

§ 1. Funkcije

§ 1.1. Osnovne definicije

Iako ste se s većinom gradiva ove lekcije upoznali na prethodnim kolegijima, ponovit ćemo sve što će nam biti bitno u ovom kolegiju.

Definicija 1.1: Funkcija

Neka su A i B neprazni skupovi. **Funkcija** $f: A \rightarrow B$ je pravilo koje svakom elementu skupa A pridruži neki element skupa B . Skup A nazivamo **domenom** funkcije, a skup B **kodomonom** funkcije.

U ovom kolegiju nas zanimaju funkcije $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Često funkcije identificiramo s njihovim pravilom pridruživanja, odnosno, kažemo $f(x) = x^2$. Tada domenom i kodomenu implicitno zadajemo, to jest, najčešće uzimamo **prirodnu domenom**, najveći skup na kojem je funkcija definirana. **Slika** funkcije je skup svih vrijednosti koje funkcija poprima. Slika je uvijek podskup kodomene.

Primjeri:

- Funkcija $x \mapsto x^2$ za domenom ima cijeli skup realnih brojeva. Za kodomenu možemo uzeti ili $\mathbb{R}$ ili njenu sliku $[0, \infty)$.
- Funkcija $x \mapsto \sqrt{x}$ za domenom ima skup nenegativnih realnih brojeva $[0, \infty)$. Njena slika su također nenegativni realni brojevi.

Definicija 1.2: Slika skupa

Neka je $f: A \rightarrow B$ funkcija i $C \subseteq A$. **Slika skupa C po funkciji f** je skup

$$f(C) = \{f(x) : x \in C\}.$$

Riječima, to je skup svih vrijednosti u koje se elementi iz C preslikaju.

Ako usporedimo s definicijom slike funkcije, vidimo da je to ništa drugo nego slika domene po funkciji.

Definicija 1.3: Praslika

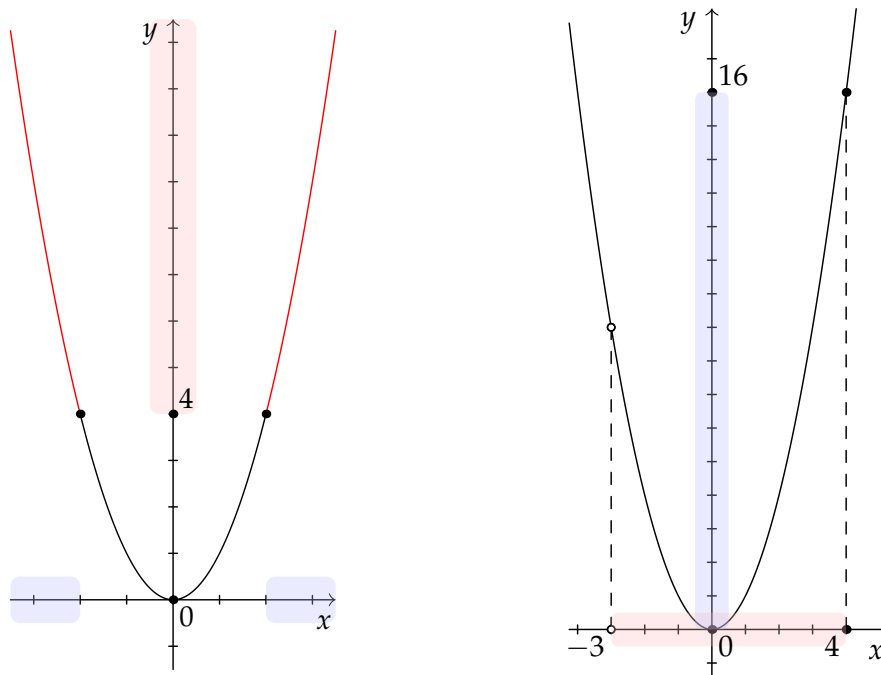
Neka je $f: A \rightarrow B$ funkcija i $E \subseteq B$. **Praslika skupa E po funkciji f** je skup

$$f^{-1}(E) = \{x \in A : f(x) \in E\}.$$

Riječima, to su svi elementi skupa A koji se preslikaju u neki element skupa E .

Uočimo, $f^{-1}(B) = A$ te $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$. Ako promatramo $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$, vrijedi

$$f^{-1}([4, \infty)) = \langle -\infty, -2] \cup [2, \infty), \quad f(\langle -3, 4]) = [0, 16].$$



§ 1.1.1. Kako odrediti sliku i prasluku funkcije?

