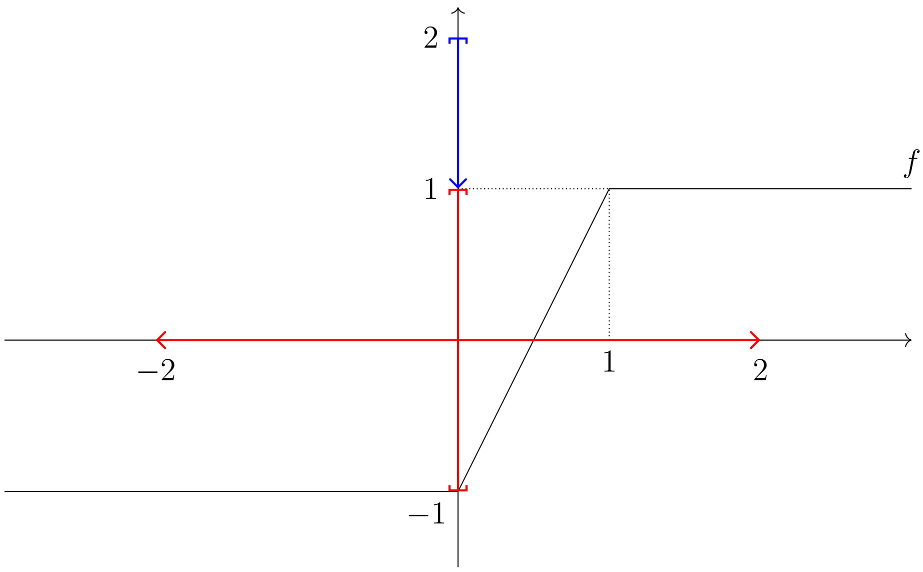
$$\swarrow \qquad \searrow$$

$$\begin{array}{c} x \in [1, +\infty\rangle \\ f(x) = 1 \end{array} \qquad \begin{array}{c} x \in [0, 1\rangle \\ f(x) = 2x - 1 \end{array}$$

Funkciju f sada možemo zapisati bez apsolutnih vrijednosti na način:

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{za } x \in \langle -\infty, 0\rangle \\ 2x - 1 & \text{za } x \in [0, 1\rangle \\ 1 & \text{za } x \in [1, +\infty\rangle. \end{cases}$$

Iz prethodnog lako skiciramo graf funkcije f:



Iščitavamo da je $f(\langle -2, 2\rangle) = [-1, 1]$ i $f^{-1}(\langle 1, 2]) = \emptyset$.

(b) Ponovno se želimo riješiti apsolutnih vrijednosti. Ako je $x \geq 1$, tada je $|x-1| = x-1$ pa je $f(x) = |x + |x + x - 1|| = |x + |2x - 1||$. Međutim, ako je $x \geq 1$, tada je $x \geq \frac{1}{2}$, pa je $|2x-1| = 2x-1$ odnosno $f(x) = |x + |x + x - 1|| = |x + 2x - 1| = |3x - 1|$. Također, iz $x \geq 1$ slijedi i da je $x \geq \frac{1}{3}$ pa je $|3x-1| = 3x-1$, odnosno $f(x) = 3x - 1$.

Preostaje još analizirati slučaj $x < 1$. Za takve x je $|x-1| = -(x-1)$, pa je $f(x) = |x + |x - (x-1)|| = |x+1|$. Ako je $x \geq -1$, tada je $|x+1| = x+1$, pa je $f(x) = x + 1$. S druge strane ako je $x < -1$, tada je $|x+1| = -(x+1)$ pa je $f(x) = -x - 1$.

$x \in \mathbf{R}$
$f(x) = |x + |x + |x-1|||$

$x \in [1, +\infty\rangle$
$f(x) = 3x - 1$

$x \in \langle -\infty, 1\rangle$
$f(x) = |x+1|$

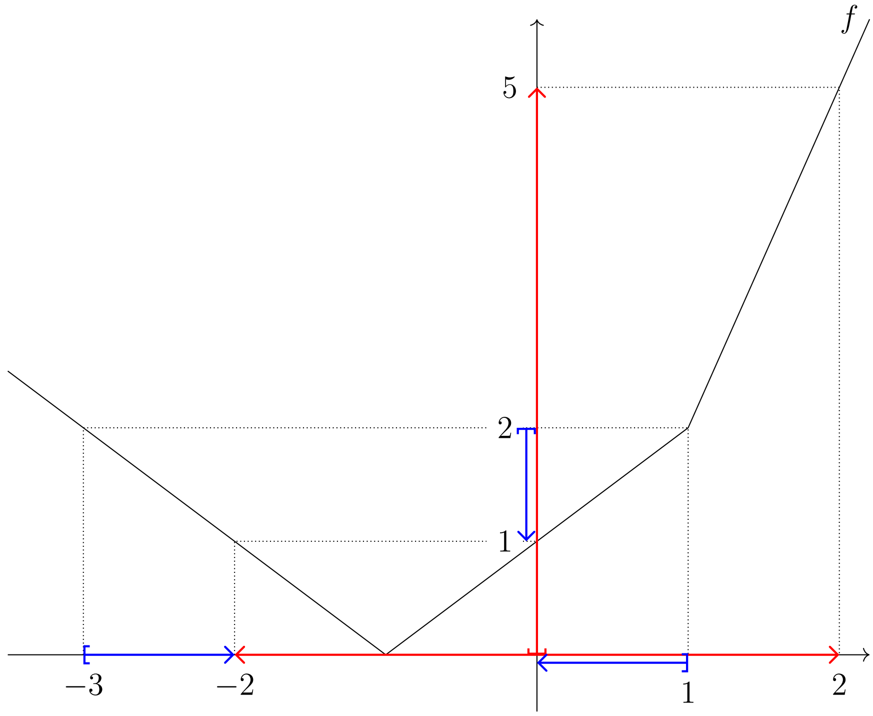
$x \in \langle -\infty, -1\rangle$
$f(x) = -x - 1$

$x \in [-1, 1\rangle$
$f(x) = x + 1$

Funkciju f, dakle, možemo zapisati bez apsolutnih vrijednosti na način:

$$f(x) = \begin{cases} -x-1 & \text{za } x \in \langle -\infty, -1\rangle \\ x+1 & \text{za } x \in [-1, 1\rangle \\ 3x-1 & \text{za } x \in [1, +\infty\rangle. \end{cases}$$

Graf funkcije f sada lako skiciramo:



Iz grafa iščitavamo da je $f(\langle -2, 2\rangle) = [0, 5\rangle$ i $f^{-1}(\langle 1, 2]) = [-3, -2\rangle \cup \langle 0, 1]$.

□

Zadatak 1.50. Neka je $f(x) = |x^2+6x+8|-|x^2+4x+3|$. Odredite $f(\langle -2,0\rangle)$ i $f^{-1}([1,2\rangle)$.

Rješenje. Kako bi se riješili apsolutnih vrijednosti, razdvajamo na slučajeve ovisno o predznacima polinoma x^2+6x+8 i x^2+4x+3. Nultočke[11] prvog od njih su -2 i -4, a drugog -3 i -1. Pripadne predznake navodimo u tablici:

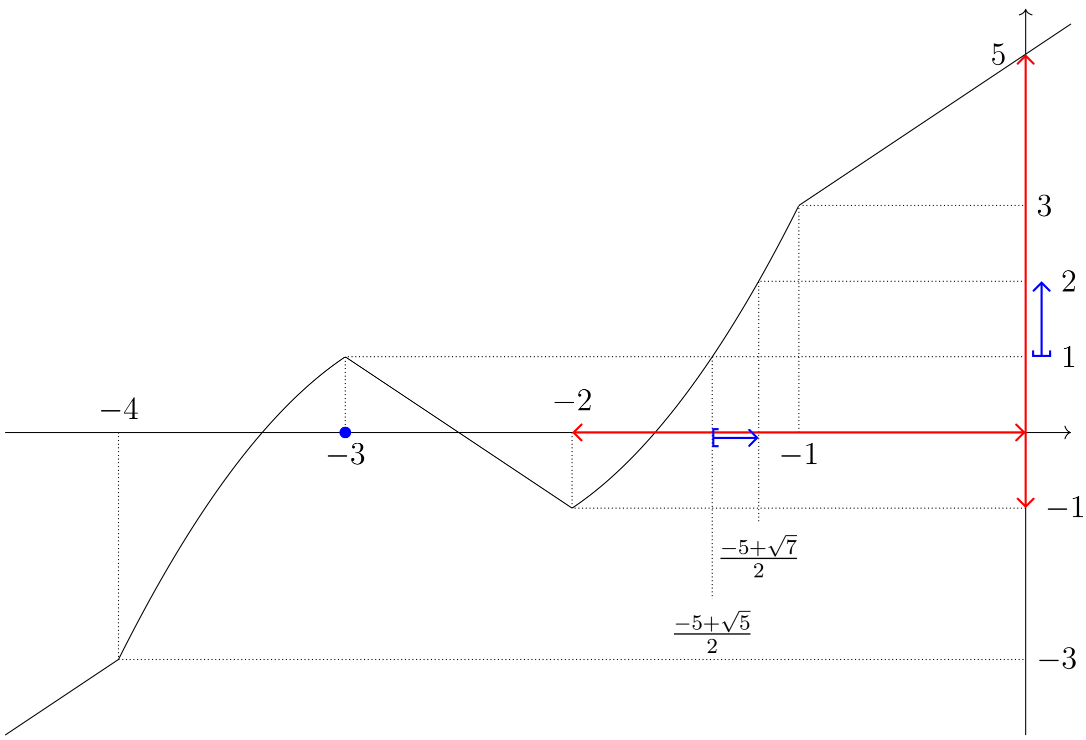
x	$-\infty$		-4		-3		-2		-1		$+\infty$
x^2+6x+8		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$		$+$	
x^2+4x+3		$+$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	

Iz ove tablice sada je jednostavno odrediti kako izgleda funkcija f. Na primjer, za $x \in [-2,-1\rangle$ imamo da je $x^2+6x+8 \geq 0$ i $x^2+4x+3 \leq 0$, odnosno $|x^2+6x+8| = x^2+6x+8$ i $|x^2+4x+3| = -(x^2+6x+8)$. Zaključujemo da za te x imamo $f(x) = x^2+6x+8-(-(x^2+6x+8)) = 2x^2+10x+11$.

Na sličan način analiziramo i ostale intervale te tako dobivamo zapis funkcije f bez apsolutnih vrijednosti:

$$f(x) = \begin{cases} 2x+5 & \text{za } x \in \langle -\infty,-4\rangle \\ -2x^2-10x-11 & \text{za } x \in [-4,-3\rangle \\ -2x-5 & \text{za } x \in [-3,-2\rangle \\ 2x^2+10x+11 & \text{za } x \in [-2,-1\rangle \\ 2x+5 & \text{za } x \in [-1,+\infty\rangle. \end{cases}$$

Iz dobivenog zapisa funkcije f skiciramo i njen graf:



[11] Točke u kojima je vrijednost polinoma jednaka 0.

Iz grafa je sada jasno da je $f(\langle -2, 0\rangle) = \langle -1, 5\rangle$. S druge strane da bi odredili $f^{-1}([1, 2\rangle)$, uočimo da je $f(x) \in [1, 2\rangle$ za $x = -3$ te još za neke x iz intervala $\langle -2, -1\rangle$. Kako bi odredili za koje točno, trebamo naći za koje x iz tog intervala vrijedi da je

$$2x^2 + 10x + 11 \geq 1 \quad \text{i} \quad 2x^2 + 10x + 11 < 2. \tag{1.15}$$

Prva nejednakost ekvivalentna je s $x^2 + 5x + 5 \geq 0$, a promatranjem nultočki kvadratnog polinoma na lijevoj strani znamo da će to biti zadovoljeno ako je $x \leq \frac{-5-\sqrt{5}}{2}$ ili $x \geq \frac{-5+\sqrt{5}}{2}$. Međutim prva od ove dvije nejednakosti ne može biti zadovoljena za $x \in \langle -2, -1\rangle$, pa zaključujemo da mora vrijediti druga, odnosno $x \geq \frac{-5+\sqrt{5}}{2}$.

Riješimo još i drugu nejednakost iz (1.15). Ona je ekvivalentna s $2x^2 + 10x + 9 < 0$, a ona je zadovoljena za $x \in \langle \frac{-5-\sqrt{7}}{2}, \frac{-5+\sqrt{7}}{2}\rangle$.

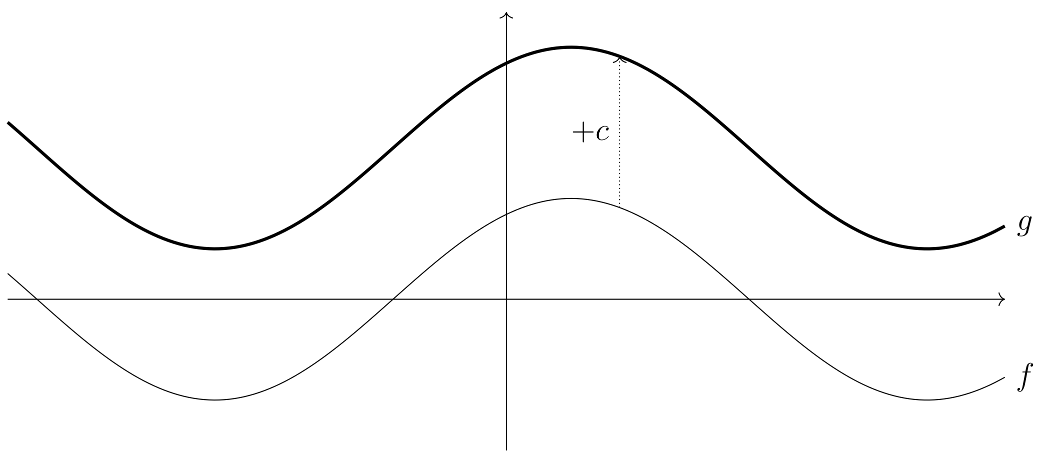
Dakle, zanima nas za koje $x \in \langle -2, -1\rangle$ vrijedi da je $x \geq \frac{-5+\sqrt{5}}{2}$ i $x \in \langle \frac{-5-\sqrt{7}}{2}, \frac{-5+\sqrt{7}}{2}\rangle$. Budući da je $\frac{-5+\sqrt{5}}{2}, \frac{-5+\sqrt{7}}{2} \in \langle -2, -1\rangle$, zaključujemo da su to $x \in [\frac{-5+\sqrt{5}}{2}, \frac{-5+\sqrt{7}}{2}\rangle$.

Dakle, $f^{-1}([1, 2\rangle) = \{-3\} \cup [\frac{-5+\sqrt{5}}{2}, \frac{-5+\sqrt{7}}{2}\rangle$. $\square$

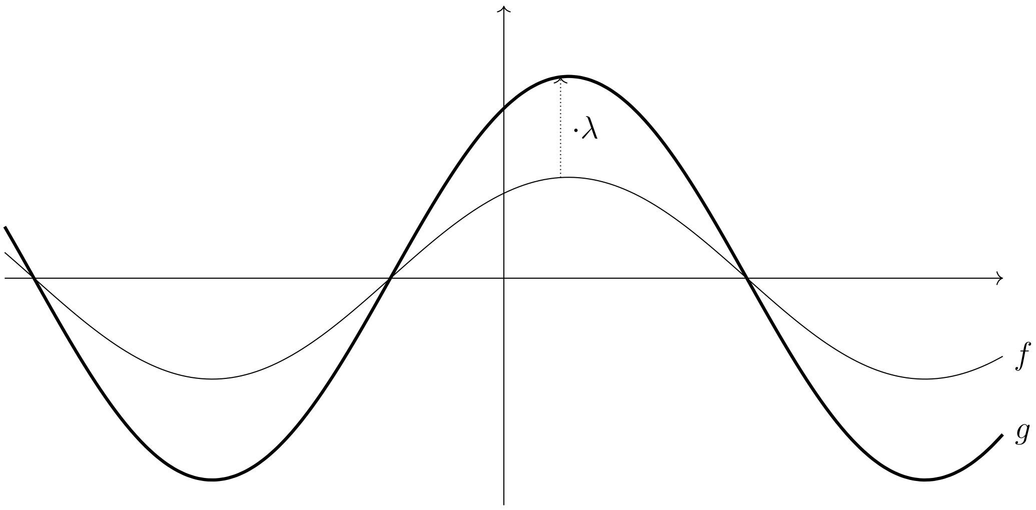
1.7. Transformacije grafa

Neka je $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ realna funkcija realne varijable. U ovom ćemo odjeljku pokazati kako se graf funkcije mijenja ukoliko napravimo neku malu promjenu u pravilu pridruživanja funkcije f.

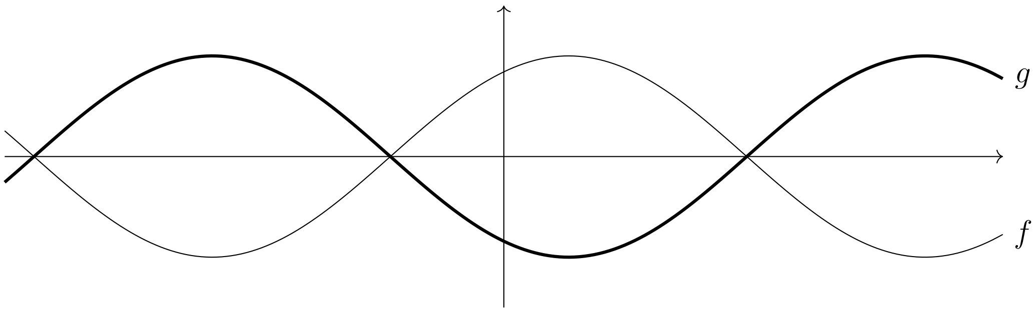
Na primjer, neka je $c \in \mathbf{R}$ te neka je $g(x) = f(x) + c$ za sve $x \in \mathbf{R}$. Tada graf funkcije g možemo dobiti translacijom grafa funkcije f vertikalno za c. Ako je $c > 0$, to znači da ćemo graf funkcije f *podignuti*, a ako je $c < 0$ onda ćemo ga *spustiti*.



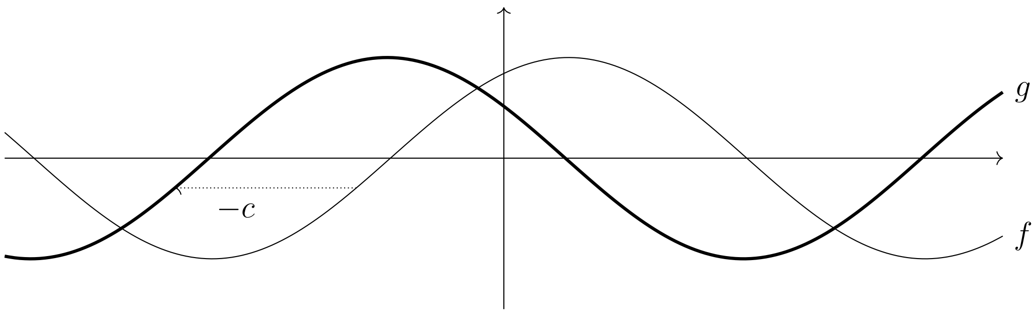
Neka je $\lambda > 0$. Ako je $g(x) = \lambda f(x)$ za sve $x \in \mathbf{R}$, tada graf funkcije g možemo dobiti vertikalnom dilatacijom grafa funkcije f uz faktor dilatacije λ. Ako je $\lambda > 1$, to znači da ćemo graf funkcije f *rastegnuti*, a ako je $\lambda < 1$ onda ćemo ga *stisnuti*.



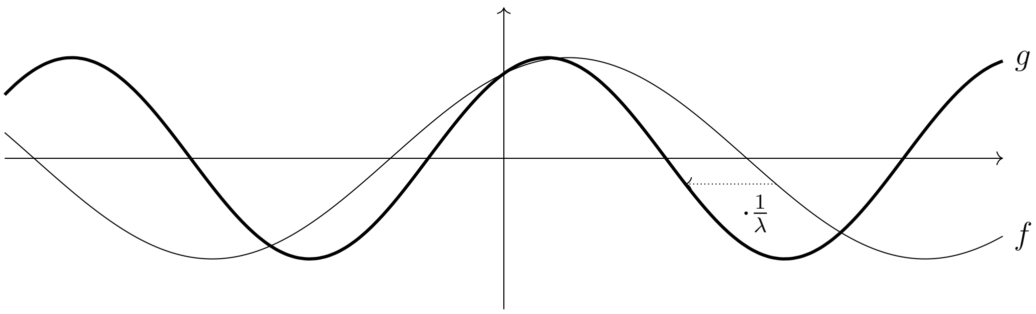
Ako je $g(x) = -f(x)$ za sve $x \in \mathbf{R}$, tada graf funkcije g možemo dobiti osnom simetrijom grafa funkcije f s obzirom na os apscisa.



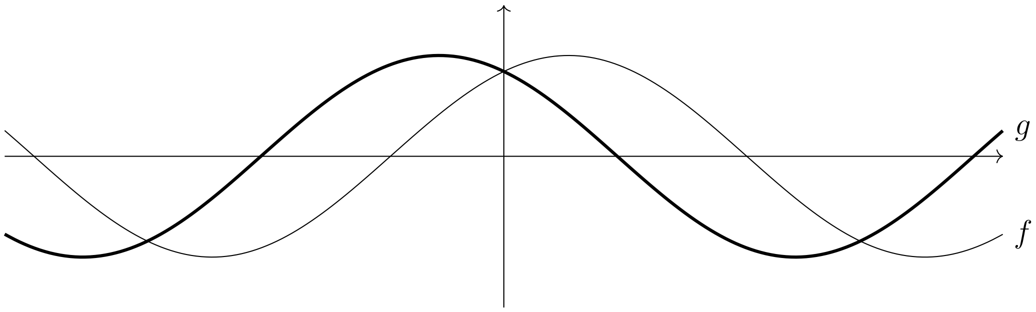
Neka je $c \in \mathbf{R}$. Ako je $g(x) = f(x+c)$ za sve $x \in \mathbf{R}$, tada graf funkcije g možemo dobiti horizontalnom translacijom grafa funkcije f za $-c$. Ako je $c > 0$, to znači da ćemo graf funkcije f translatirati ulijevo, a ako je $c < 0$ onda ćemo ga translatirati udesno.