Glavno pitanje koje nas zanima je kako odrediti sliku nekog skupa pod funkcijom, odnosno, kako odrediti prasluku nekog skupa pod funkcijom. Ono što će nam najviše pomoći su sljedeća dva pravila:

$$(g \circ f)(A) = g(f(A)), \quad (g \circ f)^{-1}(B) = f^{-1}(g^{-1}(B)).$$

Svaku funkciju s kojom ćemo računati na kolegiju možemo napisati kao kompoziciju elementarnih funkcija (više o njima kasnije). Ako znamo odrediti sliku i prasluku skupova po elementarnim funkcijama i zapisati funkciju kao kompoziciju elementarnih, znamo odgovoriti na svako pitanje o slikama i praslukama.

Primjer 1.1. Ako je $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + 2x + 3$, odredite $f([3, 4])$ i $f^{-1}([6, 11])$.

Rješenje 1.1. Uočimo,

$$f(x) = x^2 + 2x + 3 = x^2 + 2x + 1 + 2 = (x + 1)^2 + 2.$$

Zato pišemo

$$f = f_1 \circ f_2 \circ f_3,$$

gdje

$$f_1(x) = x + 2,$$

$$f_2(x) = x^2,$$

$$f_3(x) = x + 1.$$

Vrijedi

$$f([3, 4]) = f_1(f_2(f_3([3, 4]))) = f_1(f_2([4, 5])) = f_1([16, 25]) = [18, 27].$$

Također,

$$\begin{aligned} f^{-1}([6, 11]) &= (f_1 \circ f_2 \circ f_3)^{-1}([6, 11]) = f_3^{-1}(f_2^{-1}(f_1^{-1}([6, 11]))) = \\ &= f_3^{-1}(f_2^{-1}([4, 9])) = f_3^{-1}([-3, -2] \cup [2, 3]) = [-4, -3] \cup [1, 2]. \end{aligned}$$

Naravno, bilo koji drugi zapis funkcije f preko kompozicija bi dao isto rješenje.

□

§ 1.1.2. Dodatna svojstva funkcija

Često nas zanimaju i neka dodatna svojstva funkcija koja sad navodimo.

Definicija 1.4: Injektivnost

Za funkciju $f: A \rightarrow B$ kažemo da je **injekcija** ako različitim elementima domene pridružuje različite elemente kodomena, odnosno, ako za sve $x, y \in A$ vrijedi: ako je $x \neq y$, tada je $f(x) \neq f(y)$.

Alternativno, gornje svojstvo se može izreći i u obliku: „Ako je $f(x) = f(y)$, tada je $x = y$ ”. Na primjer, funkcija $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$ nije injekcija, jer je $f(-3) = f(3)$. U drugu ruku, funkcija $f: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$ jest injekcija.

Zadatak 1.2. Neka je f realna funkcija realne varijable s pravilom pridruživanja

$$f(x) = \frac{x-1}{x+1}.$$

Odredite njenu prirodnu domenu te ustanovite vrijedi li svojstvo injektivnosti na toj prirodnoj domeni.

Rješenje 1.2. Ne smijemo imati nulu u nazivniku pa je $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$. Neka su $x, y \in \mathcal{D}(f)$ takvi da je $f(x) = f(y)$. Tada vrijedi

$$\frac{x-1}{x+1} = \frac{y-1}{y+1}$$

pa množenjem sa zajedničkim nazivnikom dobivamo

$$(x-1)(y+1) = (y-1)(x+1).$$

Ako razmnožimo zagrade i pokratimo, slijedi $x = y$ pa je f injekcija na prirodnoj domeni. □

Definicija 1.5: Surjektivnost

Za funkciju $f: A \rightarrow B$ kažemo da je **surjekcija** ukoliko je slika funkcije f jednaka kodomeni.

Gornje svojstvo se može izreći i u obliku: „Za svaki element kodomena, postoji element domene koji se u njega preslika”.

Definicija 1.6: Bijektivnost

Funkcija $f: A \rightarrow B$ je **bijekcija** ukoliko je i injekcija, i surjekcija.

Za bijektivne funkcije možemo definirati njihov inverz.

Definicija 1.7

Neka je $f: A \rightarrow B$ funkcija. Funkciju $g: B \rightarrow A$ takvu da je $g \circ f = \text{id}_A$ i $f \circ g = \text{id}_B$ nazivamo **inverzom** funkcije f . Označavamo s f^{-1} .

Oprez

Uočimo, danas smo za dvije stvari koristili oznaku f^{-1} :

- inverz funkcije f ,
- oznaka za prasluku.

Razlikujemo ih iz konteksta.

Primjer 1.3. Neka je $f: \mathbb{R} \setminus \{-3\} \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{4\}$ zadana s

$$f(x) = \frac{4x+7}{x+3}.$$

Pokažite da je f bijekcija i odredite f^{-1} .

Rješenje 1.3. Uočimo da možemo pisati

$$f(x) = 4 - \frac{5}{x+3}.$$

Prvo dokažimo da je injekcija. Neka su $x_1, x_2 \in \mathbb{R} \setminus \{-3\}$ takvi da je $f(x_1) = f(x_2)$, odnosno

$$4 - \frac{5}{x_1+3} = 4 - \frac{5}{x_2+3}.$$

Lako se dobije da onda slijedi $x_1 = x_2$.