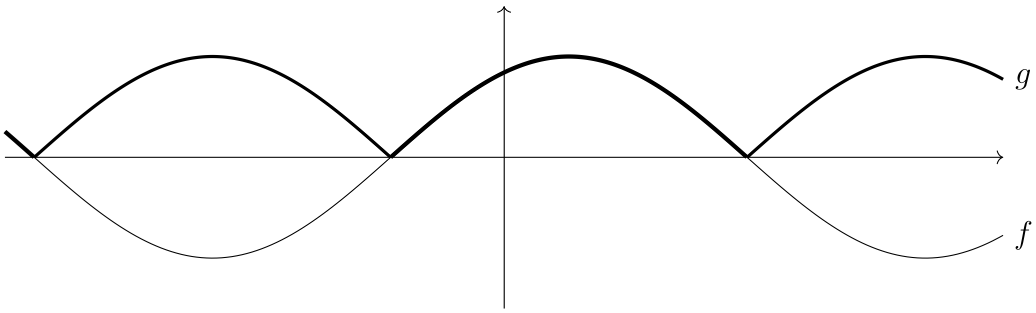
Neka je $\lambda > 0$. Ako je $g(x) = f(\lambda x)$ za sve $x \in \mathbf{R}$, tada graf funkcije g možemo dobiti horizontalnom dilatacijom grafa funkcije f uz faktor dilatacije $\frac{1}{\lambda}$. Ako je $\lambda < 1$, to znači da ćemo graf funkcije f *rastegnuti*, a ako je $\lambda > 1$ onda ćemo ga *stisnuti*.



Ako je $g(x) = f(-x)$ za sve $x \in \mathbf{R}$, tada graf funkcije g možemo dobiti osnom simetrijom grafa funkcije f s obzirom na os ordinata.



Ako je $g(x) = |f(x)|$ za sve $x \in \mathbf{R}$, tada graf funkcije g možemo dobiti tako da dijelove grafa funkcije f koji su iznad osi apscisa ostavimo nepromijenjenima, dok od dijelova grafa funkcije f koji su ispod osi apscisa uzmemo osnosimetričnu sliku s obzirom na os apscisa.



Zadatak 1.51. Skicirajte graf funkcije $f(x) = |||x-1|-2|-3|$ koristeći neke od prethodno prikazanih transformacija, te odredite $f([-2,3\rangle)$ i $f^{-1}([1,2\rangle)$.

Rješenje. Krenut ćemo od grafa funkcije $g_1(x) = |x|$, te postepenim transformacijama doći do funkcije f. Definirajmo funkcije g_2, g_3, g_4 i g_5 na sljedeći način:

$$g_2(x) = g_1(x-1), \text{ tj. } g_2(x) = |x-1|$$

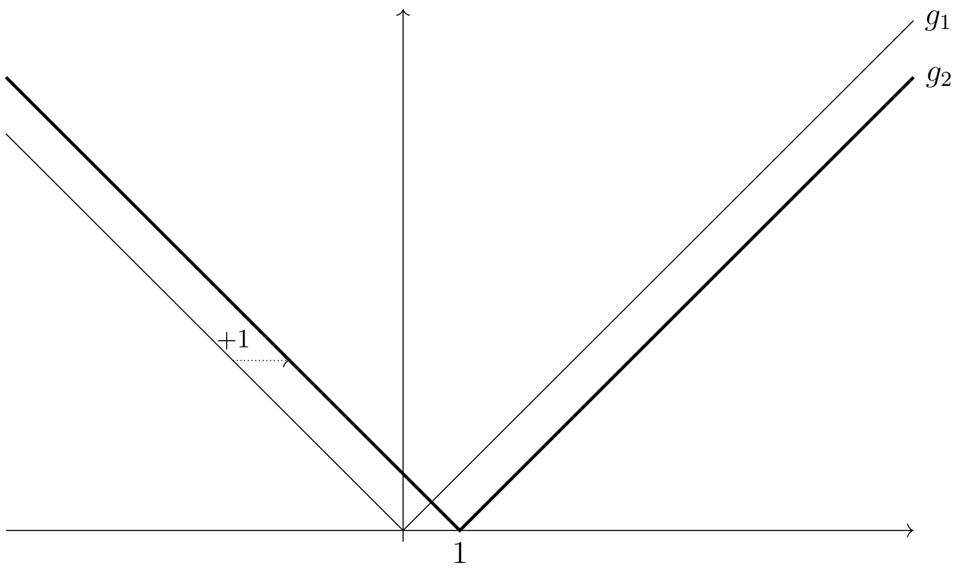
$$g_3(x) = g_2(x) - 2, \text{ tj. } g_3(x) = |x-1| - 2$$

$$g_4(x) = |g_3(x)|, \text{ tj. } g_4(x) = ||x-1| - 2|$$

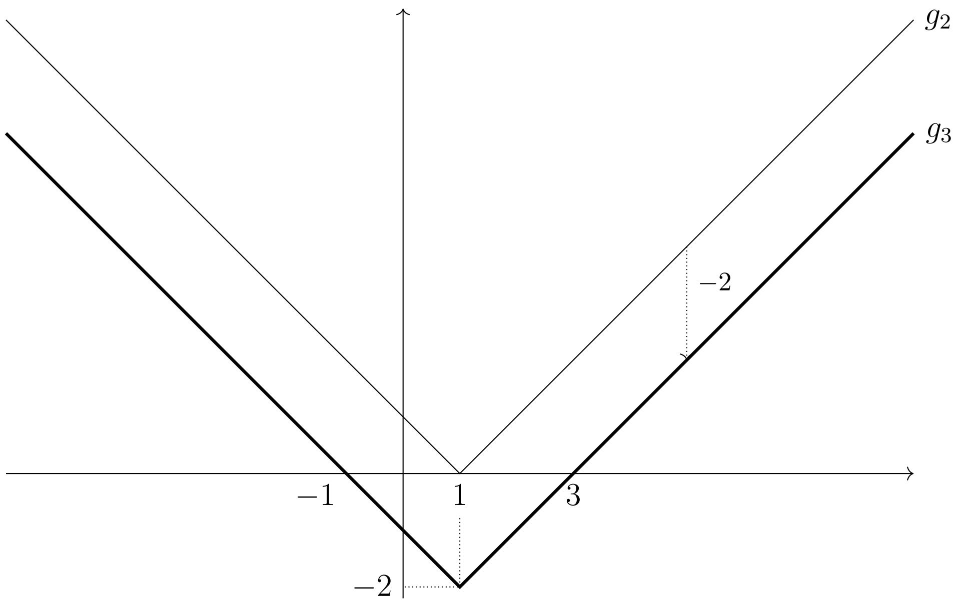
$$g_5(x) = g_4(x) - 3, \text{ tj. } g_5(x) = ||x-1| - 2| - 3$$

Uočimo da je $f(x) = |g_5(x)|$. Sada kada smo skicirali strategiju kako ćemo doći do grafa funkcije f, krećemo s postepenim transformacijama.

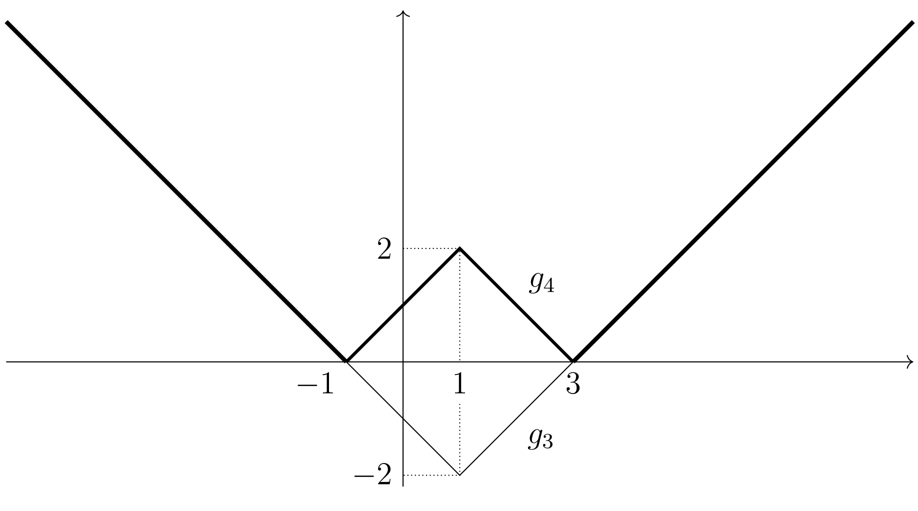
Najprije translacijom grafa funkcije g_1 udesno za 1 dobivamo graf funkcije g_2.



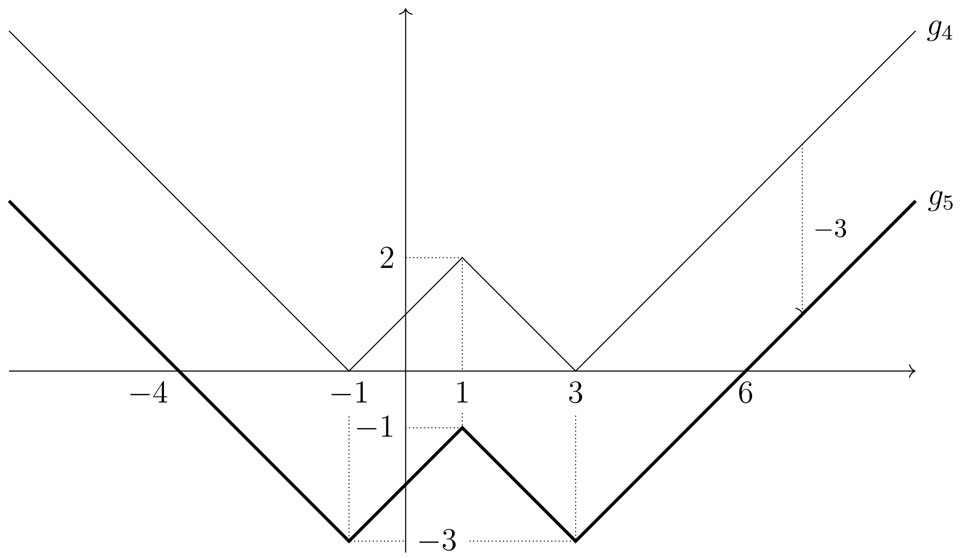
Translacijom grafa funkcije g_2 nadolje za 2 dobivamo graf funkcije g_3.



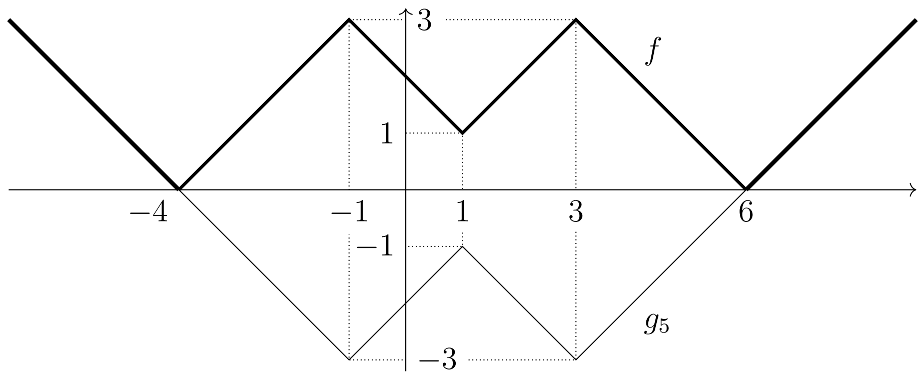
Iz grafa funkcije g_3 osnom simetrijom dijelova grafa ispod osi apscisa (i ne diranjem dijelova grafa iznad nje) dobivamo graf funkcije g_4.



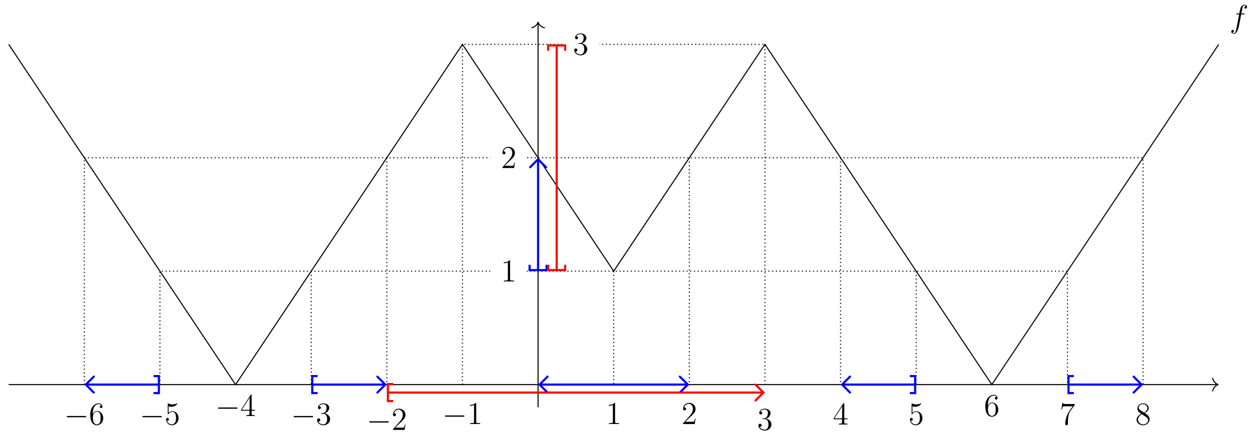
Translacijom grafa funkcije g_4 nadolje za 3 dobivamo graf funkcije g_5.



Konačno, iz grafa funkcije g_5 osnom simetrijom dijelova grafa ispod osi apscisa (i ne diranjem dijelova grafa iznad nje) dobivamo graf funkcije f.



Iz grafa funkcije f (dolje je radi preciznosti nacrtan s povećanom osi ordinata) lako iščitavamo da je $f([-2,3\rangle) = [1.3]$ i $f^{-1}([1,2\rangle) = \langle -6,5] \cup [-3,-2\rangle \cup \langle 0,2\rangle \cup \langle 4,5] \cup [7,8\rangle$.

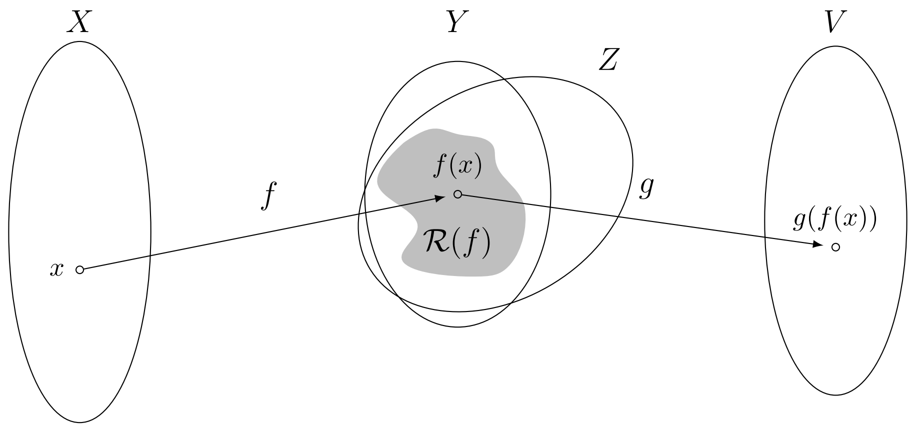


$\square$

1.8. Kompozicija funkcija

Definicija 1.52. Neka su $f\colon X \to Y$ i $g\colon Z \to V$ funkcije takve da je $\mathcal{R}(f) \subseteq Z$. **Kompozicija** funkcija f i g je funkcija $g \circ f\colon X \to V$ s pravilom pridruživanja

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)),\ x \in X.$$



Primjer 1.53. Prikažimo funkciju $h(x) = \sin(1 + e^x)$ kao kompoziciju jednostavnijih funkcija. Označimo s f i g realne funkcije realne varijable s pravilima pridruživanja

$$f(x) = 1 + e^x,\quad g(x) = \sin x,\quad x \in \mathbf{R}.$$

Uočimo da je tada

$$h(x) = \sin(1 + e^x) = g(f(x)) = (g \circ f)(x),\ x \in \mathbf{R}.$$

Primijetimo da je i obratna kompozicija $f \circ g$ dobro definirana realna funkcija realne varijable, te da vrijedi

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = 1 + e^{\sin x} \neq \sin(1 + e^x) = (g \circ f)(x),$$

stoga zaključujemo da je općenito $f \circ g \neq g \circ f$.[12]

Uočimo da smo Primjerom 1.53 pokazali kako komponiranje funkcija općenito nije komutativno. S druge strane, lako se pokaže da je komponiranje funkcija asocijativno, odnosno da za funkcije $f\colon X \to Y$, $g\colon Z \to V$ i $h\colon U \to W$ takve da je $\mathcal{R}(f) \subseteq Z$ i $\mathcal{R}(g) \subseteq U$ vrijedi

$$(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f).$$

Za vježbu se sami uvjerite u ovu jednakost. Stoga je gornju kompoziciju triju funkcija opravdano označavati s $h \circ g \circ f$. Analognu oznaku koristimo i za kompoziciju konačno mnogo funkcija $f_1, f_2, \ldots, f_n$, $n \in \mathbf{N}$. Ako za svaki $i < n$ vrijedi da je slika $\mathcal{R}(f_i)$ sadržana u domeni funkcije f_{i+1}, kompozicija $f_n \circ \ldots f_2 \circ f_1$ je dobro definirana i određena pravilom pridruživanja

$$(f_n \circ \ldots f_2 \circ f_1)(x) = f_n(\ldots f_2(f_1(x)) \ldots).$$

[12] Uočimo da je dovoljno naći jedan $x \in \mathbf{R}$ za koji je $(f \circ g)(x) \neq (g \circ f)(x)$ da bismo zaključili da je $f \circ g \neq g \circ f$. U ovom primjeru, za sve $x \in \mathbf{R}$ vrijedi da je $(f \circ g)(x) > 1$ i $(g \circ f)(x) \leq 1$. Stoga je $(f \circ g)(x) \neq (g \circ f)(x)$ za sve $x \in \mathbf{R}$.

Uočimo da za domenu funkcije $f_n \circ \ldots f_2 \circ f_1$ uzimamo domenu funkcije f_1, dok je kodomena jednaka kodomeni funkcije f_n.

ZADATAK 1.54. Neka je $f\colon \mathbf{R} \setminus \{1\} \to \mathbf{R}$ funkcija dana pravilom pridruživanja $f(x) = \frac{1}{1-x}$. Odredite funkciju $f \circ f \circ f$.

RJEŠENJE. Odredimo prvo kompoziciju $f \circ f$. Da bi kompozicija $f \circ f$ bila dobro definirana treba vrijediti da je $\mathcal{R}(f) \subseteq \mathbf{R} \setminus \{1\}$. To znači da $(f \circ f)(x)$ neće biti definirano za one x-eve za koje je $f(x) = 1$. Kako je $f^{-1}(\{1\}) = \{0\}$, slijedi da je domena kompozicije $f \circ f$ jednaka $\mathbf{R} \setminus \{0, 1\}$. Sada za $x \in \mathbf{R} \setminus \{0, 1\}$ imamo

$$(f \circ f)(x) = f(f(x)) = \frac{1}{1 - f(x)} = \frac{1}{1 - \frac{1}{1-x}} = \frac{1}{\frac{-x}{1-x}} = \frac{x-1}{x}.$$

Nadalje, kompozicija $f \circ f \circ f$ je dobro definirana, obzirom da je $(f \circ f)^{-1}(\{1\}) = \emptyset$ pa je $\mathcal{R}(f \circ f) \subseteq \mathbf{R} \setminus \{1\}$. Za $x \in \mathbf{R} \setminus \{0, 1\}$ je

$$f((f \circ f)(x)) = \frac{1}{1 - (f \circ f)(x)} = \frac{1}{1 - \frac{x-1}{x}} = \frac{1}{\frac{1}{x}} = x.$$

Prema tome, kompozicija $f \circ f \circ f\colon \mathbf{R} \setminus \{0, 1\} \to \mathbf{R}$ je dana pravilom pridruživanja

$$(f \circ f \circ f)(x) = x.$$

$\square$

ZADATAK 1.55. Neka su $f\colon X \to Y$ i $g\colon Z \to V$ dvije funkcije takve da je $\mathcal{R}(f) \subseteq Z$. Dokažite da su za $A \subseteq X$ i $B \subseteq V$ sljedeći skupovi jednaki:

(a) $(g \circ f)(A)$ i $g(f(A))$;
(b) $(g \circ f)^{-1}(B)$ i $f^{-1}(g^{-1}(B))$.

RJEŠENJE. (a) Iz definicije slike skupa A funkcije $g \circ f$ slijedi da je $v \in (g \circ f)(A)$ ako i samo ako postoji $x \in A$ takav da je $v = (g \circ f)(x) = g(f(x))$, odnosno ako i samo ako postoji $y \in f(A)$ takav da je $v = g(y)$. Time smo pokazali da je

$$v \in (g \circ f)(A) \iff v \in g(f(A)).$$

(b) Slično kao u dijelu (a), iz definicije praslike skupa B funkcije $g \circ f$ slijedi da je $x \in (g \circ f)^{-1}(B)$ ako i samo ako je $g(f(x)) = (g \circ f)(x) \in B$, odnosno ako i samo ako je $f(x) \in g^{-1}(B)$. Time smo pokazali da je

$$x \in (g \circ f)^{-1}(B) \iff x \in f^{-1}(g^{-1}(B)).$$

$\square$

Iz prethodnog zadatka se indukcijom lako pokaže analogna reprezentacija slike i praslike kompozicije $f_n \circ \ldots \circ f_2 \circ f_1$ nekog skupa,

$$(f_n \circ \ldots \circ f_2 \circ f_1)(A) = f_n(\ldots f_2(f_1(A)) \ldots)$$
$$(f_n \circ \ldots \circ f_2 \circ f_1)^{-1}(B) = f_1^{-1}(\ldots f_{n-1}^{-1}(f_n^{-1}(B)) \ldots).$$

Iz gornje reprezentacije vidimo da je za određivanje slike, odnosno praslike, neke složene funkcije dovoljno rastaviti tu složenu funkciju kao kompoziciju jednostavnijih funkcija te redom određivati njihove slike, odnosno praslike. Pogledajmo par primjera u kojima nam ovaj princip uvelike olakšava problem određivanja slike, odnosno praslike, nekog skupa po nekoj složenoj funkciji.

Zadatak 1.56. Zadanoj funkciji odredite sliku, tako da ju prikažete kao kompoziciju jednostavnijih funkcija:

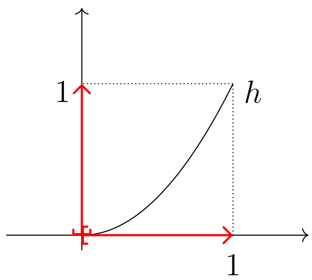
(a) $f\colon [0,1\rangle \to \mathbf{R}$, $f(x) = x^4 + 5x^2 + 6$;

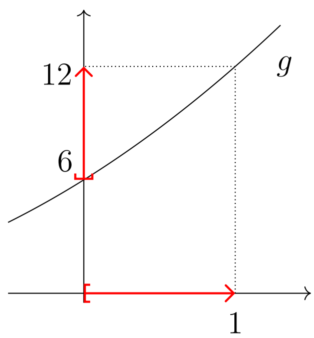
(b) $f\colon \langle -1,2] \to \mathbf{R}$, $f(x) = 2x^2 + 3|x| + 1$.

Rješenje. (a) Uočimo da funkciju f možemo prikazati kao kompoziciju $g \circ h$ funkcija

$$h\colon [0,1\rangle \to \mathbf{R} \quad h(x) = x^2,$$

$$g\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R} \quad g(x) = x^2 + 5x + 6.$$



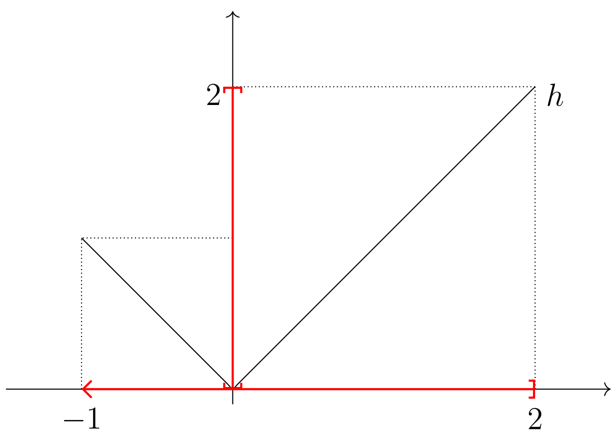


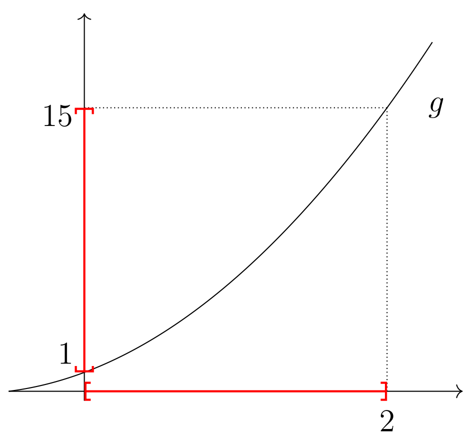
Stoga je $\mathcal{R}(f) = f([0,1\rangle) = (g \circ h)([0,1\rangle) = g(h([0,1\rangle))$. Iz grafova funkcija h i g vidimo kako je $\mathcal{R}(h) = h([0,1\rangle) = [0,1\rangle$ i $\mathcal{R}(f) = g(\mathcal{R}(h)) = g([0,1\rangle) = [6,12\rangle$.

(b) Funkciju f možemo prikazati kao kompoziciju $g \circ h$ funkcija

$$h\colon \langle -1,2] \to \mathbf{R} \quad h(x) = |x|,$$

$$g\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R} \quad g(x) = 2x^2 + 3x + 1.$$





Stoga je $\mathcal{R}(f) = f(\langle -1,2]) = (g \circ h)(\langle -1,2]) = g(h(\langle -1,2]))$. Iz grafova funkcija h i g vidimo kako je $\mathcal{R}(h) = h(\langle -1,2]) = [0,2]$ i $\mathcal{R}(f) = g(\mathcal{R}(h)) = g([0,2]) = [1,15]$.

□

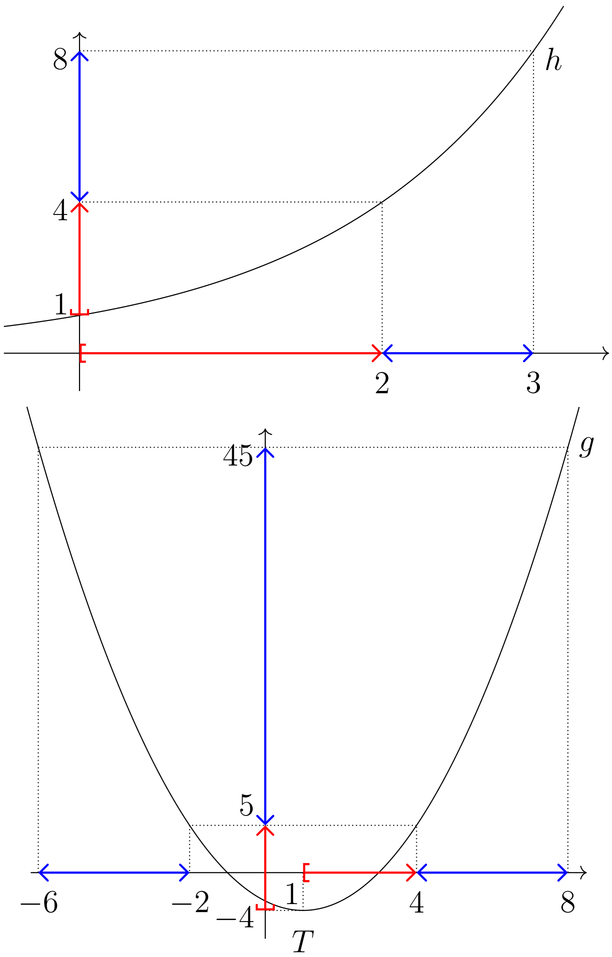
ZADATAK 1.57. Neka je $f(x) = 4^x - 2^{x+1} - 3$. Odredite $f([0,2\rangle)$ i $f^{-1}(\langle 5, 45\rangle)$.

RJEŠENJE. Za početak uočimo da za svaki $x \in \mathbf{R}$ vrijedi da je

$$f(x) = (2^x)^2 - 2 \cdot 2^x - 3.$$

Stoga funkciju f možemo zapisati kao kompoziciju $g \circ h$ funkcija

$$h\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R} \quad h(x) = 2^x,$$
$$g\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R} \quad g(x) = x^2 - 2x - 3.$$



Iz grafova funkcija f i g lako očitamo da je $f([0,2\rangle) = g(h([0,2\rangle)) = g([1,4\rangle) = [-4,5\rangle$. Nadalje, $f^{-1}(\langle 5,45\rangle) = h^{-1}(g^{-1}(\langle 5,45\rangle)) = h^{-1}(\langle -6,-2\rangle \cup \langle 4,8\rangle)$. Kako funkcija h poprima samo pozitivne vrijednosti, slijedi da je $f^{-1}(\langle 5,45\rangle) = h^{-1}(\langle 4,8\rangle) = \langle 2,3\rangle$. □

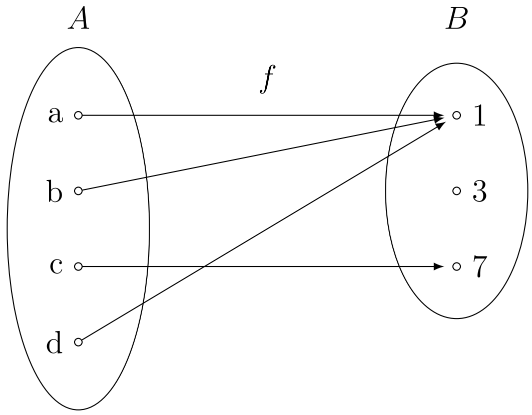
1.9. Injektivnost

DEFINICIJA 1.58. Za funkciju $f\colon A \to B$ kažemo da je **injekcija** ako različitim elementima domene pridružuje različite elemente kodomene, odnosno ako za sve $x_1, x_2 \in A$ takve da je $x_1 \neq x_2$ vrijedi i da je $f(x_1) \neq f(x_2)$.

Posljednji dio definicije u biti je implikacija $x_1 \neq x_2 \implies f(x_1) \neq f(x_2)$. Njen obrat po kontrapoziciji je implikacija $f(x_1) = f(x_2) \implies x_1 = x_2$. Dakle, svojstvo injektivnosti možemo karakterizirati i na način da kažemo da je funkcija f injektivna ako i samo ako za sve $x_1, x_2 \in A$

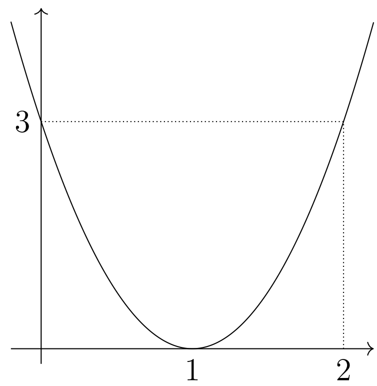
takve da je $f(x_1) = f(x_2)$ nužno mora vrijediti i da je $x_1 = x_2$. Ovakva će nam karakterizacija najčešće biti korisnija od one iz same definicije.

PRIMJER 1.59. Vratimo se ponovno na funkciju f iz Primjera 1.3.



Funkcija f *nije* injekcija budući da postoje dva različita elementa iz domene kojima je pridružen isti element kodomene – na primjer, $f(\mathrm{a}) = f(\mathrm{d})$. Općenito, kada funkcije prikazujemo preko ovakvih dijagrama, možemo reći da će svojstvo injektivnosti biti zadovoljeno ako i samo ako u niti jedan element kodomene (skupa B) nije usmjereno više od jedne strelice.

PRIMJER 1.60. Prikažimo graf funkcije $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ s pravilom pridruživanja $f(x) = 3x^2 - 6x + 3$.



Uočavamo da niti ova funkcija nije injekcija budući da je, na primjer, $f(0) = f(2)$. Općenito, kada promatramo graf funkcije, možemo zaključiti da će ona biti injekcija ako i samo ako svaki horizontalni pravac (tj. pravac paralelan s osi apscisa) siječe graf funkcije u najviše jednoj točci.

Uočimo da iako f nije injekcija, mnoge njene restrikcije jesu – na primjer $f|_{[2,5]}$, $f|_{\langle -\infty,1]}$, ... Mogli bismo neformalno reći da što više funkciju restringiramo (odnosno, što je manja nova domena) tim više povećavamo šanse da će nova funkcija biti injekcija.

ZADATAK 1.61. Pokažite da je svaka strogo monotona funkcija injekcija.

RJEŠENJE. Neka je $f\colon A \to B$ neka realna funkcija realne varijable koja je uz to i strogo padajuća, te neka su $x_1, x_2 \in A$ takvi da je $x_1 \neq x_2$.

Tada je $x_1 < x_2$ ili $x_1 > x_2$. U prvom slučaju nam činjenica da je f strogo padajuća daje da je $f(x_1) > f(x_2)$, a u drugom da je $f(x_1) < f(x_2)$. U svakom slučaju, možemo zaključiti da je $f(x_1) \neq f(x_2)$.

Ukoliko je f strogo rastuća funkciju vrijedi gotovo isti dokaz, pa ga ostavljamo čitatelju za zadaću. $\square$

ZADATAK 1.62. Dokažite: ako su funkcije $f\colon X \to Y$ i $g\colon Y \to Z$ injekcije, tada je i kompozicija $g \circ f$ također injekcija.

RJEŠENJE. Neka su $x_1, x_2 \in X$ takvi da vrijedi $(g \circ f)(x_1) = (g \circ f)(x_2)$, odnosno $g(f(x_1)) = g(f(x_2))$. Kako je funkcija g injekcija, slijedi da je $f(x_1) = f(x_2)$. Sada korištenjem injektivnosti funkcije f dobivamo da je $x_1 = x_2$. $\square$

ZADATAK 1.63. Neka je f realna funkcija realne varijable s pravilom pridruživanja

$$f(x) = \frac{x-1}{x+1}.$$

Odredite njenu prirodnu domenu te ustanovite vrijedi li svojstvo injektivnosti na toj prirodnoj domeni? Odredite $f(\langle 1, +\infty\rangle)$ i $f^{-1}(\langle -1, 0])$.

RJEŠENJE. Ne smijemo imati nulu u nazivniku pa je $\mathcal{D}(f) = \mathbf{R} \setminus \{-1\}$. Neka su $x_1, x_2 \in \mathcal{D}(f)$ takvi da je $f(x_1) = f(x_2)$. Tada je

$$\frac{x_1 - 1}{x_1 + 1} = \frac{x_2 - 1}{x_2 + 1},$$

pa množenjem s zajedničkim nazivnikom dobivamo

$$(x_1 - 1)(x_2 + 1) = (x_2 - 1)(x_1 + 1),$$

a množenjem i kraćenjem iz posljednje jednakosti dobivamo da je $x_1 = x_2$. Dakle, f je injekcija na prirodnoj domeni.[13]

Uočimo da f možemo zapisati na način

$$f(x) = 1 - \frac{2}{x+1},$$

što nam daje ideju da f napišemo kao kompoziciju funkcija

$$\begin{aligned}
&g_1\colon \mathbf{R} \setminus \{-1\} \to \mathbf{R}, \quad g_1(x) = x + 1,\\
&g_2\colon \mathbf{R} \setminus \{0\} \to \mathbf{R}, \quad g_2(x) = \frac{1}{x},\\
&g_3\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}, \quad g_3(x) = 2x,\\
&g_4\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}, \quad g_4(x) = -x,\\
&g_5\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}, \quad g_5(x) = 1 + x.
\end{aligned}$$

[13] Uočimo da smo mogli koristiti i Zadatak 1.62 da pokažemo da je f injekcija. Pogledajmo donji rastav funkcije f kao kompoziciju $g_5 \circ g_4 \circ g_3 \circ g_2 \circ g_1$. Lako se vidi da su funkcije $g_1, \ldots, g_5$ injekcije, pa je stoga i funkcija f injekcija.

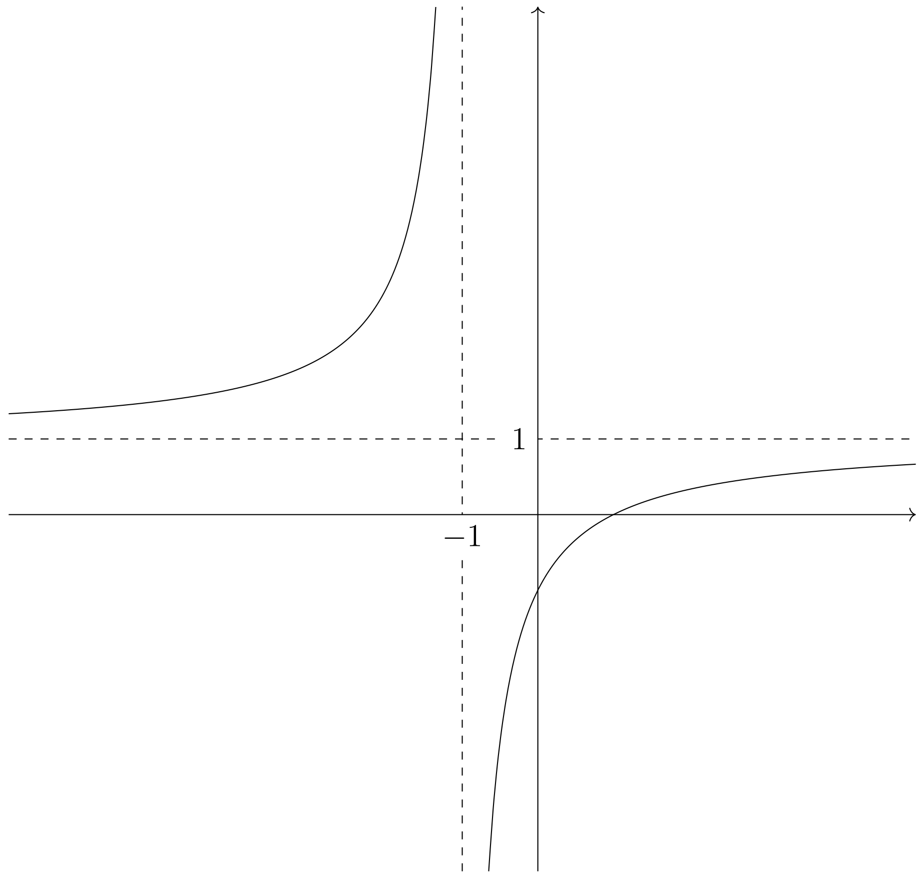
Vidimo da je[14] $f = g_5 \circ g_4 \circ g_3 \circ g_2 \circ g_1$, pa je

$$\begin{aligned} f(\langle 1, +\infty\rangle) &= g_5(g_4(g_3(g_2(g_1(\langle 1, +\infty\rangle))))) = g_5(g_4(g_3(g_2(\langle 2, +\infty\rangle)))) = g_5(g_4(g_3(\langle 0, \frac{1}{2}\rangle))) \\ &= g_5(g_4(\langle 0, 1\rangle)) = g_5(\langle -1, 0\rangle) = \langle 0, 1\rangle. \end{aligned}$$

i

$$\begin{aligned} f^{-1}(\langle -1, 0]) &= g_1^{-1}(g_2^{-1}(g_3^{-1}(g_4^{-1}(g_5^{-1}(\langle -1, 0]))))) = g_1^{-1}(g_2^{-1}(g_3^{-1}(g_4^{-1}(\langle -2, -1])))) \\ &= g_1^{-1}(g_2^{-1}(g_3^{-1}([1, 2\rangle))) = g_1^{-1}(g_2^{-1}([\tfrac{1}{2}, 1\rangle)) = g_1^{-1}(\langle 1, 2]) = \langle 0, 1]. \end{aligned}$$

Zadatak[15] smo mogli riješiti i grafički – graf od f možemo nacrtati tako da krenemo od grafa funkcije g_2 te potom nizom transformacija iz Odjeljka 1.7 crtamo grafove funkcija $g_2 \circ g_1$, $g_3 \circ g_2 \circ g_1$, $g_4 \circ g_3 \circ g_2 \circ g_1$ i $g_5 \circ g_4 \circ g_3 \circ g_2 \circ g_1 = f$.



□

[14]Uočimo da smo kao domenu funkcije g_1 odabrali $\mathbf{R} \setminus \{0\}$ iako je $\mathcal{D}(g_1) = \mathbf{R}$. To smo učinili kako bi funkcije f i $g_5 \circ g_4 \circ g_3 \circ g_2 \circ g_1$ imale istu domenu.

[15]Razlog odabira čak pet funkcija $(g_1, \ldots, g_5)$ je isključivo pedagoški – da smo htjeli ubrzati rješavanje i ne pokazati svaki korak, radili bi s manje funkcija. Na primjer, funkciju f mogli smo zapisati i kao $h_3 \circ h_2 \circ h_1$, pri čemu je

$$\begin{aligned} &h_1 \colon \mathbf{R} \setminus \{-1\} \to \mathbf{R}, \quad h_1(x) = x + 1, \\ &h_2 \colon \mathbf{R} \setminus \{0\} \to \mathbf{R}, \quad h_2(x) = \frac{2}{x}, \\ &h_3 \colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}, \quad h_3(x) = 1 - x. \end{aligned}$$

ZADATAK 1.64 (za zadaću). Neka je f realna funkcija realne varijable s pravilom pridruživanja

$$f(x) = \frac{2x-1}{x+2}.$$

Odredite njenu prirodnu domenu i sliku funkcije (s obzirom na prirodnu domenu), te ustanovite vrijedi li svojstvo injektivnosti na toj prirodni domeni? Odredite $f(\langle -2, 0\rangle)$ i $f^{-1}(\langle 0, 2])$.

ZADATAK 1.65. Neka je $f\colon A \to B$.

(a) Dokažite da je f injekcija ako i samo ako je $f(C\cap D) = f(C)\cap f(D)$ za sve $C, D \subseteq A$.

(b) (za zadaću) Dokažite da je f injekcija ako i samo ako je $f(C \setminus D) = f(C) \setminus f(D)$ za sve $C, D \subseteq A$.

RJEŠENJE. (a) Pretpostavimo najprije da je f injekcija. Iz Zadatka 1.10 (b) već znamo da je $f(C \cap D) \subseteq f(C) \cap f(D)$. Dokažimo i da je $f(C \cap D) \supseteq f(C) \cap f(D)$. Za proizvoljni $y \in f(C) \cap f(D)$ iz definicije slike skupa znamo da postoje $x_1 \in C$ takav da je $f(x_1) = y$ i $x_2 \in D$ takav da je $f(x_2) = y$. Dakle, $f(x_1) = f(x_2)$ pa je zbog injektivnosti $x_1 = x_2$. Slijedi da je $x_1 \in C \cap D$, pa možemo zaključiti da je $f(x_1) \in f(C \cap D)$, odnosno $y \in f(C \cap D)$.

Dokažimo i obratni smjer, odnosno da iz tvrdnje da je $f(C\cap D) = f(C)\cap f(D)$ za sve $C, D \subseteq A$ slijedi da je f injekcija. Neka su $x_1, x_2 \in A$ takvi da je $f(x_1) = f(x_2)$. Ako iskoristimo jednakost $f(C\cap D) = f(C)\cap f(D)$ (za koju je pretpostavka da vrijedi za sve skupove $C, D \subseteq A$) za konkretne skupove $C = \{x_1\}$ i $D = \{x_2\}$, dobivamo

$$f(\{x_1\} \cap \{x_2\}) = f(\{x_1\}) \cap f(\{x_2\}) = f(\{x_1\}).$$

Budući da je $f(\{x_1\}) \neq \emptyset$ slijedi da isto mora vrijediti i za skup $f(\{x_1\} \cap \{x_2\})$, a to je moguće jedino ukoliko je $x_1 = x_2$ (u suprotnom bi imali da je $f(\{x_1\} \cap \{x_2\}) = f(\emptyset) = \emptyset$). Zaključujemo da je f injekcija.

□

ZADATAK 1.66. Dokažite da je $f\colon A \to B$ injekcija ako i samo ako je $f^{-1}(f(C)) = C$ za sve $C \subseteq A$.

RJEŠENJE. Dokažimo najprije da ako je f injekcija i $C \subseteq A$, tada je nužno $f^{-1}(f(C)) = C$. Iz Zadatka 1.14 (a) već znamo da je $f^{-1}(f(C)) \supseteq C$ (neovisno o injektivnosti funkcije f). Preostaje za dokazati da je i $f^{-1}(f(C)) \subseteq C$.

Neka je $x \in f^{-1}(f(C))$ proizvoljan. Iz definicije skupa $f^{-1}(f(C))$ zaključujemo da je onda $f(x) \in f(C)$, pa iz definicije skupa $f(C)$ znamo da postoji neki $x' \in C$ takav da je $f(x') = f(x)$. Budući da je f injekcija, slijedi da je $x = x'$, pa je i $x \in C$. Dakle, doista je $f^{-1}(f(C)) \subseteq C$, pa onda i $f^{-1}(f(C)) = C$.

Dokažimo i obrat, odnosno da ako je $f^{-1}(f(C)) = C$ za sve $C \subseteq A$, tada je f injekcija. Neka su $x_1, x_2 \in A$ takvi da je $f(x_1) = f(x_2)$, te iskoristimo jednakost $f^{-1}(f(C)) = C$ dva puta – prvi put za skup $C = \{x_1\}$ i drugi put za skup $C = \{x_2\}$:

$$\{x_1\} = f^{-1}(f(\{x_1\})) = f^{-1}(f(\{x_2\})) = \{x_2\}.$$

Zaključujemo da je $x_1 = x_2$ pa je f injekcija. $\square$

ZADATAK 1.67. Postoji li injekcija $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ takva da je

$$f(x^2) + f(x)^2 \leq -\tfrac{1}{4} \quad \text{za sve } x \in \mathbf{R}? \tag{1.16}$$

RJEŠENJE. Pretpostavimo da neka takva injekcija f postoji.