Da bismo dokazali da je f surjekcija, dovoljno je pokazati da za svaki $y \in \mathbb{R} \setminus \{4\}$ postoji neki $x \in \mathbb{R} \setminus \{-3\}$ takav da je $f(x) = y$. Vrijedi

$$f(x) = y \iff 4 - \frac{5}{x+3} = y \iff 4 - y = \frac{5}{x+3}$$

pa dijeljenjem s $4 - y$ (što je $\neq 0$ jer $y \neq 4$) i množenjem s $x + 3$ te sređivanjem dobivamo

$$x = -3 + \frac{5}{4-y}.$$

Uočimo, ovakav x je uvijek u domeni naše funkcije, odnosno, uvijek različit od -3 . Dakle, ako uvrstimo gore napisani x u našu funkciju, dobivamo $f(x) = y$.

Preostaje pronaći inverz funkcije f , to jest, funkciju $f^{-1}: \mathbb{R} \setminus \{4\} \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{-3\}$ takvu da je $f(f^{-1}(y)) = y$ za sve $y \in \mathbb{R} \setminus \{4\}$.

Neka je $x = f^{-1}(y)$ pri čemu je y fiksiran, a x tražimo. Tada

$$f(x) = f(f^{-1}(y)) = y,$$

no to je upravo jednačica koju smo prethodno riješili, odnosno, znamo

$$x = -3 + \frac{5}{4-y}.$$

Zaključujemo

$$f^{-1}(y) = -3 + \frac{5}{4-y}.$$

□

Naposlijetku, navodimo još neka svojstva funkcija:

- funkcija $f: A \rightarrow B$ je **parna** ako je A simetričan s obzirom na 0 i vrijedi $f(-x) = f(x)$ za sve $x \in A$,
- funkcija $f: A \rightarrow B$ je **neparna** ako je A simetričan s obzirom na 0 i vrijedi $f(-x) = -f(x)$ za sve $x \in A$,
- funkcija $f: A \rightarrow B$ je **periodična** ako postoji $\tau > 0$ takav da za sve $x \in A$ vrijedi $x + \tau \in A$ i $f(x + \tau) = f(x)$.

Na primjer, funkcija $f(x) = x^2$ je parna, funkcija $f(x) = x^3$ je neparna dok su trigonometrijske funkcije periodične.

§ 1.2. Elementarne funkcije

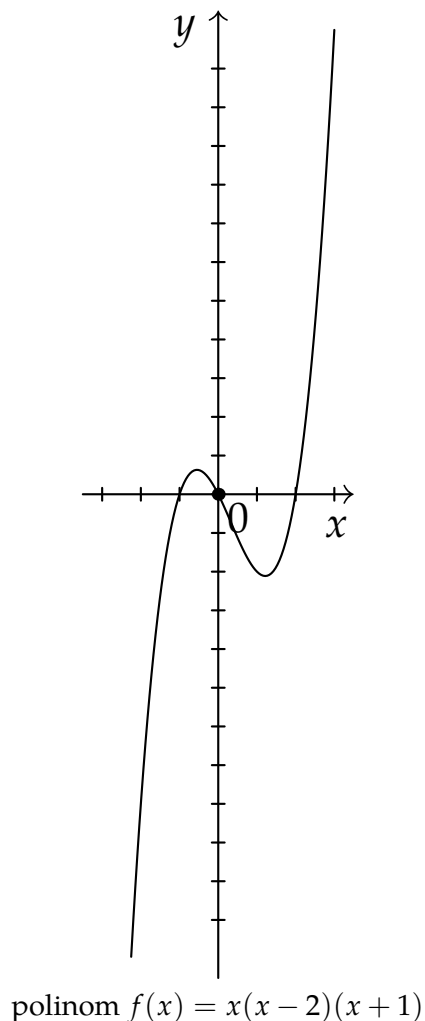
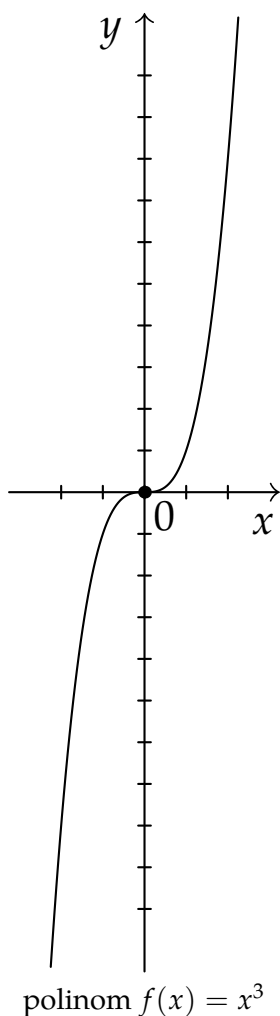
Elementarne funkcije su klasa funkcija s kojima najčešće radimo. Obuhvaćaju funkcije koje se „svakodnevno” pojavljuju i s kojima je jednostavno raditi.