S nejednakosti (1.16) je teško raditi, dijelom i zbog toga što uključuje dvije vrijednosti u funkcije f u dvjema različitim točkama – x i x^2. Međutim, te dvije točke nisu baš uvijek različite – one će biti jednake za $x = 0$ i $x = 1$. Promotrimo zato nejednakost (1.16) u tim dvjema točkama.

Za $x = 0$ nejednakost (1.16) nam daje da je

$$f(0) + f(0)^2 \leq -\tfrac{1}{4},$$

a ta je nejednakost ekvivalentna s nejednakosti $(f(0)+\frac{1}{2})^2 \leq 0$. Otuda slijedi da je $f(0)+\frac{1}{2} = 0$, odnosno $f(0) = -\frac{1}{2}$.

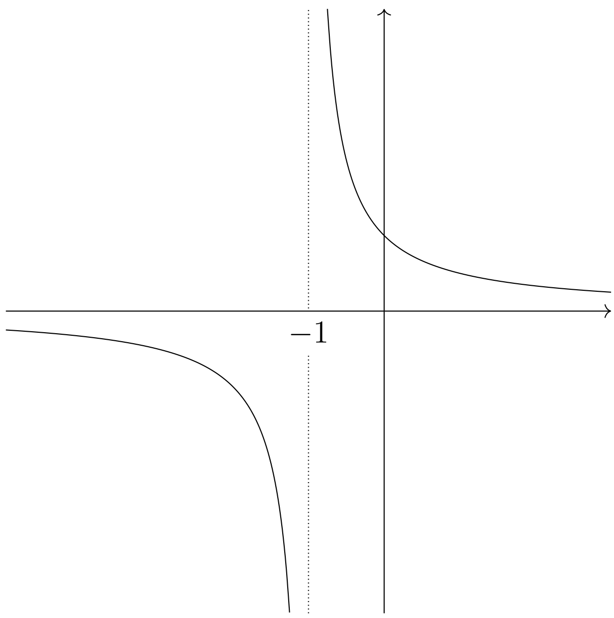
Međutim, na potpuno isti način uvrštavanjem $x = 1$ zaključujemo da je i $f(1) = -\frac{1}{2}$. Dakle, $f(0) = f(1)$, što je u kontradikciji s pretpostavkom da je f injekcija. $\square$

1.10. Surjektivnost

DEFINICIJA 1.68. Za funkciju $f\colon A \to B$ kažemo da je **surjekcija** ako je $\mathcal{R}(f) = B$, odnosno ako za svaki $y \in B$ postoji neki $x \in A$ takav da je $f(x) = y$.

PRIMJER 1.69. Funkcija f iz Primjera 1.59 i Primjera 1.3 *nije* surjekcija budući da $3 \notin \mathcal{R}(f)$, tj. ne postoji $x \in A$ takav da je $f(x) = 3$. Kada funkciju prikazujemo preko dijagrama kao u navedenim primjerima, možemo reći da će svojstvo surjektivnosti biti zadovoljeno ako i samo ako je u svaki element kodomene (skupa B) usmjerena barem jedna strelica.

PRIMJER 1.70. Prikažimo graf funkcije $f\colon \mathbf{R} \setminus \{-1\} \to \mathbf{R} \setminus \{0\}$ s pravilom pridruživanja $f(x) = \frac{1}{x+1}$.



Uočavamo da je ova funkcija surjekcija, budući da jedina točka na osi ordinata koja nije pridružena niti jednoj točki iz domene je točka 0, a ona se niti ne nalazi u kodomeni funkcije f. Općenito, kada promatramo graf funkcije, možemo zaključiti da će ona biti surjekcija ako i samo ako svaki horizontalni pravac (tj. pravac paralelan s osi apscisa) koji odgovara nekoj točki kodomene siječe graf funkcije u barem jednoj točci.[16]

To možemo i formalno dokazati tako da pokažemo da za svaki $y \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$ (kodomena funkcije f) pronađemo neki $x \in \mathbf{R} \setminus \{-1\}$ (domena funkcije f) takav da je $f(x) = y$. Uzmimo, dakle, proizvoljni $y \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$. Tada je

$$f(x) = y \iff \frac{1}{x+1} = y \iff yx = 1 - y.$$

Budući da smo pretpostavili da je $y \neq 0$, posljednju jednakost možemo podijeliti s y i dobiti $x = \frac{1}{y} - 1$. Treba provjeriti da je ovako dobiveni x doista iz domene funkcije f. Međutim, jedina mogućnost da ovakav x nije iz domene je da vrijedi da je $\frac{1}{y} - 1 = -1$, odnosno $\frac{1}{y} = 0$, što nije zadovoljeno niti za jednu od promatranih vrijednosti y. Dakle, za svaki y iz kodomene, pronašli smo odgovarajući x iz domene, pa zaključujemo da je funkcija surjekcija.

Uočimo da iako je f surjekcija, sve njene restrikcije nisu – na primjer $f|_{\mathbf{R}\setminus\{-1,1\}}$ nije surjekcija budući da $\frac{1}{2} \notin \mathcal{R}(f|_{\mathbf{R}\setminus\{-1,1\}})$.[17] Općenito bismo mogli neformalno reći da što više funkciju restringiramo (odnosno, što je manja nova domena) tim više smanjujemo šanse da će nova funkcija biti surjekcija. Slično, što više kodomenu smanjujemo, tim više povećavamo šanse da će nova funkcija biti surjekcija.

Zadatak 1.71. Dokažite: ako su funkcije $f\colon X \to Y$ i $g\colon Y \to Z$ surjekcije, tada je i kompozicija $g \circ f$ surjekcija.

Rješenje. Neka je $z \in Z$ proizvoljan. Kako je funkcija g surjekcija, postoji $y \in Y$ takav da je $g(y) = z$. Nadalje, kako je f surjekcija, postoji $x \in X$ za koji je $f(x) = y$. Sada tražena tvrdnja slijedi iz jednakosti $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(y) = z$. □

Zadatak 1.72. Dokažite da je $f\colon A \to B$ surjekcija ako i samo ako je $f(f^{-1}(E)) = E$ za sve $E \subseteq B$.

Rješenje. Dokažimo najprije da ako je f surjekcija i $E \subseteq B$, tada je nužno $f(f^{-1}(E)) = E$. Iz Zadatka 1.14 (b) već znamo da je $f(f^{-1}(E)) \subseteq E$ (neovisno o surjektivnosti funkcije f). Preostaje za dokazati da je i $f(f^{-1}(E)) \supseteq E$.

Neka je $y \in E$ proizvoljan. Budući da je f surjekcija, postoji $x \in A$ takav da je $f(x) = y$. Kako je $y \in E$, to znači da je $x \in f^{-1}(E)$. Po definicije slike skupa, tada je $f(x) \in f(f^{-1}(E))$, pa je zbog $f(x) = y$ onda i $y \in f(f^{-1}(E))$. Dakle, doista je $f(f^{-1}(E)) \supseteq E$, pa onda i $f(f^{-1}(E)) = E$.

[16]Dio *koji odgovara nekoj točki kodomene* iz prethodne rečenice je bitan – horizontalni pravac $y = 0$ (dakle, os apscisa) u ovom primjeru ne siječe graf funkcije u niti jednoj točci, što je posve opravdano budući da 0 niti nije u kodomeni funkcije. Štoviše, kada bi taj pravac sijekao graf mogli bismo reći da funkcija nije dobro definirana, budući da je nekom elementu domene pridružila element koji se uopće ne nalazi u kodomeni.

[17]$\frac{1}{2}$ je ovdje bitna jer je $f(1) = \frac{1}{2}$, a upravo smo element 1 dodatno uklonili iz domene funkcije $f|_{\mathbf{R}\setminus\{-1,1\}}$.

Dokažimo i obrat, odnosno da ako je $f(f^{-1}(E)) = E$ za sve $E \subseteq B$, tada je f surjekcija. Kada to ne bi bila istina, postojao bi neki $y \in B$ za koji je $f^{-1}(\{y\}) = \emptyset$, odakle bi slijedilo da je $f(f^{-1}(\{y\})) = f(\emptyset) = \emptyset$, što je u kontradikciji s jednakosti $f(f^{-1}(E)) = E$ primijenjenoj na skup $E = \{y\}$. Dakle, f je surjekcija. $\square$

Zadatak 1.73. Postoji li surjekcija $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ takva da je

$$f(x^3) - f(x)^2 \geq x^4 \quad \text{za sve } x \in \mathbf{R}? \tag{1.17}$$

Rješenje. Pretpostavimo da neka takva surjekcija f postoji. Ideja je da iskoristimo surjektivnost tako da dobijemo neki $x_1 \in \mathbf{R}$ za koji će lijeva strana nejednakosti (1.17) biti negativna. Budući da je desna strana iste nejednakosti uvijek nenegativna, to će nam dati kontradikciju.

Krenimo s formalnim dokazom. Budući da je f surjekcija, postoji neki $x_0 \in \mathbf{R}$ takav da je $f(x_0) = -1$. Ako uzmemo da je $x_1 = x_0^{1/3}$, tada iz $f(x_1^3) = -1$ i $f(x_1)^2 \geq 0$, te nejednakosti (1.17) primijenjene na $x = x_1$ dobivamo

$$-1 \geq f(x_1^3) - f(x_1)^2 \geq x_1^4 \geq 0,$$

što je, naravno, kontradikcija. Dakle, takva surjekcija f ne postoji. $\square$

1.11. Bijektivnost i inverzna funkcija

Definicija 1.74. Za funkciju $f\colon A \to B$ kažemo da je **bijekcija** ako je injekcija i surjekcija.

Zadatak 1.75. Pokažite da funkcija $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ s pravilom pridruživanja

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{za } x \leq 0 \\ \frac{x+1}{x} & \text{za } x > 0 \end{cases}$$

nije bijekcija. Je li joj moguće promijeniti kodomenu tako da postane?

Rješenje. Provjerimo najprije injektivnost funkcije f. Neka su $x_1, x_2 \in \mathbf{R}$ takvi da je $f(x_1) = f(x_2)$. Uočimo da za $x > 0$ vrijedi da je $f(x) > 0$, dok za $x \leq 0$ vrijedi da je $f(x) \leq 0$. Budući da je $f(x_1) = f(x_2)$ to znači da su onda ili $x_1, x_2 \leq 0$ ili $x_1, x_2 > 0$. U prvom slučaju imamo

$$x_1 = f(x_1) = f(x_2) = x_2.$$

S druge strane, ako je $x_1, x_2 > 0$ imamo

$$\frac{x_1 + 1}{x_1} = f(x_1) = f(x_2) = \frac{x_2 + 1}{x_2},$$

a otuda ponovno dobivamo da je $x_1 = x_2$, pa zaključujemo da je f injekcija.

Da bismo ustanovili je li f surjekcija, odredimo najprije njenu sliku. Iz Zadatka 1.10 znamo da je

$$\mathcal{R}(f) = f(\langle -\infty, 0]) \cup f(\langle 0, +\infty \rangle). \tag{1.18}$$

Iz definicije funkcije f jasno je da je $f(\langle -\infty, 0]) = \langle -\infty, 0]$. S druge strane, $f(\langle 0, +\infty\rangle)$ možemo izračunati tako da uvedemo funkcije

$$g_1\colon \langle 0, +\infty\rangle \to \mathbf{R}, \quad g_1(x) = \frac{1}{x},$$
$$g_2\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}, \quad g_2(x) = 1 + x,$$

te uočimo da je $f|_{\langle 0,+\infty\rangle} = g_2 \circ g_1$. Zbog toga je

$$f(\langle 0, +\infty\rangle) = g_2(g_1(\langle 0, +\infty\rangle)) = g_2(\langle 0, +\infty\rangle) = \langle 1, +\infty\rangle.$$

Iz (1.18) sada vidimo da je

$$\mathcal{R}(f) = \langle -\infty, 0] \cup \langle 1, +\infty\rangle,$$

a budući da je kodomena funkcije f jednaka $\mathbf{R}$, zaključujemo da f nije surjekcija.

Ako funkciju f promijenimo tako da joj kodomena bude $\langle -\infty, 0] \cup \langle 1, +\infty\rangle$, a domena i pravilo pridruživanja isti kao i prije, tada vidimo da će takva nova funkcija doista biti i surjekcija, pa onda i bijekcija. □

Definicija 1.76. Funkciju $\mathrm{id}_A\colon A \to A$ s pravilom pridruživanja $\mathrm{id}_A(x) = x$ nazivamo **identitetom na** A.

Neka je $f\colon A \to B$ funkcija. Funkciju $g\colon B \to A$ takvu da je $g \circ f = \mathrm{id}_A$ i $f \circ g = \mathrm{id}_B$ nazivamo **inverzom** funkcije f. Takvu funkciju g češće označavamo s f^{-1}.

Naravno, iz definicije kompozicije znamo da uvjeti $g \circ f = \mathrm{id}_A$ i $f \circ g = \mathrm{id}_B$ u biti znače da mora vrijediti da je $g(f(x)) = x$ za sve $x \in A$ i $f(g(y)) = y$ za sve $y \in B$.

Pokazuje se da funkcija ima inverz ako i samo ako je bijekcija, te da je u tom slučaju inverz i jedinstven.

Uočimo da iz definicije i jedinstvenosti inverza bijekcije f slijedi da je $(f^{-1})^{-1} = f$.

Zadatak 1.77. Neka je $f\colon \mathbf{R} \setminus \{-3\} \to \mathbf{R} \setminus \{4\}$ zadana s

$$f(x) = \frac{4x + 7}{x + 3}.$$

Pokažite da je f bijekcija i odredite f^{-1}.

Rješenje. Radi lakšeg računanja zapišimo f na način $f(x) = 4 - \frac{5}{x+3}$. Dokažimo najprije da je f injekcija. Neka su $x_1, x_2 \in \mathbf{R} \setminus \{-3\}$ takvi da je $f(x_1) = f(x_2)$, odnosno

$$4 - \frac{5}{x_1 + 3} = 4 - \frac{5}{x_2 + 3}.$$

Odavde lako dobivamo da slijedi da je $x_1 = x_2$, pa je f doista injekcija.

Da bismo dokazali da je f surjekcija, dovoljno je za pokazati da za svaki $y \in \mathbf{R} \setminus \{4\}$ postoji neki $x \in \mathbf{R} \setminus \{-3\}$ takav da je $f(x) = y$.[18] Imamo

$$f(x) = y \iff 4 - \frac{5}{x + 3} = y \iff 4 - y = \frac{5}{x + 3}, \tag{1.19}$$

[18]Surjektivnost funkcije f možemo dokazati i traženjem $\mathcal{R}(f)$ kao u Zadatku 1.75, no u ovom ćemo zadatku iz razloga koji će postati jasni kasnije to činiti na drugačiji način.

pa dijeljenjem s $4-y$ (što je opravdano zbog $y \neq 4$) i množenjem s $x+3$ te naknadnim sređivanjem dobivamo $x = -3 + \frac{5}{4-y}$. Uočimo da za ovakav x doista vrijedi da se nalazi u $\mathbf{R} \setminus \{-3\}$ (domena funkcije f) kojigod $y \in \mathbf{R} \setminus \{4\}$ promatrali, pa možemo zaključiti da je f surjekcija, pa onda i bijekcija.

Preostaje pronaći inverz funkcije f. Naravno, već znamo da je $f^{-1}\colon \mathbf{R} \setminus \{4\} \to \mathbf{R} \setminus \{-3\}$, tako da jedino što moramo napraviti je pronaći $f^{-1}(y)$ za svaki $y \in \mathbf{R} \setminus \{4\}$.

Neka je $x = f^{-1}(y)$, pri čemu treba imati na umu da y smatramo fiksiranom, a x je vrijednost koju želimo pronaći. Tada je $f(x) = f(f^{-1}(y)) = y$, a to je upravo prva jednadžba u (1.19) s kojom smo se već susreli te je riješili kada smo određivali je li f surjekcija. Dakle, $x = -3+\frac{5}{4-y}$, odnosno

$$f^{-1}(y) = -3 + \frac{5}{4-y}.$$

□

ZADATAK 1.78. Neka je $f\colon X \to Y$ strogo rastuća bijekcija. Pokažite da je tada i f^{-1} strogo rastuća.[19]

RJEŠENJE. Pretpostavimo da je f strogo rastuća. Neka su $y_1, y_2 \in Y$ takvi da je $y_1 < y_2$ i pretpostavimo da je $f^{-1}(y_1) \geq f^{-1}(y_2)$. Kako je f strogo rastuća funkcija, iz Zadatka 1.28 slijedi da je $f(f^{-1}(y_1)) \geq f(f^{-1}(y_2))$ odnosno $y_1 \geq y_2$. Dobili smo kontradikciju s uvjetom $y_1 < y_2$, pa slijedi da je nužno $f^{-1}(y_1) < f^{-1}(y_2)$, odnosno da je f^{-1} strogo rastuća funkcija. □

ZADATAK 1.79. Neka su funkcije $f\colon X \to Y$ i $g\colon Y \to Z$ bijekcije. Pokažite da je tada i kompozicija $g \circ f$ bijekcija i da vrijedi

$$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}.$$

RJEŠENJE. Kako su f i g bijekcije, iz Zadataka 1.62 i 1.71 slijedi da je kompozicija $g \circ f$ redom injekcija i surjekcija, odnosno bijekcija. Nadalje, za sve $x \in X$ i $z \in Z$ vrijedi

$$\begin{aligned}(f^{-1} \circ g^{-1}) \circ (g \circ f)(x) &= f^{-1}(g^{-1}(g(f(x)))) = f^{-1}(f(x)) = x,\\ (g \circ f) \circ (f^{-1} \circ g^{-1})(z) &= g(f(f^{-1}(g^{-1}(z)))) = g(g^{-1}(z)) = z,\end{aligned}$$

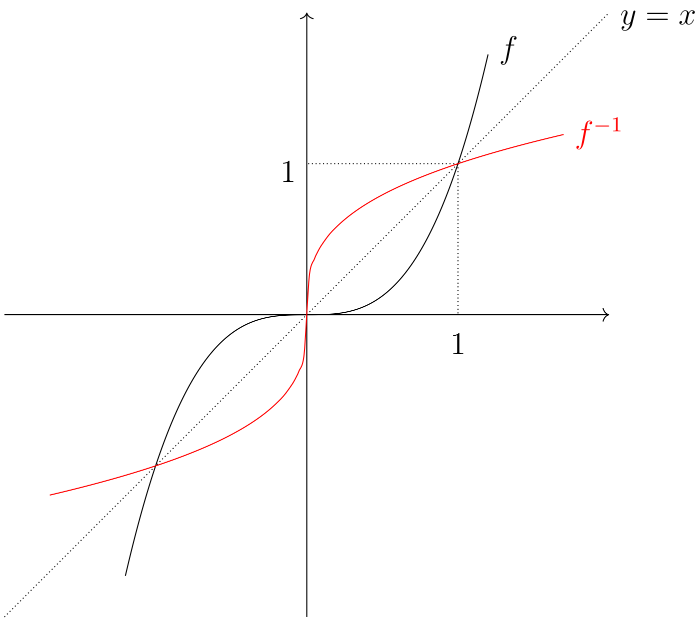
pa je zbog jedinstvenosti inverza nužno $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$. □

1.12. Korijeni

Promotrimo sada inverze potencija s prirodnim eksponentima. Uočimo da razlikujemo dvije vrste ponašanja potencija, ovisno o parnosti eksponenta.

Promotrimo prvo potenciju s neparnim eksponentom, odnosno funkciju $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ s pravilom pridruživanja $f(x) = x^{2n+1}$, za neki $n \in \mathbf{N} \cup \{0\}$.

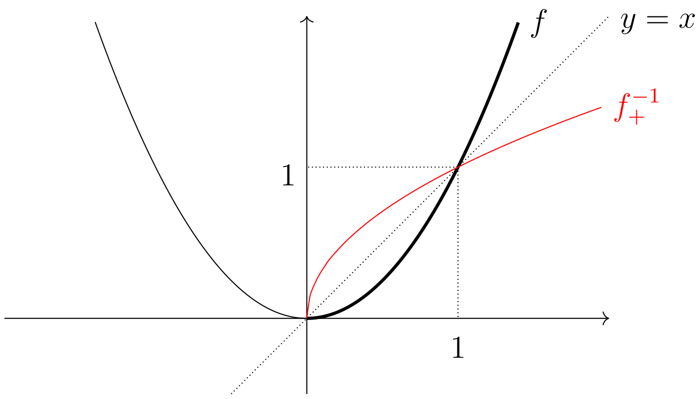
[19] Vrijedi i analogna tvrdnja: ako je f strogo padajuća bijekcija, tada je i f^{-1} strogo padajuća.



Funkcija f je strogo rastuća pa po Zadatku 1.61 slijedi da je f injekcija. Iz grafa funkcije f vidimo kako je $\mathcal{R}(f) = \mathbf{R}$ pa je funkcija f i surjekcija, odnosno bijekcija. Stoga, postoji inverzna funkcija $f^{-1}\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ koju označavamo kao

$$f^{-1}(x) = \sqrt[2n+1]{x}, \ x \in \mathbf{R}.$$

S druge strane, potencije s parnim eksponentom nisu bijekcije. Promotrimo funkciju $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ s pravilom pridruživanja $f(x) = x^{2n}$, za neki $n \in \mathbf{N}$.



Funkcija f nije bijekcija, no uočimo da njena restrikcija $f_+ = f|_{[0,\infty\rangle}\colon [0,\infty\rangle \to [0,\infty\rangle$ jest (jer je strogo rastuća surjekcija). Za pripadnu inverznu funkciju $f_+^{-1}\colon [0,\infty\rangle \to [0,\infty\rangle$ koristimo oznaku

$$f_+^{-1}(x) = \sqrt[2n]{x}.$$

Analogno smo mogli promatrati i inverz restrikcije $f_- = f|_{\langle -\infty,0]}\colon \langle -\infty, 0] \to [0,\infty\rangle$, koja je također bijekcija (jer je strogo padajuća surjekcija). Uočimo da tada za inverz $f_-^{-1}\colon [0,\infty\rangle \to \langle -\infty, 0]$ vrijedi jednakost

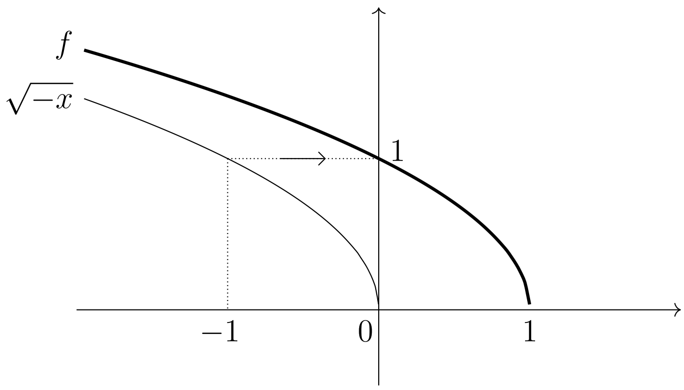
$$f_-^{-1}(x) = -\sqrt[2n]{x}.$$

Općenito, za $n \in \mathbf{N}$ funkciju $f(x) = \sqrt[n]{x}$ nazivamo n-ti **korijen**. Za neparne n prirodna domena n-tog korijena je $\mathbf{R}$, dok je za parne n jednaka $[0,\infty\rangle$. Iz gornjih grafova ili Zadatka 1.78 slijedi da je korijen strogo rastuća funkcija.