§ 1.2.1. Polinomi

Općeniti oblik polinoma s realnim koeficijentima je

$$P(x) = a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + \dots + a_2 \cdot x^2 + a_1 \cdot x + a_0.$$

Broj n (ukoliko $a_n \neq 0$) je stupanj polinoma. Domena polinoma je uvijek $\mathbb{R}$ te isto uzimamo i za kodomenu. Slika naravno ovisi o konkretnom polinomu.



Općenito, polinomi ne moraju biti bijekcije (štoviše, ne moraju biti ni injekcije, ni surjekcije). Postoje posebni slučajevi:

- $f(x) = x^{2n+1}$ je bijekcija s $\mathbb{R}$ u $\mathbb{R}$, a njen inverz je $g(x) = \sqrt[2n+1]{x}$.
- $f(x) = x^{2n}$ nije bijekcija, jer nije injekcija. Ako domenu restringiramo na $[0, \infty)$, tada funkcija

$$f|_{[0, \infty)}: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty), \quad f(x) = x^{2n}$$

jest bijekcija s inverzom $g(x) = \sqrt[n]{x}$.

Svaki polinom stupnja n ima n kompleksnih (ne nužno različitih) nultočaka. Zato ga možemo pisati u obliku

$$P(x) = a_n(x - x_1)^{k_1} \dots (x - x_m)^{k_m},$$

gdje su $x_1, \dots, x_m$ različite nultočke, a $k_1, \dots, k_m$ njihove kratnosti za koje vrijedi $k_1 + \dots + k_m = n$.

Ukoliko su svi koeficijenti polinoma realni brojevi, kompleksne nultočke dolaze zajedno u kompleksno konjugiranim parovima.

§ 1.2.2. Racionalne funkcije

Racionalne funkcije su funkcije dobivene kao omjer dva polinoma,

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)},$$

gdje su P i Q neki polinomi. Njihova domena je $\mathbb{R}$, osim realnih nultočaka polinoma Q . Ne može se puno reći općenito o njihovim slikama, odnosno, svojstvima (injektivnost, surjektivnost, bijektivnost, ...) nego ona uvijek ovise o konkretnoj funkciji.

Naposljetku, ako je stupanj polinoma P strogo veći od stupnja polinoma Q , možemo ta dva polinoma podijeliti, čime dobijemo

$$P(x) = R(x) \cdot Q(x) + S(x)$$

pa onda pišemo

$$f(x) = R(x) + \frac{S(x)}{Q(x)}.$$

Racionalnu funkciju kojoj brojnik ima strogo manji stupanj od nazivnika nazivamo **pravom racionalnom funkcijom**.

§ 1.2.3. Iracionalne funkcije

Iracionalne funkcije su one koje u svojoj definiciji imaju korijen. Na primjer:

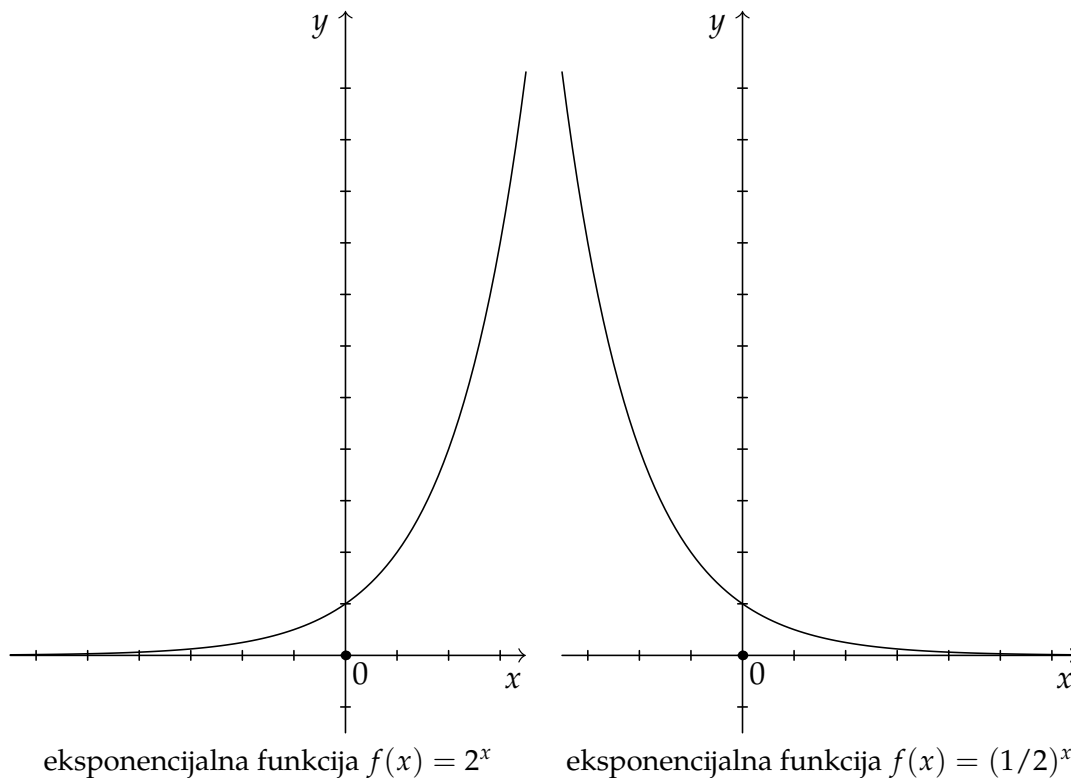
$$\sqrt{x}, \sqrt{2x+3} + 7, \frac{\sqrt[7]{5x^2-1} + \sqrt[4]{\frac{1+x}{x^2}}}{7 - \sqrt{x-1}} \dots$$