Zadatak 1.80. Odredite prirodnu domenu i sliku funkcija:

(a) $f(x) = \sqrt{1-x}$;
(b) $f(x) = \sqrt[7]{2x^4 - 1}$.

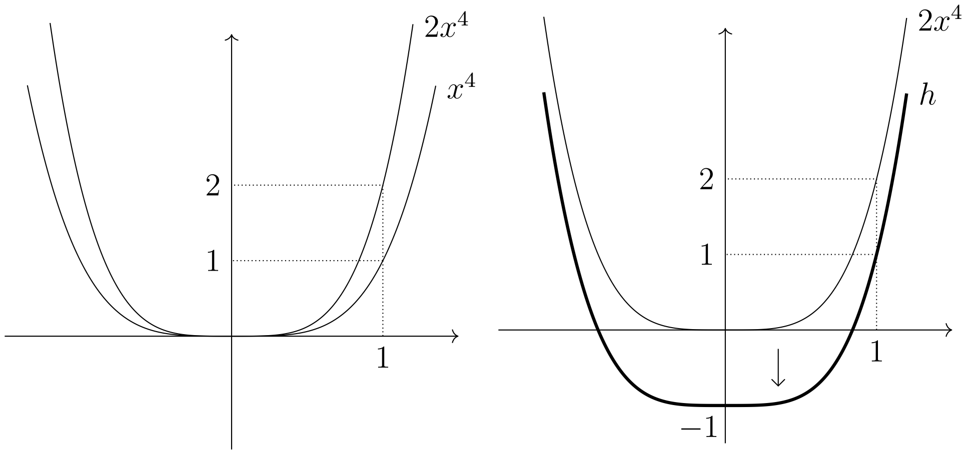
Rješenje. (a) Prirodna domena drugog korijena je $[0, \infty\rangle$, stoga će funkcija f biti dobro definirana za sve $x \in \mathbf{R}$ za koje je $1-x \geq 0$, odnosno $x \leq 1$. Prema tome je $\mathcal{D}(f) = \langle -\infty, 1]$. Da bismo odredili sliku funkcije f, uočimo da je $f(x) = \sqrt{-(x-1)}$ i nacrtamo njen graf.



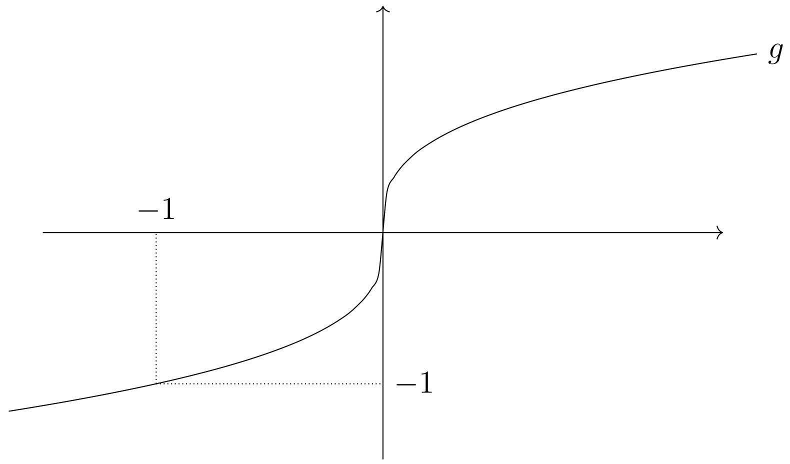
Iz grafa se sad jasno vidi da je slika funkcije f upravo $\mathcal{R}(f) = [0, \infty\rangle$.

(b) Kako je neparni korijen dobro definiran za sve $x \in \mathbf{R}$ slijedi da je i funkcija f također dobro definirana za sve $x \in \mathbf{R}$, odnosno da je $\mathcal{D}(f) = \mathbf{R}$. Da bismo odredili sliku $\mathcal{R}(f)$, zapišimo funkciju f kao kompoziciju $f = g \circ h$ jednostavnijih funkcija $g\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ i $h\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$,

$$g(x) = \sqrt[7]{x}, \ \ h(x) = 2x^4 - 1, \ \ x \in \mathbf{R}.$$



Iz grafa funkcije h je vidljivo da je $\mathcal{R}(h) = [-1, \infty\rangle$. Ostaje nam odrediti sliku skupa $[-1, \infty\rangle$ obzirom na funkciju g.



Iz grafa funkcije g vidimo da je $g([-1,\infty\rangle) = [-1,\infty\rangle$, pa slijedi da je

$$\mathcal{R}(f) = g(\mathcal{R}(h)) = [-1,\infty\rangle.$$

□

Zadatak 1.81 (za zadaću). Odredite prirodnu domenu i sliku funkcija:

(a) $f(x) = \sqrt{3-2x}$;
(b) $f(x) = x - 2\sqrt{x} + 1$;
(c) $f(x) = \sqrt[4]{x^2-4}$.

Zadatak 1.82. Odredite prirodnu domenu funkcije $f(x) = \sqrt{x+2\sqrt{x-1}}+\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}$, te $f^{-1}(\langle 4,6\rangle)$ i $f^{-1}([2,8\rangle)$.

Rješenje. Uočimo da je funkcija f dobro definirana za sve $x \in \mathbf{R}$ za koje je

$$\begin{aligned} &x-1 \geq 0,\\ &x+2\sqrt{x-1} \geq 0,\\ &x-2\sqrt{x-1} \geq 0. \end{aligned}$$

Uočimo da je druga nejednakost zadovoljena za sve one x za koje je zadovoljena prva nejednakost (uistinu za $x \geq 1$ je $x+2\sqrt{x-1} \geq 1$). Nadalje, ako je $x \geq 1$, treća nejednakost će vrijediti ako i samo je

$$x^2 - 4(x-1) = (x+2\sqrt{x-1})(x-2\sqrt{x-1}) \geq 0.$$

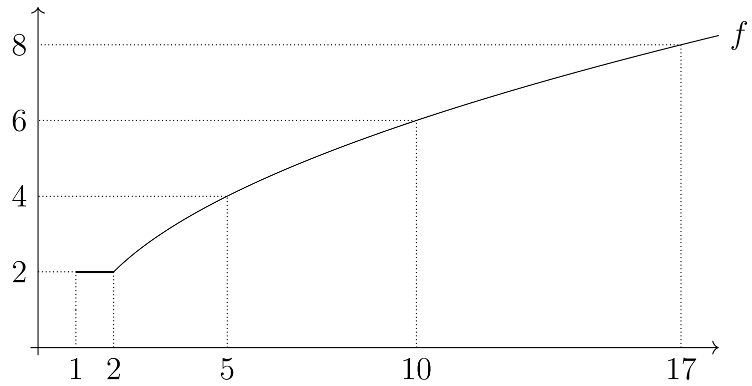
Stoga je gornji sustav nejednadžbi ekvivalentan sustavu

$$\begin{aligned} &x \geq 1,\\ &x^2-4x+4 \geq 0. \end{aligned}$$

Kako je $x^2-4x+4 = (x-2)^2 \geq 0$ za sve $x \in \mathbf{R}$, slijedi da je $\mathcal{D}(f) = [1,\infty\rangle$.

Prije nego odredimo praslike traženih skupova obzirom na f, zapišimo funkciju f u jednostavnijem obliku. Kako je $f(x) \geq 0$ za sve $x \in \mathcal{D}(f)$, vrijedi

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \left|\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}+\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}\right| = \sqrt{\left(\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}+\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}\right)^2} \\
&= \sqrt{x+2\sqrt{x-1}+x-2\sqrt{x-1}+2\sqrt{(x+2\sqrt{x-1})(x-2\sqrt{x-1})}} \\
&= \sqrt{2x+2\sqrt{(x^2-4(x-1))}} = \sqrt{2x+2|x-2|} \\
&= \begin{cases} \sqrt{2x+2x-4}, & x \geq 2 \\ \sqrt{2x-2x+4}, & 1 \leq x < 2 \end{cases} = \begin{cases} 2\sqrt{x-1}, & x \geq 2 \\ 2, & 1 \leq x < 2. \end{cases}
\end{aligned}
$$



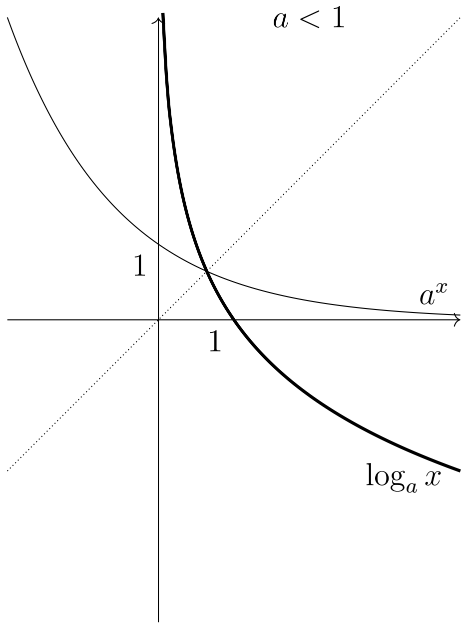
Sada iz grafa funkcije f lako odredimo da je $f^{-1}(\langle 4,6\rangle) = \langle 5,10\rangle$ i $f^{-1}([2,8\rangle) = [1,17\rangle$. □

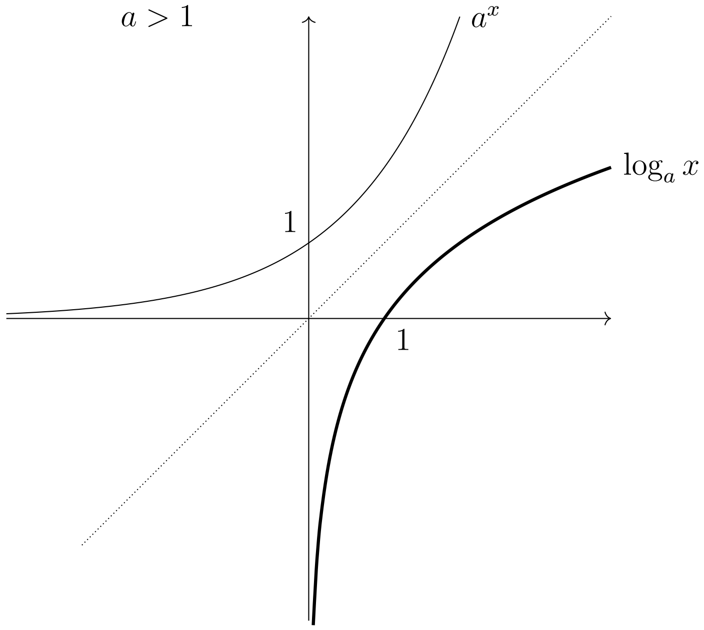
Zadatak 1.83 (za zadaću). Odredite prirodnu domenu funkcije $f(x) = \sqrt{1-x} - \sqrt[4]{5+x}$, te $f^{-1}([0,\infty\rangle)$.

1.13. Logaritamske funkcije

Promotrimo sada inverz eksponencijalne funkcije iz Odjeljka 1.3. Podsjetimo se, za $a \in \langle 0,\infty\rangle \setminus \{1\}$ eksponencijalna funkcija $f : \mathbf{R} \to \langle 0,\infty\rangle$ je određena pravilom pridruživanja $f(x) = a^x$. Nadalje, funkcija f je strogo monotona (za $a < 1$ je strogo padajuća, a za $a > 1$ je strogo rastuća) pa je po Zadatku 1.61 injekcija. Obzirom da je $\mathcal{R}(f) = \langle 0,\infty\rangle$, funkcija f je i surjekcija, pa je i bijekcija. Stoga postoji inverzna funkcija $f^{-1}\colon \langle 0,\infty\rangle \to \mathbf{R}$ koju zovemo **logaritamska funkcija** s bazom a i označavamo

$$f^{-1}(x) = \log_a x,\ \ x > 0.$$





Iz gornjih grafova (i Zadatka 1.78) vidimo da je logaritamska funkcija strogo padajuća za $a < 1$, odnosno strogo rastuća za $a > 1$.

Uočimo da iz definicije inverza slijede dobro poznate jednakosti koje povezuju logaritamsku i eksponencijalnu funkciju s istom bazom:

$$\log_a a^x = f^{-1}(f(x)) = x, \quad x \in \mathbf{R},$$
$$a^{\log_a x} = f(f^{-1}(x)) = x, \quad x > 0.$$

Često ćemo u zapisu koristiti konvenciju:

$$\log := \log_{10}, \quad \ln := \log_e .$$

Zadatak 1.84 (za zadaću). Neka su $x, y > 0$, $\beta \in \mathbf{R}$ i $a, b \in \langle 0, \infty\rangle \setminus \{1\}$. Korištenjem svojstava eksponencijalne funkcije pokažite da vrijedi:

(a) $\log_a 1 = 0$;

(b) $\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$,
$\log_a(\frac{x}{y}) = \log_a x - \log_a y$;

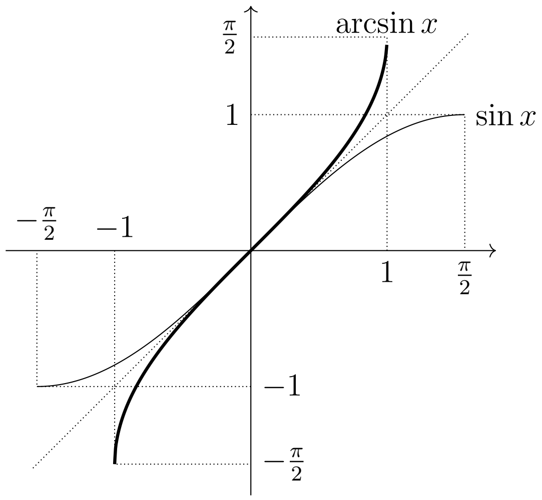
(c) $\log_a x^\beta = \beta \log_a x$,
$\log_{a^\beta} x = \frac{1}{\beta} \log_a x$;

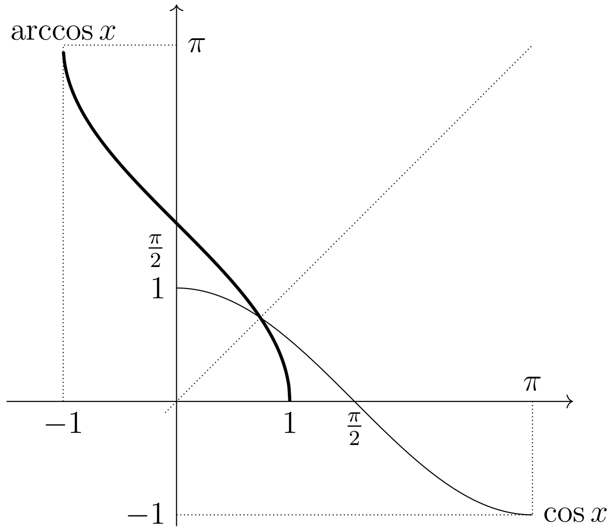
(d) $\log_b x = \frac{\log_a x}{\log_a b}$.

1.14. Arkus funkcije

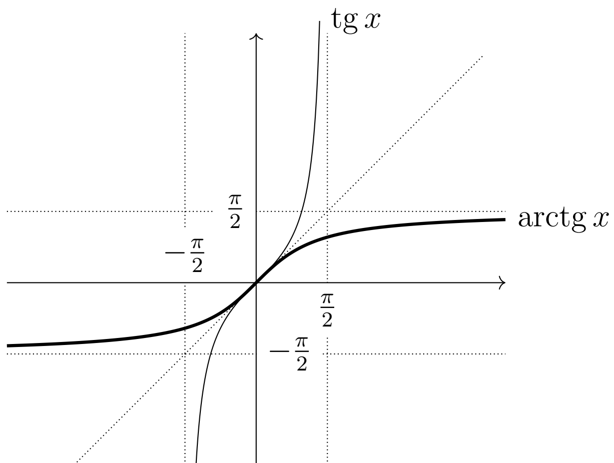
Iz definicije periodičnosti jasno je da periodične funkcije ne mogu biti injekcije, pa tako ni bijekcije. Stoga je jasno da trigonometrijske funkcije nisu bijekcije na svojoj prirodnoj domeni.

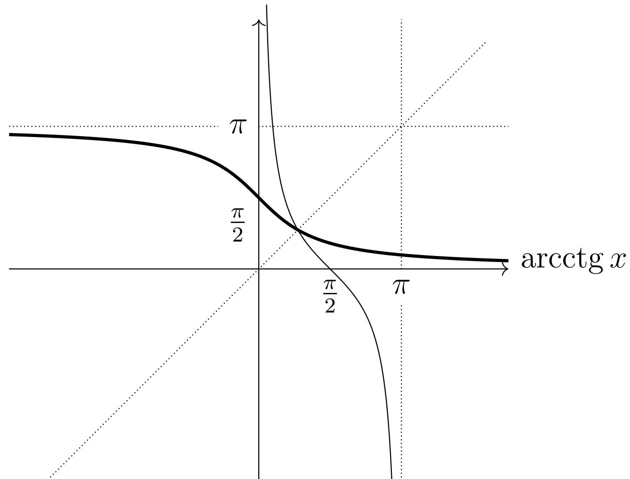
Promotrimo prvo restrikciju funkcije sinus na interval $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Iz grafa funkcije sinus (vidi graf nakon Definicije 1.37) vidimo da je $\sin|_{[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]}$ strogo rastuća funkcija, pa je po Zadatku 1.61 injekcija. Kako je $\sin([-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]) = [-1, 1]$, funkcija $\sin|_{[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]} \colon [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to [-1, 1]$ je stoga bijekcija.[20] Pripadnu inverznu funkciju $\arcsin\colon [-1,1] \to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ zovemo **arkus sinus**. Analogno, kako je $\cos|_{[0,\pi]}$ strogo padajuća funkcija i $\cos([0,\pi]) = [-1,1]$, $\cos|_{[0,\pi]}\colon [0,\pi] \to [-1,1]$ je bijekcija. Pripadnu inverznu funkciju $\arccos\colon [-1,1] \to [0,\pi]$ zovemo **arkus kosinus**.





Nadalje, $\operatorname{tg}|_{\langle -\pi/2,\pi/2\rangle}$ je strogo rastuća, a $\operatorname{ctg}|_{\langle 0,\pi\rangle}$ strogo padajuća funkcija, pa su obe restrikcije injekcije. Kako je $\operatorname{tg}(\langle -\pi/2, \pi/2\rangle) = \operatorname{ctg}(\langle 0,\pi\rangle) = \mathbf{R}$, slijedi da su $\operatorname{tg}|_{\langle -\pi/2,\pi/2\rangle}\colon \langle -\pi/2, \pi/2\rangle \to \mathbf{R}$ i $\operatorname{ctg}|_{\langle 0,\pi\rangle}\colon \langle 0,\pi\rangle \to \mathbf{R}$ obe bijekcije. Pripadne inverzne funkcije $\operatorname{arctg}\colon \mathbf{R} \to \langle -\pi/2, \pi/2\rangle$ i $\operatorname{arcctg}\colon \mathbf{R} \to \langle 0,\pi\rangle$ zovemo redom **arkus tangens** i **arkus kotangens**.





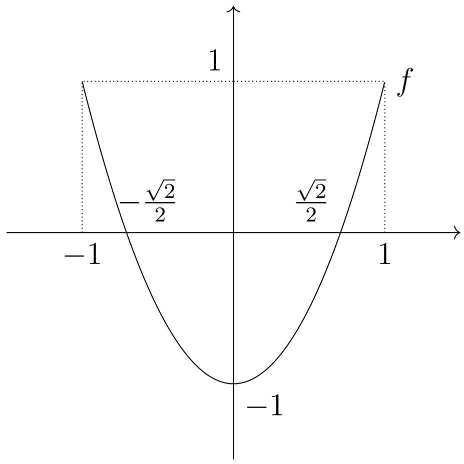
Zadatak 1.85. Neka je $f(x) = \cos(2\arccos(x))$. Odredite $\mathcal{D}(f)$, $f([0,1])$ i $f^{-1}([0,1\rangle)$.

Rješenje. Kako je $\mathcal{D}(\cos) = \mathbf{R}$, slijedi da je $\mathcal{D}(f) = \mathcal{D}(\arccos) = [-1,1]$. Izrazimo f u jednostavnijem obliku. Za $x \in [-1,1]$ vrijedi

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \cos^2(\arccos(x)) - \sin^2(\arccos(x)) = (\cos(\arccos(x)))^2 - (1 - (\cos(\arccos(x)))^2) \\
&= x^2 - (1 - x^2) = 2x^2 - 1.
\end{aligned}
$$

---

[20] Uočimo da se proširivanjem domene sa skupa $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ na neki veći skup gubi svojstvo injektivnosti jer je $\sin([-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]) = \mathcal{R}(\sin)$.

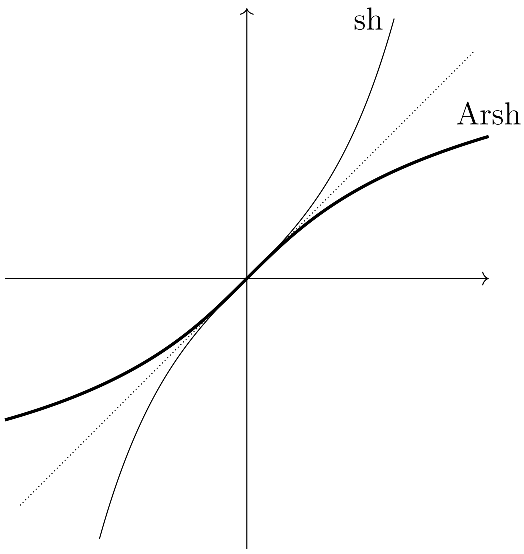


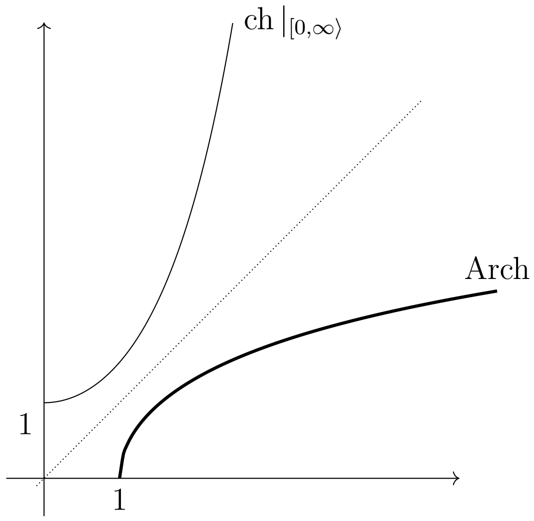
Sada se iz grafa funkcije f lako vidi da je $f([0,1]) = [-1,1]$ i $f^{-1}([0,1\rangle) = \langle -1, -\frac{\sqrt{2}}{2}] \cup [\frac{\sqrt{2}}{2}, 1\rangle$. $\square$

Zadatak 1.86 (za zadaću). Pokažite da je funkcija $f\colon [-1,1] \to [-1,1]$ s pravilom pridruživanja $f(x) = \cos(n \arccos(x))$ polinom za svaki $n \in \mathbf{N}$. (Uputa: Koristite matematičku indukciju.)