Važno je da korijen ne ovisi o varijabli, to jest, $\sqrt[3]{7}$ ne smatramo iracionalnom funkcijom.

Domenu iracionalne funkcije zapravo određuju korijeni koje koristimo. Svaki korijen koji imamo mora biti dobro definiran, što znači da ako imamo parne korijene, izraz unutar njih mora biti nenegativan. Također, ako imamo razlomak, moramo paziti da je nazivnik različit od nule.

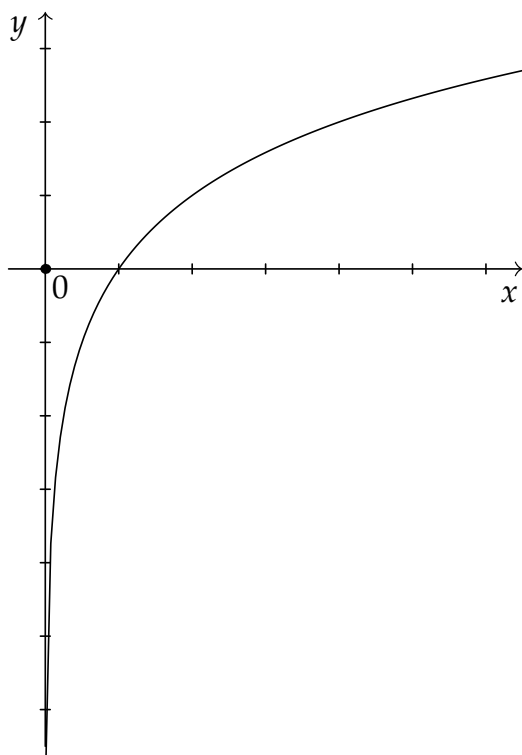
§ 1.2.4. Eksponencijalne i logaritamske funkcije

Eksponencijalne funkcije općenito su funkcije oblika $f(x) = a^x$, uz uvjete $a > 0$, $a \neq 1$. Iako je eksponenciranje definirano u nekim slučajevima kada je $a < 0$ ili $a = 1$, želimo da izraz bude dobro definiran za sve eksponente pa zbog toga imamo uvjet na bazu.

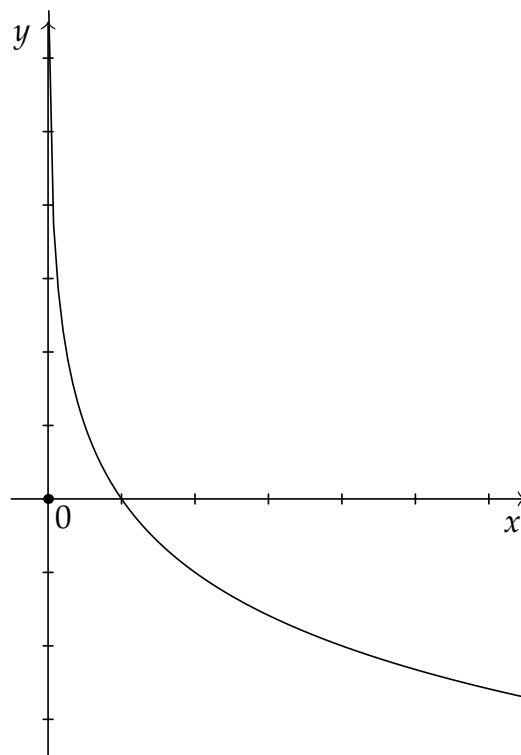


Eksponencijalna funkcija je uvijek bijekcija s $\mathbb{R}$ u $\mathbb{R}_{>0} = \langle 0, \infty \rangle$. Ovisno o $a > 1$ ili $a < 1$, funkcija je rastuća ili padajuća. Jer je bijekcija, ima inverz, koji zovemo logaritam.

Logaritamska funkcija je funkcija oblika $f(x) = \log_a x$, uz iste uvjete na a kao gore. Te funkcije su bijekcije iz $\mathbb{R}_{>0}$ u $\mathbb{R}$ i opet rastu, odnosno, padaju, ovisno o tome je li $a > 1$ ili $a < 1$.



logaritamska funkcija $f(x) = \log_2(x)$



logaritamska funkcija $f(x) = \log_{1/2}(x)$

Posebna baza za eksponencialnu i logaritamsku funkciju je Eulerova konstanta $e \approx 2.71828 \dots$. Logaritam s bazom e pišemo $\ln x := \log_e x$ i zovemo ga prirodnim logaritmom.

§ 1.2.5. Trigonometrijske i ciklometrijske funkcije

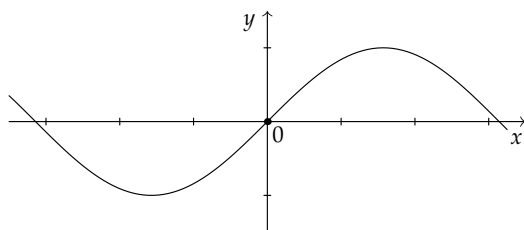
Već smo dobro upoznati s osnovnim trigonometrijskim funkcijama

$$\sin: \mathbb{R} \rightarrow [-1, 1],$$

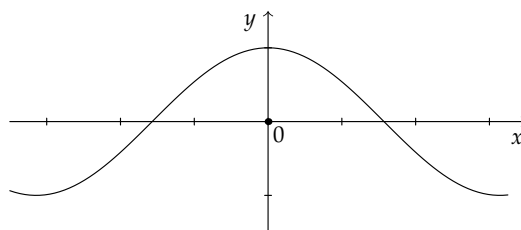
$$\cos: \mathbb{R} \rightarrow [-1, 1]$$

$$\operatorname{tg}: \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbb{Z} \right\} \rightarrow \mathbb{R},$$

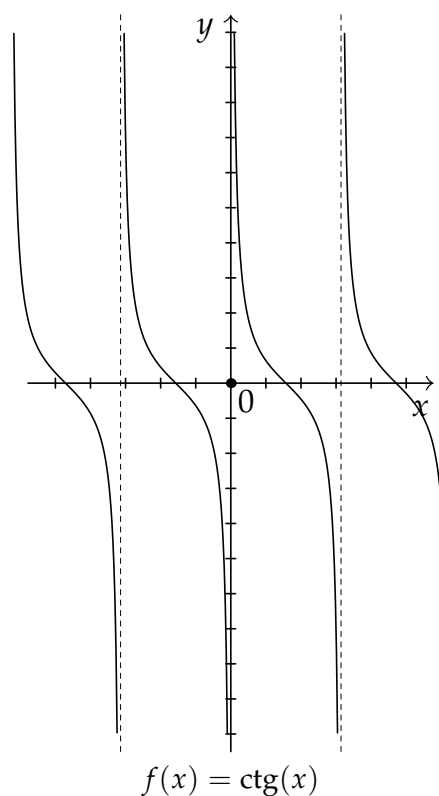
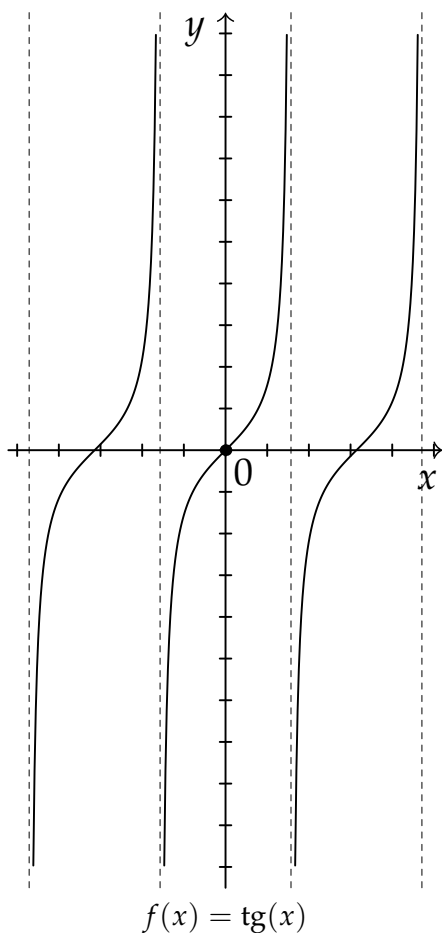
$$\operatorname{ctg}: \mathbb{R} \setminus \{k\pi : k \in \mathbb{Z}\} \rightarrow \mathbb{R}.$$



$f(x) = \sin x$



$f(x) = \cos x$



Uočimo, riječ je o periodičnim funkcijama, pri čemu prve dvije imaju temeljni period 2π , a druge dvije π .