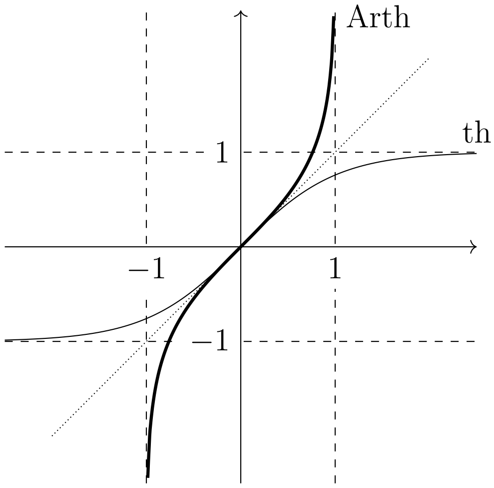
1.15. Area funkcije

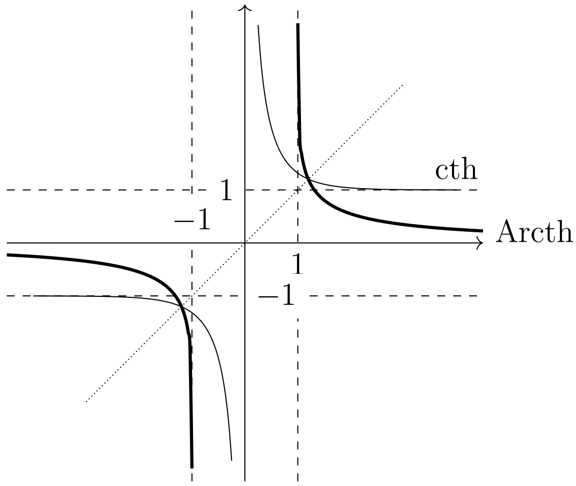
Odredimo sada inverze (po potrebi restrikcija) hiperbolnih funkcija iz Odjeljka 1.4. Podsjetimo se, funkcija sinus hiperbolni $\mathrm{sh}\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ je bijekcija (jer je strogo rastuća i $\mathcal{R}(\mathrm{sh}) = \mathbf{R}$), pa postoji inverzna funkcija $\mathrm{Arsh}\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ koju zovemo **area sinus hiperbolni**. Funkcija kosinus hiperbolni nije bijekcija, ali njena restrikcija $\mathrm{ch}|_{[0,\infty\rangle}\colon [0,\infty\rangle \to [1,\infty\rangle$ na $[0,\infty\rangle$ s kodomenom $\mathrm{ch}([0,\infty\rangle) = [1,\infty\rangle$ je (jer je strogo rastuća surjekcija). Pripadnu inverznu funkciju $\mathrm{Arch}\colon [1,\infty\rangle \to [0,\infty\rangle$ zovemo **area kosinus hiperbolni**.





Nadalje, $\mathrm{th}\colon \mathbf{R} \to \langle -1,1\rangle$ je bijekcija (strogo rastuća i $\mathcal{R}(\mathrm{th}) = \langle -1,1\rangle$) i njen inverz $\mathrm{Arth}\colon \langle -1,1\rangle \to \mathbf{R}$ zovemo **area tangens hiperbolni**. Funkcija $\mathrm{cth}\colon \mathbf{R}\setminus\{0\} \to \mathbf{R}\setminus[-1,1]$ je također bijekcija (jer je strogo padajuća i $\mathcal{R}(\mathrm{cth}) = \mathbf{R}\setminus[-1,1]$) i pripadni inverz $\mathrm{Arcth}\colon \mathbf{R}\setminus[-1,1] \to \mathbf{R}\setminus\{0\}$ zovemo **area kotangens hiperbolni**.





ZADATAK 1.87. Pokažite da je

(a) (za zadaću) $\operatorname{Arsh} y = \ln(y + \sqrt{y^2+1})$ za sve $y \in \mathbf{R}$,
(b) (za zadaću) $\operatorname{Arch} y = \ln(y + \sqrt{y^2-1})$ za sve $y \in [1, +\infty\rangle$,
(c) (za zadaću) $\operatorname{Arth} y = \ln\sqrt{\dfrac{1+y}{1-y}}$ za sve $y \in \langle -1, 1\rangle$,
(d) $\operatorname{Arcth} y = \ln\sqrt{\dfrac{y+1}{y-1}}$ za sve $y \in \langle -\infty, -1\rangle \cup \langle 1, +\infty\rangle$.

RJEŠENJE. (d) Neka je $y \in \langle -\infty, -1\rangle \cup \langle 1, +\infty\rangle$. Ako je $x = \operatorname{Arcth} y$, tada imamo

$$x = \operatorname{Arcth} y \implies \operatorname{cth} x = y \implies \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} = y \implies (1-y)(e^x)^2 + 1 + y = 0$$

$$\implies (e^x)^2 = \frac{y+1}{y-1} \implies e^x = \sqrt{\frac{y+1}{y-1}} \implies x = \ln\sqrt{\frac{y+1}{y-1}},$$

pa je tražena tvrdnja dokazana.

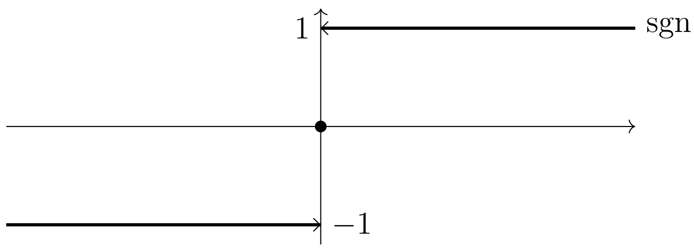
□

1.16. Još neke funkcije

DEFINICIJA 1.88. **Predznak** (ili **signum**) je funkcija $\operatorname{sgn}\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ s pravilom pridruživanja

$$\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} 1 & \text{za } x > 0 \\ 0 & \text{za } x = 0 \\ -1 & \text{za } x < 0. \end{cases}$$

Na primjer, $\operatorname{sgn}(\pi) = 1$, $\operatorname{sgn}(-2.9) = -1$, $\operatorname{sgn}(0) = 0$.



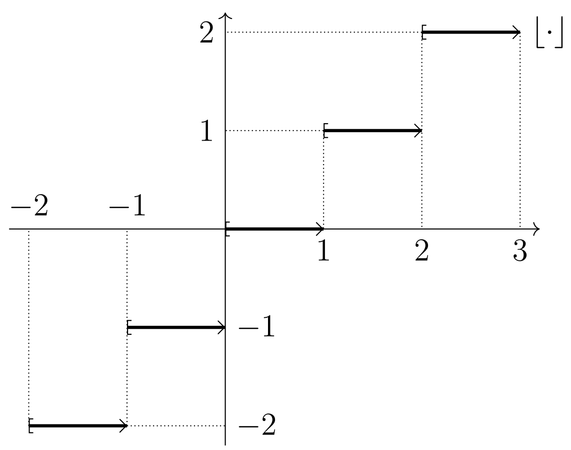
Definicija 1.89. **Najveće cijelo** (ili **pod**) je funkcija $\lfloor\cdot\rfloor\colon \mathbf{R}\to\mathbf{R}$ koja svakom $x\in\mathbf{R}$ pridružuje najveći cijeli broj manji ili jednak x. Drugim riječima,

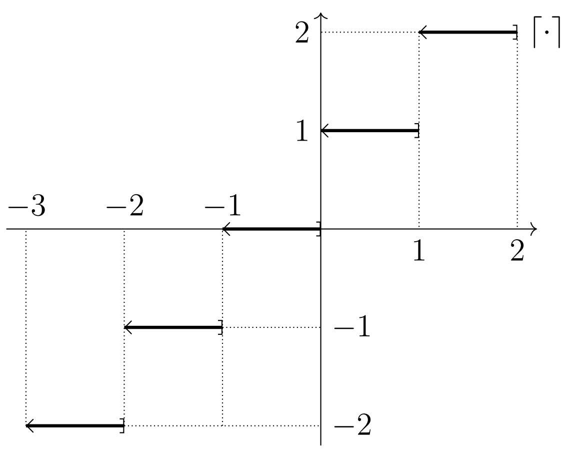
$$\lfloor x\rfloor = \max\{m\in\mathbf{Z} : m\le x\}.$$

Najmanje cijelo (ili **strop**) je funkcija $\lceil\cdot\rceil\colon \mathbf{R}\to\mathbf{R}$ koja svakom $x\in\mathbf{R}$ pridružuje najmanji cijeli broj veći ili jednak x. Drugim riječima,

$$\lceil x\rceil = \min\{m\in\mathbf{Z} : m\ge x\}.$$

Na primjer, $\lfloor\pi\rfloor = 3$, $\lfloor -2.9\rfloor = -3$, $\lfloor 4\rfloor = 4$, $\lfloor -5\rfloor = -5$ i $\lceil\pi\rceil = 4$, $\lceil -2.9\rceil = -2$, $\lceil 4\rceil = 4$, $\lceil -5\rceil = -5$. Navodimo i grafove, te skrećemo posebnu pozornost na rubove dužina od kojih su sastavljeni.





Zadatak 1.90. Neka je $f(x) = \left\lfloor \frac{x+1}{2}\right\rfloor$. Odredite $f(\langle 1,5])$, $f^{-1}(\langle 1,3])$ i $f(\mathbf{N})$.

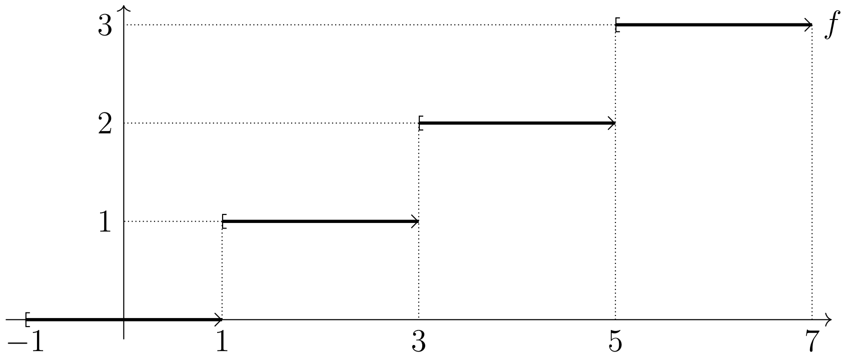
Rješenje. Zapišimo f kao kompoziciju $g_3\circ g_2\circ g_1$, pri čemu je

$$\begin{aligned} g_1\colon \mathbf{R}\to\mathbf{R},\quad & g_1(x) = x+1,\\ g_2\colon \mathbf{R}\to\mathbf{R},\quad & g_2(x) = \tfrac{x}{2},\\ g_3\colon \mathbf{R}\to\mathbf{R},\quad & g_3(x) = \lfloor x\rfloor. \end{aligned}$$

Tada je

$$\begin{aligned} f(\langle 1,5]) &= g_3(g_2(g_1(\langle 1,5]))) = g_3(g_2(\langle 2,6])) = g_3(\langle 1,3]) = \{1,2,3\},\\ f^{-1}(\langle 1,3]) &= g_1^{-1}(g_2^{-1}(g_3^{-1}(\langle 1,3]))) = g_1^{-1}(g_2^{-1}(g_3^{-1}(\langle 1,3]))) = g_1^{-1}(g_2^{-1}(g_3^{-1}(\{2,3\})))\\ &= g_1^{-1}(g_2^{-1}([2,4\rangle)) = g_1^{-1}([4,8\rangle) = [3,7\rangle,\\ f(\mathbf{N}) &= g_3(g_2(g_1(\mathbf{N}))) = g_3(g_2(\{2,3,4,5,6,\dots\})) = g_3(\{1,1.5,2,2.5,3,\dots\})) = \mathbf{N}. \end{aligned}$$

Zadatak smo mogli riješiti i iščitavanjem iz grafa funkcije f:



□

1.17. Razni zadaci

Zadatak 1.91. U svakom podzadatku, ispitajte je li funkcija $f(x) = x^4 - 4x^2 - 5$ injekcija na pripadnom intervalu i, ako jest, odredite joj sliku i inverz.

(a) $[2, 3\rangle$,

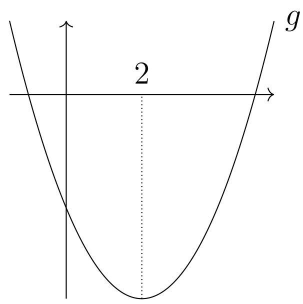
(b) $[1, 2\rangle$,

(c) $\langle -1, 0]$.

Rješenje. Funkciju f možemo zapisati kao kompoziciju $g \circ h$, pri čemu je

$$g\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}, \quad g(x) = x^2 - 4x - 5,$$
$$h\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}, \quad h(x) = x^2.$$

Sada koristimo ovakav rastav zasebno za svaki od danih intervala. Pri rješavanju će nam od koristi biti i graf funkcije g.



(a) Budući da je $h([2, 3\rangle) = [4, 9\rangle$, zaključujemo da je $f|_{[2,3\rangle} = (g|_{[4,9\rangle}) \circ (h|_{[2,3\rangle})$. Funkcija $h|_{[2,3\rangle}$ je strogo rastuća, pa stoga i injekcija, a iz grafa funkcije g vidimo da isto vrijedi i za funkciju $g|_{[4,9\rangle}$. Dakle, $f|_{[2,3\rangle}$ je kompozicija dviju injekcija pa iz Zadatka 1.62 znamo da je i sama injekcija. Također, $f([2, 3\rangle) = g([4, 9\rangle) = [-5, 40\rangle$.

Dakle, ako kodomenom funkcije $f|_{[2,3\rangle}$ smatramo njenu sliku $[-5, 40\rangle$, tada je ona bijekcija te ima inverz $(f|_{[2,3\rangle})^{-1}\colon [-5, 40\rangle \to [2, 3\rangle$. Budući da je $f|_{[2,3\rangle} = g|_{[4,9\rangle} \circ h|_{[2,3\rangle}$, te

$$g|_{[4,9\rangle}\colon [4, 9\rangle \to [-5, 40\rangle \quad \text{i} \quad h|_{[2,3\rangle}\colon [2, 3\rangle \to [4, 9\rangle,$$

iz Zadatka 1.79 slijedi da je

$$(f|_{[2,3\rangle})^{-1} = (h|_{[2,3\rangle})^{-1} \circ (g|_{[4,9\rangle})^{-1}, \tag{1.20}$$

pri čemu je

$$(g|_{[4,9\rangle})^{-1}\colon [-5,40\rangle \to [4,9\rangle \quad \text{i} \quad (h|_{[2,3\rangle})^{-1}\colon [4,9\rangle \to [2,3\rangle.$$

Odredimo sada $(g|_{[4,9\rangle})^{-1}(y)$ za svaki $y \in [-5,40\rangle$. Ako označimo tu vrijednost s x, tada imamo

$$\begin{aligned} x = (g|_{[4,9\rangle})^{-1}(y) &\implies g|_{[4,9\rangle}(x) = y \implies x^2 - 4x - 5 = y \\ &\implies x^2 - 4x - (5+y) = 0. \end{aligned}$$

U posljednjoj jednakosti y smatramo fiksiranim, a želimo pronaći x pa rješavanjem kvadratne jednadžbe dobivamo da je on jednak jednoj od dvije mogućnosti:

$$2 \pm \sqrt{9+y}.$$

Za koji se predznak moramo odlučiti? Prisjetimo se da mora biti $x \in [4,9\rangle$ (jer je to kodomena funkcije $(g|_{[4,9\rangle})^{-1}$). Budući da je $2 - \sqrt{9+y} \leq 2$, ta se vrijednost nikako ne može nalaziti u $[4,9\rangle$, pa zaključujemo da je $x = 2 + \sqrt{9+y}$ odnosno

$$(g|_{[4,9\rangle})^{-1}(y) = 2 + \sqrt{9+y}. \tag{1.21}$$

Odredimo još $(h|_{[2,3\rangle})^{-1}(y)$ za svaki $y \in [4,9\rangle$. Slijedimo isti postupak kao i prije:

$$x = (h|_{[2,3\rangle})^{-1}(y) \implies h|_{[2,3\rangle}(x) = y \implies x^2 = y.$$

Iz posljednje jednakosti vidimo da je x jednak jednoj od dvije mogućnosti $\pm\sqrt{y}$. Budući da je $x \in [2,3\rangle$ (kodomena funkcije $(h|_{[2,3\rangle})^{-1}$), zaključujemo da je $x = \sqrt{y}$ odnosno

$$(h|_{[2,3\rangle})^{-1}(y) = \sqrt{y}. \tag{1.22}$$

Iz jednakosti (1.20), (1.21) i (1.22) slijedi da je

$$(f|_{[2,3\rangle})^{-1}(y) = (h|_{[2,3\rangle})^{-1}((g|_{[4,9\rangle})^{-1}(y)) = (h|_{[2,3\rangle})^{-1}(2+\sqrt{9+y}) = \sqrt{2+\sqrt{9+y}}.$$

(b) Krećemo slično kao i prije – budući da je $h([1,2\rangle) = [1,4\rangle$, slijedi da je $f|_{[1,2\rangle} = g|_{[1,4\rangle} \circ h|_{[1,2\rangle}$. Funkcija $h|_{[1,4\rangle}$ je strogo rastuća, pa stoga i injekcija. Međutim, slična stvar ne vrijedi i za funkciju $g|_{[1,4\rangle}$, što se vjerojatno najjasnije vidi iz njenog grafa. Doista, na primjer, imamo da je $g(1) = g(3) = -8$ pa funkcija $g|_{[1,4\rangle}$ nije injekcija. Da $f|_{[1,2\rangle}$ nije injekcija sada možemo dokazati[21] tako da odaberemo točke iz njene domene koje funkcija $h|_{[1,2\rangle}$ šalje u točke 1 i 3 za koje smo pokazali da su *svjedoci* neinjektivnosti funkcije $g|_{[1,4\rangle}$. Doista,

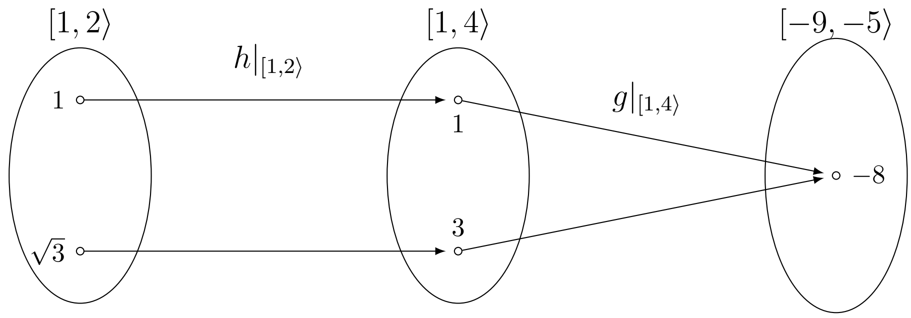
$$f|_{[1,2\rangle})(1) = g|_{[1,4\rangle}(h|_{[1,2\rangle}(1)) = g|_{[1,4\rangle}(1) = -8$$

[21]Uočimo da se sada *ne* možemo direktno pozvati na Zadatak 1.62 kako bi zaključili da ni $f|_{[1,2\rangle}$ nije injekcija. Naime, u tom zadatku nismo imali "ako i samo ako" – on je pokazivao da je kompozicija injekcija također injekcija, ali ne i da ako injekciju zapišemo kao kompoziciju nekih funkcija, da tada i te funkcije moraju biti injekcije. Štoviše, ta tvrdnja nije niti točna – na primjer, ako se vratimo na podzadatak (a) vidimo da je $g \circ (h|_{[2,3\rangle})$ također korektan zapis injekcije $f|_{[2,3\rangle}$. Međutim, funkcija g očito nije injekcija.

i

$$f|_{[1,2\rangle}(\sqrt{3}) = g|_{[1,4\rangle}(h|_{[1,2\rangle}(\sqrt{3})) = g|_{[1,4\rangle}(3) = -8,$$

pa zaključujemo da $f|_{[1,2\rangle}$ doista nije injekcija.



(c) Budući da je $h(\langle -1,0]) = [0,1\rangle$, zaključujemo da je $f|_{\langle -1,0]} = g|_{[0,1\rangle} \circ h|_{\langle -1,0]}$. Funkcije $h|_{\langle -1,0]}$ i $g|_{[0,1\rangle}$ su injekcije (jer su obje strogo padajuće), pa isto vrijedi i za njihovu kompoziciju, odnosno funkciju $f|_{\langle -1,0]}$. Nadalje, $f(\langle -1,0]) = g([0,1\rangle) = \langle -8,-5]$.

Dakle, ako kodomenom funkcije $f|_{\langle -1,0]}$ smatramo njenu sliku $\langle -8,-5]$, tada je ona bijekcija te ima inverz $(f|_{\langle -1,0]})^{-1} \colon \langle -8,-5] \to \langle -1,0]$. Budući da je $f|_{\langle -1,0]} = g|_{[0,1\rangle} \circ h|_{\langle -1,0]}$, te

$$g|_{[0,1\rangle} \colon [0,1\rangle \to \langle -8,-5] \quad \text{i} \quad h|_{\langle -1,0]} \colon \langle -1,0] \to [0,1\rangle,$$

zaključujemo da je

$$(f|_{\langle -1,0]})^{-1} = (h|_{\langle -1,0]})^{-1} \circ (g|_{[0,1\rangle})^{-1},$$

pri čemu je

$$(g|_{[0,1\rangle})^{-1} \colon \langle -8,-5] \to [0,1\rangle \quad \text{i} \quad (h|_{\langle -1,0]})^{-1} \colon [0,1\rangle \to \langle -1,0],$$

Da bismo odredili pravilo pridruživanja funkcije $(g|_{[0,1\rangle})^{-1}$, postupamo na isti način kao i prije te za $(g|_{[0,1\rangle})^{-1}(y)$ ponovno dobivamo da iste dvije mogućnosti $2 \pm \sqrt{9+y}$. Međutim, kako bi dobili vrijednost unutar $[0,1\rangle$ (kodomena funkcije $(g|_{[0,1\rangle})^{-1}$), slijedi da je

$$(g|_{[0,1\rangle})^{-1}(y) = 2 - \sqrt{9+y}.$$

Slično, kao i prije za $(h|_{\langle -1,0]})^{-1}(y)$ dobivamo mogućnosti $\pm\sqrt{y}$ pa da bi dobili vrijednost iz $\langle -1,0]$ (kodomena funkcije $(h|_{\langle -1,0]})^{-1}$), zaključujemo da je

$$(h|_{[2,3\rangle})^{-1}(y) = -\sqrt{y}.$$

Dakle,

$$(f|_{\langle -1,0]})^{-1}(y) = (h|_{\langle -1,0]})^{-1}((g|_{[0,1\rangle})^{-1}(y)) = (h|_{\langle -1,0]})^{-1}(2 - \sqrt{9+y}) = -\sqrt{2 - \sqrt{9+y}}.$$

□

Zadatak 1.92. Odredite sliku funkcije $f(x) = (|2x-1|-2)^3$ i $(f|_{\langle -\infty,\frac{1}{2}]})^{-1}$.

RJEŠENJE. Pozabavimo se najprije s $(f|_{\langle -\infty, \frac{1}{2}]})^{-1}$. Ako je

$$g\colon \left\langle -\infty, \tfrac{1}{2}\right] \to [0, +\infty\rangle, \quad g(x) = |2x-1| = 1-2x,$$
$$h\colon [0, +\infty\rangle \to [-8, +\infty\rangle, \quad h(x) = (x-2)^3,$$

tada je $f|_{\langle -\infty, \frac{1}{2}]} = h \circ g$. Napomenimo da smo kodomenu funkcije g odabrali tako da bude jednaka svojoj slici, domenu funkcije h tako da bude jednaka kodomeni funkcije g, te potom kodomenu funkcije h da bude jednaka svojoj slici.[22] Razlog ovakvog odabira *minimalnih* domena i kodomena je što time automatski osiguravamo surjektivnost i dobru definiranost kompozicija, pa ako želimo pričati o bijektivnosti (odnosno inverzima) moramo brinuti još jedino o injektivnosti.

Uočimo da smo u procesu odabiranja domena i kodomena funkcija g i h ujedno i izračunali da je $f(\langle -\infty, \frac{1}{2}]) = [-8, +\infty\rangle$.

Budući da je $(f|_{\langle -\infty, \frac{1}{2}]})^{-1} = g^{-1} \circ h^{-1}$, dovoljno je odrediti pravila pridruživanja funkcija

$$g^{-1}\colon [0, +\infty\rangle \to \left\langle -\infty, \tfrac{1}{2}\right] \quad \text{i} \quad h^{-1}\colon [-8, +\infty\rangle \to [0, +\infty\rangle.$$

Za $y \in [0, +\infty\rangle$ imamo

$$x = g^{-1}(y) \implies g(y) = x \implies 1 - 2x = y,$$

pa je $g^{-1}(y) = \frac{1-y}{2}$. S druge strane, za $y \in [-8, +\infty\rangle$ imamo

$$x = h^{-1}(y) \implies h(x) = y \implies (x-2)^3 = y,$$

pa je $h^{-1}(y) = y^{1/3} + 2$. Dakle,

$$f^{-1}(y) = g^{-1}(h^{-1}(y)) = g^{-1}(y^{1/3} + 2) = \frac{-1 - y^{1/3}}{2}.$$

Preostaje za odrediti sliku funkcije f. Ako malo promijenimo funkciju g tako su joj domena i kodomena jednaki $\mathbf{R}$, tada je $f = g \circ h$, pa je $\mathcal{R}(f) = h(g(\mathbf{R})) = h([0, +\infty\rangle) = [-8, +\infty\rangle$. $\square$

ZADATAK 1.93 (za zadaću). Odredite sliku funkcije $f(x) = -x^2 - 4x + 5$, $f^{-1}([-16, 0\rangle)$ i inverznu funkciju na području strogog pada.

ZADATAK 1.94. Neka je

$$f(x) = \frac{2^{\cos x} - 1}{2 + 2^{\cos x}}.$$

Pokažite da je f injekcija na $[\pi, 2\pi]$, te joj odredite inverz na tom intervalu.

[22]Dakle, krenuli smo od funkcije g s pravilom pridruživanja $g(x) = |2x-1|$, te smo uzeli da joj je domena $\langle -\infty, \frac{1}{2}]$ (jer je to domena funkcije $f|_{\langle -\infty, \frac{1}{2}]}$). Budući da je $g(\langle -\infty, \frac{1}{2}\rangle) = [0, +\infty\rangle$, uzeli smo da je kodomena funkcije g jednaka $[0, +\infty\rangle$, a kako se ove vrijednosti dalje šalju funkciji h s pravilom pridruživanja $h(x) = (x-2)^3$, uzeli smo da je to i njena domena. Budući da je $h([0, +\infty\rangle) = [-8, +\infty\rangle$, uzeli smo da je kodomena funkcije h jednaka $[-8, +\infty\rangle$.

RJEŠENJE. Definirajmo funkcije

$$\begin{aligned} &g_1\colon [\pi, 2\pi] \to [-1,1], \quad g_1(x) = \cos x, \\ &g_2\colon [-1,1] \to [\tfrac{1}{2}, 2], \quad g_2(x) = 2^x, \\ &g_3\colon [\tfrac{1}{2}, 2] \to [-\tfrac{1}{5}, \tfrac{1}{4}], \quad g_3(x) = \tfrac{x-1}{2+x} = 1 - \tfrac{3}{2+x}. \end{aligned}$$

Uočimo da smo kodomene funkcija g_1, g_2 i g_3 birali tako da sve tri budu surjekcije,[23] pa zaključujemo da je i funkcija $f|_{[\pi,2\pi]} = g_3 \circ g_2 \circ g_1$ surjekcija. Iz posljednje jednakosti zaključujemo da će injektivnost funkcije $f|_{[\pi,2\pi]}$ slijediti automatski ukoliko uspijemo dokazati da su i funkcije g_1, g_2 i g_3 injektivne.

Da je funkcija g_1 injektivna slijedi iz definicije kosinusa (a i jasno je vidljivo na njegovom grafu). Eksponencijalna funkcija g_2 je strogo rastuća pa i injektivna – štoviše, isto bi vrijedilo i da smo za njenu domenu uzeli čak i cijeli $\mathbf{R}$. Dokažimo još i da je g_3 injektivna. Neka je $g_3(x_1) = g_3(x_2)$ za neke $x_1, x_2 \in [\frac{1}{2}, 2]$. Tada je

$$1 - \tfrac{3}{2+x_1} = 1 - \tfrac{3}{2+x_2} \implies 1 - \tfrac{3}{2+x_1} = 1 - \tfrac{3}{2+x_2} \implies x_1 = x_2,$$

pa slijedi da je g_3 doista injekcija.

Iz prethodno dokazanog zaključujemo da je $f|_{[\pi,2\pi]}$ bijekcija. Pronađimo njen inverz koristeći identitet $(f|_{[\pi,2\pi]})^{-1} = g_1^{-1} \circ g_2^{-1} \circ g_3^{-1}$.

Budući da g_1 ima pravilo pridruživanja $g_1(x) = \cos x$, mogli bismo pomisliti da je njen inverz funkcija arccos. Međutim, uočimo da je

$$g_1^{-1}\colon [-1,1] \to [\pi, 2\pi], \quad \text{ali} \quad \arccos\colon [-1,1] \to [0,\pi].$$

Dakle, g_1^{-1} i arccos šalju iste elemente domene u različite skupove pa nikako ne mogu biti jednake. Ideja nam je sada da koristimo neke poznate trigonometrijske identitete kako bismo argument x u $\cos x$ iz pravila pridruživanja funkcije g_1 (dakle, $x \in [\pi, 2\pi]$) transformirali u neki drugi argument koji će se, za razliku od x, nalaziti u $[0, \pi]$ – kodomeni funkcije arccos. Neka je, dakle, $x \in [\pi, 2\pi]$. Znamo da uvijek vrijedi da je $\cos x = \cos(-x)$. Ovime smo argument x promijenili i tako došli do argumenta $-x$ koji je u $[-2\pi, -\pi]$. Nadalje, iz periodičnosti kosinusa znamo da je $\cos(-x) = \cos(2\pi - x)$, a za novi argument vrijedi $2\pi - x \in [0, \pi]$.

Uzmimo sada neki proizvoljni $y \in [-1, 1]$, te uočimo da je

$$x = g_1^{-1}(y) \implies g_1(x) = y \implies \cos x = y \implies \cos(2\pi - x) = y \implies 2\pi - x = \arccos y,$$

pri čemu smo u posljednjoj jednakosti iskoristili da je $2\pi - x$. Dakle, $g_1^{-1}(y) = 2\pi - \arccos y$.

[23] Naći kodomenu (odnosno sliku) funkcija g_1 i g_2 je trivijalno, dok za funkciju g_3 to radimo na standardni način – ako je

$$\begin{aligned} &h_1\colon [\tfrac{1}{2}, 2] \to \mathbf{R}, \quad h_1(x) = 2 + x, \\ &h_2\colon \mathbf{R} \setminus \{0\} \to \mathbf{R}, \quad h_2(x) = \tfrac{3}{x}, \\ &h_3\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}, \quad h_3(x) = 1 - x, \end{aligned}$$

tada je $g_3 = h_3 \circ h_2 \circ h_1$. Otuda je

$$\mathcal{R}(g) = h_3(h_2(h_1([\tfrac{1}{2}, 2]))) = h_3(h_2([\tfrac{5}{2}, 4])) = h_3([\tfrac{3}{4}, \tfrac{6}{5}]) = [-\tfrac{1}{5}, \tfrac{1}{4}].$$

Inverz eksponencijalne funkcije je logaritamska funkcija pa odmah možemo pisati da je $g_2^{-1}(y) = \log_2 y$ za sve $y \in [\frac{1}{2}, 2]$.

Preostaje pronaći pravilo pridruživanja funkcije g_3^{-1}. Za proizvoljni y iz $[-\frac{1}{5}, \frac{1}{4}]$ (domena funkcije g_3^{-1}) imamo

$$x = g_3^{-1}(y) \implies g_3(x) = y \implies 1 - \tfrac{3}{2+x} = y \implies x = -2 + \tfrac{3}{1-y}.$$

Dakle, $g_3^{-1}(y) = -2 + \frac{3}{1-y} = \frac{1+2y}{1-y}$, pa je

$$\begin{aligned}(f|_{[\pi,2\pi]})^{-1}(y) &= g_1^{-1}(g_2^{-1}(g_3^{-1}(y))) = g_1^{-1}\left(g_2^{-1}\left(\tfrac{1+2y}{1-y}\right)\right) = g_1^{-1}\left(\log_2\left(\tfrac{1+2y}{1-y}\right)\right)\\ &= 2\pi - \arccos\left(\log_2\left(\tfrac{1+2y}{1-y}\right)\right).\end{aligned}$$

$\square$

Zadatak 1.95 (za zadaću). Neka je

$$f(x) = e^{\sqrt{\frac{x^2+1}{2x^2+3}}}.$$

Odredite sliku funkcije f, pokažite da je f injekcija na $[0, +\infty\rangle$, te odredite $(f|_{[0,+\infty\rangle})^{-1}$.

Zadatak 1.96. Za funkciju $f\colon \mathbf{R} \to [2, 4]$ s pravilom pridruživanja

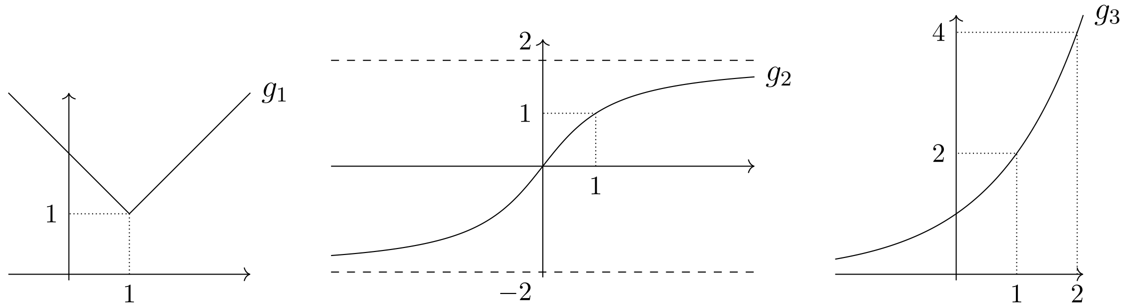
$$f(x) = 2^{\frac{4}{\pi}\operatorname{arctg}(|x-1|+1)}$$

odredite $f([0, +\infty\rangle)$ i $f^{-1}(f([0, +\infty\rangle))$. Je li f surjekcija?

Rješenje. Definirajmo funkcije

$$\begin{aligned} g_1&\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}, \quad g_1(x) = |x-1| + 1,\\ g_2&\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}, \quad g_2(x) = \tfrac{4}{\pi}\operatorname{arctg} x,\\ g_3&\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}, \quad g_3(x) = 2^x.\end{aligned}$$

Uočimo da su pravila pridruživanja funkcija f i $g_3 \circ g_2 \circ g_1$ ista,[24] pa je $f([0, +\infty\rangle) = (g_3 \circ g_2 \circ g_1)([0, +\infty\rangle)$.



Iz grafova funkcija g_1, g_2 i g_3 sada je jasno da je

$$f([0, +\infty\rangle) = g_3(g_2(g_1([0, +\infty\rangle))) = g_3(g_2([1, +\infty\rangle)) = g_3([1, 2\rangle) = [2, 4\rangle.$$

[24] Strogo gledano, ne možemo baš reći da je $f = g_3 \circ g_2 \circ g_1$ budući da im se kodomene ne podudaraju. Međutim, ovaj detalj je nebitan za određivanje slika i praslika.

Uočimo da je $g_1(\mathbf{R})$ također jednako $[1,+\infty$ pa iz ponavljajući prethodni niz jednakosti dobivamo i da je $\mathcal{R}(f)=[2,4\rangle$ pa f nije surjekcija je $4\notin\mathcal{R}(f)$. Budući da smo dobili da je $f([0,+\infty)=\mathcal{R}(f)$, slijedi da je $f^{-1}(f([0,+\infty))=\mathbf{R}$. $\square$

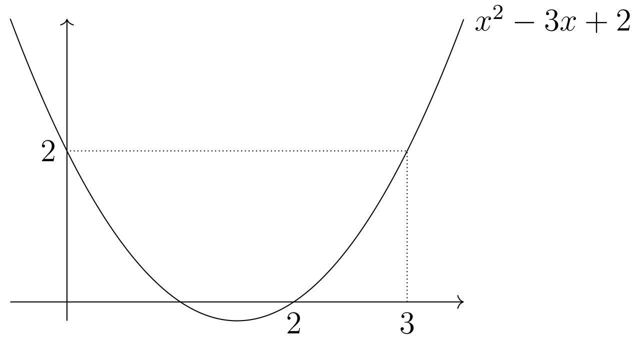
Zadatak 1.97. Neka je

$$f(x)=e^{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{8}(x^2-3x+2)\right)}.$$

Pokažite da je f injekcija na $[2,3]$, te odredite $(f|_{[2,3]})^{-1}$.

Rješenje. Definirajmo donje funkcije, paralelno namještajući domene i kodomene tako sve funkcije budu surjekcije, te da vrijedi da je $f|_{[2,3]}=g_4\circ g_3\circ g_2\circ g_1$:

$$\begin{aligned} &g_1\colon[2,3]\to[0,2], &&g_1(x)=x^2-3x+2,\\ &g_2\colon[0,2]\to[0,\tfrac{\pi}{4}], &&g_2(x)=\tfrac{\pi}{8}x,\\ &g_3\colon[0,\tfrac{\pi}{4}]\to[0,1], &&g_3(x)=\operatorname{tg}x,\\ &g_4\colon[0,1]\to[1,e], &&g_4(x)=e^x. \end{aligned}$$



Za funkcije g_1, g_2, g_3 i g_4 sada je jasno da su injekcije (štoviše, sve četiri čak su i strogo rastuće) pa isto vrijedi i za njihovu kompoziciju, odnosnu funkciju $f|_{[2,3]}$.

Odredimo još i traženi inverz koristeći identitet $(f|_{[2,3]})^{-1}=g_1^{-1}\circ g_2^{-1}\circ g_3^{-1}\circ g_4^{-1}$. Krećemo s funkcijom g_1^{-1}:

$$x=g_1^{-1}(y)\implies g_1(x)=y\implies x^2-3x+2-y=0,$$

pa za x dobivamo mogućnosti $\frac{3\pm\sqrt{9-4(2-y)}}{2}=\frac{3\pm\sqrt{1+4y}}{2}$. Budući da je $x=g_1^{-1}(y)\in[2,3]$, mora biti $g_1^{-1}(y)=\frac{3+\sqrt{1+4y}}{2}$.

Za g_2^{-1} imamo

$$x=g_2^{-1}(y)\implies g_2(x)=y\implies \tfrac{\pi}{8}x=y\implies x=\tfrac{8}{\pi}y,$$

pa je $g_2^{-1}(y)=\frac{8}{\pi}y$.

Nadalje, za g_3^{-1} je

$$x=g_3^{-1}(y)\implies g_3(x)=y\implies \operatorname{tg}x=y\implies x=\operatorname{arctg}y,$$

pri čemu posljednja jednakost vrijedi jer je $x\in[0,\frac{\pi}{4}]\subseteq\langle-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\rangle$ (kodomena od arctg)[25]. Zaključujemo da je $g_3^{-1}(y)=\operatorname{arctg}y$.

[25]Usporedite s određivanjem inverza funkcije g_1 u Zadatku 1.94.

Konačno, za funkciju g_4^{-1} imamo

$$x = g_4^{-1}(y) \implies g_4(x) = y \implies e^x = y \implies x = \ln y,$$

odnosno $g_4^{-1}(y) = \ln y$.

Komponiranjem dobivenih inverza dobivamo

$$\begin{aligned}(f|_{[2,3]})^{-1}(y) &= g_1^{-1}(g_2^{-1}(g_3^{-1}(g_4^{-1}(y)))) = g_1^{-1}(g_2^{-1}(g_3^{-1}(\ln y))) = g_1^{-1}(g_2^{-1}(\operatorname{arctg}(\ln y))) \\ &= g_1^{-1}(\tfrac{8}{\pi}\operatorname{arctg}(\ln y)) = \frac{3 + \sqrt{1 + \frac{32}{\pi}\operatorname{arctg}(\ln y)}}{2}.\end{aligned}$$

$\square$

Zadatak 1.98. Neka je

$$f(x) = \sqrt{\frac{-x^2 - 2x + 3}{2x^2 + 4x + 9}}.$$

Odredite $\mathcal{D}(f)$, $\mathcal{R}(f)$, te pokažite da f nije injekcija. Nadalje, pokažite da je $f|_{[-3,-1]}$ injekcija te odredite $(f|_{[-3,-1]})^{-1}$.

Rješenje. Uočimo da pravilo pridruživanja funkcije f možemo alternativno zapisati kao

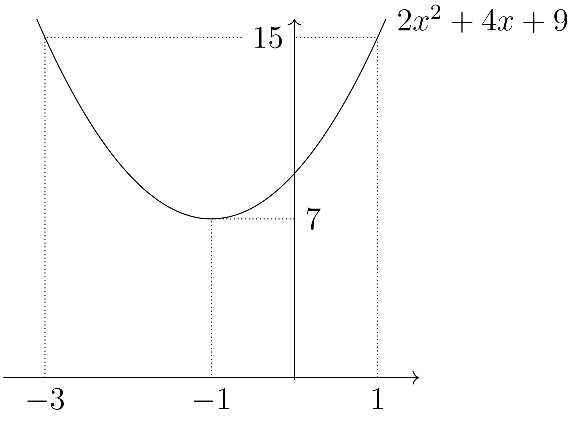
$$f(x) = \sqrt{-\frac{1}{2} + \frac{15}{2}\frac{1}{2x^2 + 4x + 9}}.$$

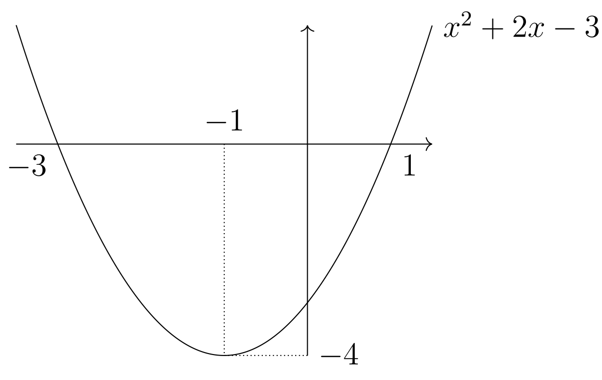
Prirodnu domenu određujemo tako da tražimo sve $x \in \mathbf{R}$ za koje je

$$2x^2 + 4x + 9 \neq 0 \quad \text{i} \quad -\frac{1}{2} + \frac{15}{2}\frac{1}{2x^2 + 4x + 9} \geq 0.$$

Uočimo da je prvi uvjet zadovoljen za sve $x \in \mathbf{R}$ (diskriminanta kvadratne funkcije je $-56 < 0$), dok za drugi imamo

$$-\frac{1}{2} + \frac{15}{2}\frac{1}{2x^2 + 4x + 9} \geq 0 \iff 15 \geq 2x^2 + 4x + 9 \iff 0 \geq x^2 + 2x - 3.$$





Posljednja nejednakost zadovoljena je za $x \in [-3, 1]$, pa je $\mathcal{D}(f) = [-3, 1]$.

Da bismo odredili $\mathcal{R}(f)$, definiramo funkcije

$$\begin{aligned}
&g_1\colon [-3,1] \to [7,15], \quad g_1(x) = 2x^2+4x+9,\\
&g_2\colon [7,15] \to [\tfrac{1}{15},\tfrac{1}{7}], \quad g_2(x) = \tfrac{1}{x},\\
&g_3\colon [\tfrac{1}{15},\tfrac{1}{7}] \to [0,\tfrac{4}{7}], \quad g_3(x) = -\tfrac{1}{2}+\tfrac{15}{2}x,\\
&g_4\colon [0,\tfrac{4}{7}] \to [0,\tfrac{2}{\sqrt{7}}], \quad g_4(x) = \sqrt{x}.
\end{aligned}$$

Uočimo da je $f = g_4 \circ g_3 \circ g_2 \circ g_1$, te da smo pri određivanju kodomena funkcija g_1, g_2, g_3 i g_4 ujedno i izračunali da je $\mathcal{R}(f) = [0, \frac{2}{\sqrt{7}}]$.