Tangens i kotangens su surjekcije na cijeli $\mathbb{R}$, dok su sinus i kosinus „samo“ na $[-1, 1]$. Zbog periodičnosti, nije riječ o injekcijama.

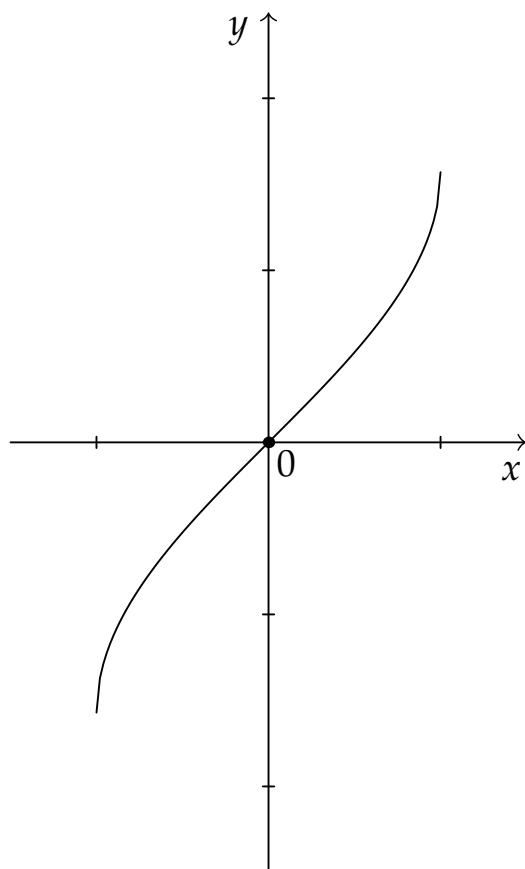
Kao i prije, možemo ih učiniti bijekcijama prigodnim restrikcijama domene. Njihove inverzne funkcije nazivamo **ciklometrijskim** funkcijama:

$$\arcsin: [-1, 1] \rightarrow \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right],$$

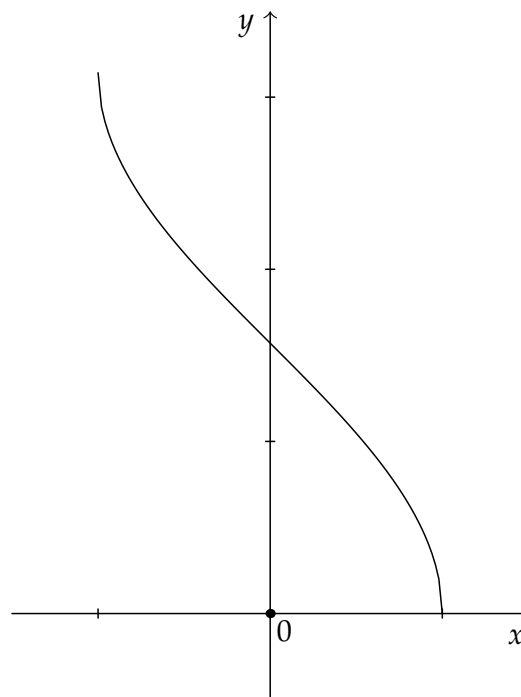
$$\operatorname{arctg}: \mathbb{R} \rightarrow \left\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right\rangle,$$

$$\arccos: [-1, 1] \rightarrow [0, \pi],$$

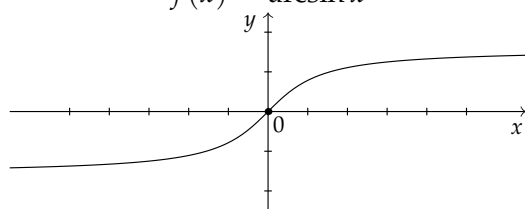
$$\operatorname{arcctg}: \mathbb{R} \rightarrow \langle 0, \pi \rangle.$$



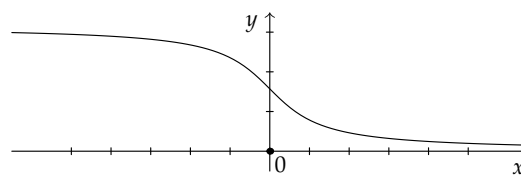
$$f(x) = \arcsin x$$



$$f(x) = \arccos x$$



$$f(x) = \operatorname{arctg}(x)$$



$$f(x) = \operatorname{arcctg}(x)$$

Zadaci

Zadatak 1.4. Neka je $f(x) = 4^x - 2^{x+1} - 3$. Odredite $f([0, 2))$ i $f^{-1}(\langle 5, 45 \rangle)$.