Uočimo da su funkcije g_2, g_3 i g_4 injekcije – štoviše, bile bi injekcije čak i da smo ih promatrali na njihove prirodnim domenama. S druge strane, funkcija g_1 *nije* injekcija. Međutim njena restrikcija $g_1|_{[-3,-1]}$, što je vidljivo na njenom gore prikazanom grafu (čak je i strogo padajuća). Budući da je $f|_{[-3,-1]} = g_4 \circ g_3 \circ g_2 \circ (g_1|_{[-3,-1]})$, zaključujemo da je i $f|_{[-3,-1]}$ injekcija.

Odredimo još inverz $(f|_{[-3,-1]})^{-1} = (g_1|_{[-3,-1]})^{-1} \circ g_2^{-1} \circ g_3^{-1} \circ g_4^{-1}$. Imamo

$$x = (g_1|_{[-3,-1]})^{-1}(y) \implies g_1|_{[-3,-1]}(x) = y \implies 2x^2+4x+9-y = 0,$$

pa za x dobivamo mogućnosti $\frac{-4\pm\sqrt{16-8(9-y)}}{4} = -1\pm\sqrt{\frac{y-7}{2}}$. Budući da je $x = (g_1|_{[-3,-1]})^{-1}(y) \in [-3,-1]$ (kodomena funkcije $(g_1|_{[-3,-1]})^{-1}$), slijedi da je

$$(g_1|_{[-3,-1]})^{-1}(y) = -1-\sqrt{\tfrac{y-7}{2}}.$$

Za inverz funkcije g_2 lako dobivamo da ima pravilo pridruživanja $g_2^{-1}(y) = \frac{1}{y}$, dok za inverz funkcije g_3 imamo

$$x = g_3^{-1}(y) \implies g_3(x) = y \implies -\tfrac{1}{2}+\tfrac{15}{2}x = y \implies x = \tfrac{2y+1}{15},$$

pa je $g_3^{-1}(y) = \frac{2y+1}{15}$. Konačno, lako dobivamo da inverz funkcije g_4 ima pravilo pridruživanja $g_4^{-1}(y) = y^2$.

Dakle,

$$\begin{aligned}
(f|_{[-3,-1]})^{-1}(y) &= (g_1|_{[-3,-1]})^{-1}(g_2^{-1}(g_3^{-1}(g_4^{-1}(y)))) = (g_1|_{[-3,-1]})^{-1}(g_2^{-1}(g_3^{-1}(y^2)))\\
&= (g_1|_{[-3,-1]})^{-1}\left(g_2^{-1}\left(\tfrac{2y^2+1}{15}\right)\right) = (g_1|_{[-3,-1]})^{-1}\left(\tfrac{15}{2y^2+1}\right)\\
&= -1-\sqrt{\tfrac{\frac{15}{2y^2+1}-7}{2}} = -1-\sqrt{\frac{4-7y^2}{2y^2+1}}.
\end{aligned}$$

□

Zadatak 1.99. Neka su $f_1,\dots,f_n\colon \mathbf{R}\to\mathbf{R}$ monotone funkcije (ne moraju biti iste vrste, tj. moguće je da su neke padajuće, a druge rastuće). Dokažite da je i $f_1\circ\cdots\circ f_n$ monotona funkcija. Možete li, u ovisnosti o funkcijama $f_1,\dots,f_n$ reći kada će biti rastuća, a kada padajuća?

Rješenje. Dokaz najlakše možemo prezentirati na jednom konkretnom primjeru. Pretpostavimo da imamo četiri funkcije f_1, f_2, f_3 i f_4, te da su f_1 i f_4 rastuće, a f_2 i f_3 padajuće.

Neka su $x_1, x_2 \in \mathbf{R}$ takvi da je $x_1 < x_2$. Sada imamo

$$\begin{aligned} x_1 < x_2 &\overset{f_4 \text{ rastuća}}{\Longrightarrow} f_4(x_1) \le f_4(x_2) \\ &\overset{f_3 \text{ padajuća}}{\Longrightarrow} f_3(f_4(x_1)) \ge f_3(f_4(x_2)) \\ &\overset{f_2 \text{ padajuća}}{\Longrightarrow} f_2(f_3(f_4(x_1))) \le f_2(f_3(f_4(x_2))) \\ &\overset{f_1 \text{ rastuća}}{\Longrightarrow} f_1(f_2(f_3(f_4(x_1)))) \le f_1(f_2(f_3(f_4(x_2)))) \end{aligned}$$

Dakle, dobili smo implikaciju

$$x_1, x_2 \in \mathbf{R}, x_1 < x_2 \implies (f_1 \circ f_2 \circ f_3 \circ f_4)(x_1) \le (f_1 \circ f_2 \circ f_3 \circ f_4)(x_2).$$

Drugim riječima, $f_1 \circ f_2 \circ f_3 \circ f_4$ je rastuća funkcija.

Kako bi išao ovaj dokaz za općenite funkcije $f_1, \dots, f_n$? Uočimo da je u gornjem dokazu nakon djelovanja funkcije f_i znak nejednakosti ostao nepromijenjen ako je f_i bila rastuća, dok se obrnuo ako je f_i bila padajuća. To znači da, će nakon primjene svih n funkcija $f_1, \dots, f_n$ znak nejednakosti biti obrnut od onoga s kojim smo krenuli (znak nejednakosti između x_1 i x_2) ukoliko je među funkcijama $f_1, \dots, f_n$ njih neparno mnogo padajuće. U tom je slučaju funkcija $f_1 \circ \dots \circ f_n$ padajuća. S druge strane, ukoliko je među funkcijama $f_1, \dots, f_n$ njih parno mnogo padajuće tada je konačni znak nejednakosti jednak početnom pa je funkcija $f_1 \circ \dots \circ f_n$ rastuća. □

Neka su $f_1, \dots, f_n \colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$. **Suma funkcija** $f_1, \dots, f_n$ je funkcija $f_1 + \dots + f_n \colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ s pravilom pridruživanja $(f_1 + \dots + f_n)(x) = f_1(x) + \dots + f_n(x)$.

Uočimo da ako su funkcije $f_1, \dots, f_n$ strogo rastuće, tada je i funkcija $f_1 + \dots + f_n$ strogo rastuća. Doista za proizvoljne $x_1, x_2 \in \mathbf{R}$ takve da je $x_1 < x_2$ znamo da je $f_1(x_1) < f_1(x_2)$, $\dots$, $f_n(x_1) < f_n(x_2)$ (zbog pretpostavke da su $f_1, \dots, f_n$ strogo rastuće). Zbrajanjem ovih n nejednakosti dobivamo da je $f_1(x_1) + \dots + f_n(x_1) < f_1(x_2) + \dots + f_n(x_2)$, odnosno $(f_1 + \dots + f_n)(x_1) < (f_1 + \dots + f_n)(x_2)$, pa je i funkcija $f_1 + \dots + f_n$ doista strogo rastuća. Naravno, analogni bi zaključak vrijedio i da smo umjesto pretpostavke da su $f_1, \dots, f_n$ strogo rastuće, radili s pretpostavkom da su one rastuće, strogo padajuće ili padajuće.

Zadatak 1.100. Odredite rješenja sljedećih jednadžbi.

(a) $2^x + \log_2 x + x = 7$,
(b) $2^{3^{4^{5^x}}} = 6$,
(c) $x^{2020} + 2x^{1002} + 3x^6 = 6$.

Rješenje. (a) Primjetimo da je $x = 2$ jedno rješenje. Dokažimo da ne postoje druga. Neka su $g_1, g_2, g_3 \colon \langle 0, +\infty \rangle \to \mathbf{R}$ funkcije s pravilima pridruživanja

$$g_1(x) = 2^x, \quad g_2(x) = \log_2 x, \quad g_3(x) = x.$$

Zadatak se u biti svodi na traženje svih onih $x \in \langle 0, +\infty \rangle$ za koje je $(g_1 + g_2 + g_3)(x) = 7$.

Uočimo da su funkcije g_1, g_2, g_3 strogo rastuće, pa po komentarima koji se u prethodili zadatku isto vrijedi i za $g_1 + g_2 + g_3$. Zbog toga je ta funkcija injekcija, pa postoji *najviše jedan* x takav da je $(g_1 + g_2 + g_3)(x) = 7$. Budući da smo takav x već našli, zaključujemo da je on bio jedino rješenje.

(b) Ako su $g_1, g_2, g_3, g_4 \colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ funkcije s pravilima pridruživanja

$$g_1(x) = 5^x, \quad g_2(x) = 4^x, \quad g_3(x) = 3^x, \quad g_4(x) = 2^x,$$

tada se zadatak svodi na traženje svih $x \in \mathbf{R}$ za koje je $(g_4 \circ g_3 \circ g_2 \circ g_1)(x) = 6$. Budući da su funkcije g_2, g_3 i g_4 strogo rastuće, po Zadataku 1.99 isto vrijedi i za $g_4 \circ g_3 \circ g_2$. Za svaki $x \in \mathbf{R}$, koristeći $g_1(x) > 0$, dobivamo

$$(g_4 \circ g_3 \circ g_2 \circ g_1)(x) = (g_4 \circ g_3 \circ g_2)(g_1(x)) > (g_4 \circ g_3 \circ g_2)(0) = 2^{3^{4^0}} = 8.$$

Zaključujemo da dana jednadžba nema rješenja.

(c) Primjetimo da su $x = 1$ i $x = -1$ dva rješenja dane jednadžbe. Dokažimo da ne postoje druga.

Ako su $g_1, g_2, g_3 \colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ funkcije s pravilima pridruživanja

$$g_1(x) = x^{2020}, \quad g_2(x) = 2x^{1002}, \quad g_3(x) = 3x^6,$$

tada se zadatak svodi na pronalazak svih $x \in \mathbf{R}$ za koje je $(g_1 + g_2 + g_3)(x) = 6$. Funkcije g_1, g_2 i g_3 nisu monotone, međutim $g_1|_{[0,+\infty\rangle}$, $g_2|_{[0,+\infty\rangle}$ i $g_3|_{[0,+\infty\rangle}$ jesu – sve tri su strogo rastuće. Zaključujemo da je i $(g_1+g_2+g_3)|_{[0,+\infty\rangle} = g_1|_{[0,+\infty\rangle} + g_2|_{[0,+\infty\rangle} + g_3|_{[0,+\infty\rangle}$ strogo rastuća pa onda i injekcija. Otuda slijedi da dana jednadžba ima najviše jedno rješenje u skupu $[0, +\infty\rangle$.

Na potpuno isti način primjećujemo da su funkcije $g_1|_{\langle-\infty,0\rangle}$, $g_2|_{\langle-\infty,0\rangle}$ i $g_3|_{\langle-\infty,0\rangle}$ strogo padajuće, odakle istim nizom zaključivanja kao i prije dolazimo do toga da dana jednadžba ima najviše jedno rješenje u skupu $\langle-\infty, 0\rangle$.

Dakle, dana jednadžba ima najviše dva rješenja, pa slijedi da dva rješenja koja smo naveli odmah na početku dokaza su bila i jedina.

□

Zadatak 1.101. Odredite prirodnu domenu sljedećih funkcija.

(a) $f(x) = \dfrac{\sqrt{\ln(3 - |x|)}}{\ln|x|}$,

(b) $f(x) = \log_\pi(\sqrt{x^2 + 4x + 3} + 5x + 3)$,

(c) $f(x) = \log_{16-x^2} \dfrac{x^2 + 4x - 5}{\sqrt{9^x - 8 \cdot 3^x - 9}}$,

(d) $f(x) = \sqrt{\dfrac{(x-2)^{44}(x+1)^{55}(-x^2+3x-9)}{(x-3)^{77}(x^2+x-2)}}$,

(e) $f(x) = \arccos\left(\operatorname{tg} \dfrac{x+1}{x}\right)$,

(f) $f(x) = \arcsin\left(\log_{\frac{1}{2}} \dfrac{2+x}{1+x}\right)$,

(g) $f(x) = \ln\left(\log_x(2x^2 - 5x + 3)\right)$.

Rješenje. (a) Prirodna domena sastojat će se od svih onih $x \in \mathbf{R}$ za koje vrijedi svaki od sljedećih uvjeta:

(i) $|x| > 0$ (argument logaritma je pozitivan),

(ii) $\ln|x| \neq 0$ (nazivnik nije 0),

(iii) $3 - |x| > 0$ (argument logaritma je pozitivan),

(iv) $\ln(3 - |x|) \geq 0$ (argument kvadratnog korijena je nenegativan).

Uočimo da je uvjet (iv) ekvivalentan s $3 - |x| \geq 1$, a ako je taj uvjet ispunjen, automatski će biti ispunjeno i (iii). To znači da o uvjetu (iii) više ne moramo posebno brinuti.

Budući da je

$$\begin{aligned} &\text{(i)} \iff x \neq 0, \\ &\text{(ii)} \iff |x| \neq 1 \iff x \neq \pm 1, \\ &\text{(iv)} \iff |x| \leq 2 \iff x \in [-2, 2]. \end{aligned}$$

Promatranjem koji $x \in \mathbf{R}$ zadovoljavaju sva ova svojastva, dobivamo da je $\mathcal{D}(f) = [-2, 2] \setminus \{-1, 0, 1\}$.

(b) Prirodna domena sastojat će se od svih onih $x \in \mathbf{R}$ koji zadovoljavaju sljedeća dva uvjeta:

(i) $x^2 + 4x + 3 \geq 0$ (argument kvadratnog korijena je nenegativan),

(ii) $\sqrt{x^2 + 4x + 3} + 5x + 3 > 0$ (argument logaritma je pozitivan).

Promatranjem nultočki kvadratnog polinoma na lijevoj strani uvjeta (i), lako dobivamo da je

$$\text{(i)} \iff x \in \langle -\infty, -3] \cup [-1, +\infty\rangle. \tag{1.23}$$

Uvjet (ii) će očito biti zadovoljen ako je $5x + 3 > 0$ (odnosno $x \in \langle -\frac{3}{5}, +\infty\rangle$). S druge strane, ako je $5x + 3 \leq 0$ (što je ekvivalentno s $x \in \langle -\infty, -\frac{3}{5}]$), tada, budući da su joj obje strane nenegativne, nejednakost $\sqrt{x^2 + 4x + 3} > -(5x + 3)$ možemo kvadrirati i doći do

$$\begin{aligned} & x \in \langle -\infty, -\tfrac{3}{5}] \text{ i } x^2 + 4x + 3 > 25x^2 + 30x + 9 \\ & \iff x \in \langle -\infty, -\tfrac{3}{5}] \text{ i } 12x^2 + 13x + 3 < 0 \\ & \iff x \in \langle -\infty, -\tfrac{3}{5}] \text{ i } x \in \langle -\tfrac{3}{4}, -\tfrac{1}{3}\rangle \\ & \iff x \in \langle -\tfrac{3}{4}, -\tfrac{3}{5}]. \end{aligned}$$

Dakle,

$$\text{(ii)} \iff x \in \langle -\tfrac{3}{5}, +\infty\rangle \text{ ili } x \in \langle -\tfrac{3}{4}, -\tfrac{3}{5}] \iff x \in \langle -\tfrac{3}{4}, +\infty\rangle. \tag{1.24}$$

Promatranjem koji $x \in \mathbf{R}$ koji zadovoljavaju i (1.23) i (1.24) zaključujemo da je $\mathcal{D}(f) = \langle -\frac{3}{4}, +\infty\rangle$.

(c) Zanima nas koji $x \in \mathbf{R}$ koji zadovoljavaju svaki od sljedećih uvjeta:

(i) $16 - x^2 > 0$ (baza logaritma je pozitivna),

(ii) $16 - x^2 \neq 1$ (baza logaritma nije 1),

(iii) $\frac{x^2+4x-5}{\sqrt{9^x-8\cdot 3^x-9}} > 0$ (argument logaritma je pozitivan),

(iv) $9^x - 8 \cdot 3^x - 9 > 0$ (argument kvadratnog korijena je nenegativan i nazivnik nije 0).

Lagano dobivamo da je Budući da je

$$\text{(i)} \iff x \in \langle -4, 4\rangle,$$

$$\text{(ii)} \iff |x| \neq \pm\sqrt{15},$$

$$\text{(iii)} \overset{\text{ako vrijede ostali uvjeti}}{\iff} x^2 + 4x - 5 > 0 \iff x \in \langle -\infty, -5\rangle \cup \langle 1, +\infty\rangle.$$

Lijevu stranu uvjeta (iv) možemo faktorizirati i tako dobiti

$$\text{(iv)} \iff (3^x - 9)(3^x + 1) > 0 \overset{3^x+1>0}{\iff} 3^x - 9 > 0 \iff x \in \langle 2, +\infty\rangle.$$

Dakle, $\mathcal{D}(f) = \langle 2, 4\rangle \setminus \{\sqrt{15}\}$.

(d) Tražimo sve $x \in \mathbf{R}$ koji zadovoljavaju sljedeća dva uvjeta:

(i) $\frac{(x-2)^{44}(x+1)^{55}(-x^2+3x-9)}{(x-3)^{77}(x^2+x-2)} \geq 0$ (argument kvadratnog korijena je nenegativan),

(ii) $(x-3)^{77}(x^2+x-2) \neq 0$ (nazivnik nije 0).

Budući da je $(x-2)^{44} \geq 0$ i $-x^2 + 3x - 9 \leq 0$ za sve $x \in \mathbf{R}$, imamo da je

$$\text{(i)} \iff \frac{(x+1)^{55}}{(x-3)^{77}(x^2+x-2)} \leq 0.$$

Realne brojeve x koji zadovoljavaju i uvjet (i) i uvjet (ii) sada lako pronalazimo tablicom predznaka:

x	$-\infty$		-2		-1		1		3		$+\infty$
$(x+1)^{55}$		$-$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$(x-3)^{77}$		$-$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
x^2+x-2		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$\frac{(x+1)^{55}}{(x-3)^{77}(x^2+x-2)}$		$+$	$\Vert$	$-$	0	$+$	$\Vert$	$-$	$\Vert$	$+$	

Dakle, $\mathcal{D}(f) = \langle -2, -1] \cup \langle 1, 3\rangle$.

(e) Tražimo sve $x \in \mathbf{R}$ za koje su zadovoljeni uvjeti

(i) $\operatorname{tg} \frac{x+1}{x} \in [-1, 1]$ (argument arkus kosinusa je u $[-1, 1]$),

(ii) $\frac{x+1}{x} \notin \{\frac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbf{Z}\}$ (argument tangensa je u $\mathbf{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbf{Z}\}$),

(iii) $x \neq 0$ (nazivnik nije 0).

Uočimo da je

$$\text{(i)} \iff \tfrac{x+1}{x} \in \bigcup_{k\in\mathbf{Z}} [-\tfrac{\pi}{4} + k\pi, \tfrac{\pi}{4} + k\pi],$$

pa ovaj uvjet automatski obuhvaća i uvjet (ii) o kojem stoga više ne moramo brinuti. Nadalje,

$$\text{(i)} \iff \tfrac{1}{x} \in \bigcup_{k\in\mathbf{Z}} [-\tfrac{\pi}{4} - 1 + k\pi, \tfrac{\pi}{4} - 1 + k\pi].$$

Uočimo da se svaki od ovih intervala nalazi u potpunosti ili u $\langle -\infty, 0\rangle$ ili u $\langle 0, +\infty\rangle$, pa budući da je funkcija $\frac{1}{x}$ padajuća na $\langle -\infty, 0\rangle$ i $\langle 0, +\infty\rangle$, slijedi da je

$$\text{(i)} \iff x \in \bigcup_{k\in\mathbf{Z}} \left[\frac{1}{\frac{\pi}{4} - 1 + k\pi}, \frac{1}{-\frac{\pi}{4} - 1 + k\pi}\right].$$

Kako se 0 ne nalazi niti u jednom od ovih intervala, slijedi da je uvjet (iii) ispunjen pa je $\mathcal{D}(f) = \bigcup_{k\in\mathbf{Z}} \left[\frac{1}{\frac{\pi}{4}-1+k\pi}, \frac{1}{-\frac{\pi}{4}-1+k\pi}\right]$.

(f) Određujemo za koje $x \in \mathbf{R}$ vrijedi

(i) $\log_{\frac{1}{2}} \frac{2+x}{1+x} \in [-1, 1]$ (argument arkus sinusa je u $[-1, 1]$),

(ii) $\frac{2+x}{1+x} > 0$ (argument logaritma je pozitivan),

(iii) $1 + x \neq 0$ (nazivnik nije 0).

Uočimo da je

$$\text{(i)} \iff \tfrac{2+x}{1+x} \in [\tfrac{1}{2}, 2],$$

pa ovaj uvjet automatski obuhvaća uvjet (ii) i o njemu više ne mora brinuti. Sada imamo

$$\begin{aligned}\text{(i)} &\iff 1 + \tfrac{1}{1+x} \in [\tfrac{1}{2}, 2] \iff \tfrac{1}{1+x} \in [-\tfrac{1}{2}, 1] \\ &\iff 1 + x \in \langle -\infty, -2] \cup [1, +\infty\rangle \iff x \in \langle -\infty, -3] \cup [0, +\infty\rangle.\end{aligned}$$

Uzevši u obzir i uvjet (iii), zaključujemo da je $\mathcal{D}(f) = \langle -\infty, -3] \cup [0, +\infty\rangle$.

(g) Određujemo za koje $x \in \mathbf{R}$ vrijedi

(i) $2x^2 - 5x + 3 > 0$ (argument logaritma je pozitivan),

(ii) $\log_x(2x^2 - 5x + 3) > 0$ (argument logaritma je pozitivan),

(iii) $x > 0$ (baza logaritma je pozitivna),

(iv) $x \neq 1$ (baza logaritma nije 1).

Da bismo odredili za koje x je uvjet (ii) zadovoljen, moramo promatrati dva slučaja: $x \in \langle 0, 1\rangle$ i $x > 1$. Uočimo da je

- za $x > 1$ uvijet (ii) ekvivalentan s $2x^2 - 5x + 3 > 1$;
- za $x \in \langle 0, 1\rangle$ uvijet (ii) ekvivalentan s $2x^2 - 5x + 3 < 1$.

Promotrimo prvo slučaj $x > 1$. Uvjet $2x^2 - 5x + 3 > 1$ obuhvaća i uvjet (i) i o njemu više ne moramo brinuti. Prema tome, za $x > 1$ uvjeti (i) i (ii) su zadovoljeni za

$$2x^2 - 5x + 2 > 0 \iff x \in \langle 2, +\infty\rangle.$$

S druge strane, za $x \in \langle 0, 1\rangle$ uvjeti (i) i (ii) jednaki su sustavu

$$\begin{cases} 2x^2 - 5x + 2 < 0 \\ 2x^2 - 5x + 3 > 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \frac{1}{2} < x < 1 \\ 0 < x < 1 \end{cases} \iff \frac{1}{2} < x < 1$$

Uzevši u obzir i uvjete (iii) i (iv), zaključujemo da je $\mathcal{D}(f) = \langle \frac{1}{2}, 1\rangle \cup \langle 2, +\infty\rangle$.

$\square$