Rješenje 1.4. Uočimo

$$f(x) = (2^x)^2 - 2 \cdot 2^x - 3$$

pa funkciju f možemo napisati kao kompoziciju $g \circ h$ funkcija

$$h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, h(x) = 2^x, \quad g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = x^2 - 2x - 3.$$

Iz grafova funkcija g i h lako očitamo

$$f([0, 2)) = g(h([0, 2))) = g([1, 4)) = [-4, 5).$$

Nadalje,

$$f^{-1}(\langle 5, 45 \rangle) = h^{-1}(g^{-1}(\langle 5, 45 \rangle)) = h^{-1}(\langle -6, -2 \rangle \cup \langle 4, 8 \rangle).$$

Jer funkcija h poprima samo pozitivne vrijednosti, slijedi

$$f^{-1}(\langle 5, 45 \rangle) = h^{-1}(\langle 4, 8 \rangle) = \langle 2, 3 \rangle.$$

□

Zadatak 1.5. Odredite prirodnu domenu i sliku funkcija:

a) $f(x) = \sqrt{1-x}$;

b) $f(x) = \sqrt[7]{2x^4-1}$.

Rješenje 1.5. a) Za

$$f(x) = \sqrt{1-x}$$

koristimo da je prirodna domena drugog korijena $[0, \infty)$. Zato mora vrijediti

$$1-x \geq 0 \iff x \leq 1,$$

pa je

$$\mathcal{D}(f) = \langle -\infty, 1].$$

Za sliku možemo promatrati graf funkcije pa imamo

$$\mathcal{R}(f) = [0, \infty).$$

b) Za

$$f(x) = \sqrt[7]{2x^4-1}$$

neparni korijen je definiran na cijelom $\mathbb{R}$, pa je

$$\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}.$$

Sada zapišimo funkciju kao kompoziciju:

$$f = g \circ h, \quad g(x) = \sqrt[7]{x}, \quad h(x) = 2x^4 - 1.$$

Iz oblika (ili grafa) funkcije h imamo

$$\mathcal{R}(h) = [-1, \infty),$$

jer je $x^4 \geq 0$, minimum se postiže u $x = 0$, pa je $h(0) = -1$. Zato

$$\mathcal{R}(f) = g(\mathcal{R}(h)) = g([-1, \infty)) = [-1, \infty).$$

□

Zadatak 1.6. Odredite područje definicije funkcije

$$f(x) = \log_{\sqrt[3]{e^x-1}} \left(\operatorname{ctg}^2 \left(\sqrt{1-\frac{x}{4}} \right) \cdot \operatorname{arctg} \frac{2x^2-5x-3}{x-2} \right).$$

Rješenje 1.6. Funkcija je oblika $\log_a b$, pa trebaju vrijediti uvjeti

$$a > 0, \quad a \neq 1, \quad b > 0.$$

Ovdje je

$$a = \sqrt[3]{e^x-1}, \quad b = \operatorname{ctg}^2 \left(\sqrt{1-\frac{x}{4}} \right) \cdot \operatorname{arctg} \left(\frac{2x^2-5x-3}{x-2} \right).$$

1) Uvjeti na bazu logaritma

$$\sqrt[3]{e^x-1} > 0 \iff e^x-1 > 0 \iff x > 0,$$

$$\sqrt[3]{e^x-1} \neq 1 \iff e^x-1 \neq 1 \iff x \neq \ln 2.$$

2) Uvjeti na argument logaritma Argument logaritma je produkt

$$A(x) \cdot B(x),$$

gdje

$$A(x) = \operatorname{ctg}^2\left(\sqrt{1 - \frac{x}{4}}\right), \quad B(x) = \operatorname{arctg}\left(\frac{2x^2 - 5x - 3}{x - 2}\right).$$

Tražimo

$$A(x) \cdot B(x) > 0.$$

Kako je $A(x)$ kvadrat, vrijedi $A(x) \geq 0$ (kad je definiran). Zato produkt može biti strogo pozitivan samo ako vrijedi

$$A(x) > 0 \quad \text{ i } \quad B(x) > 0.$$

Uvjeti za prvi faktor $A(x)$.

- Korijen mora biti definiran:

$$1 - \frac{x}{4} \geq 0 \iff x \leq 4.$$

- $\operatorname{ctg} t$ mora biti definirana: $t \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

- Budući da treba $A(x) > 0$, moramo imati i $\operatorname{ctg} t \neq 0$, a to je ekvivalentno $t \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$.

Oba zadnja uvjeta zajedno daju

$$t \neq \frac{k\pi}{2}, \quad k \in \mathbb{Z},$$

pa za $t = \sqrt{1 - \frac{x}{4}}$ dobijemo

$$\sqrt{1 - \frac{x}{4}} \neq \frac{k\pi}{2} \iff 1 - \frac{x}{4} \neq \frac{k^2\pi^2}{4} \iff x \neq 4 - k^2\pi^2, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Uvjeti za drugi faktor $B(x)$. Prvo, razlomak u argumentu mora biti definiran:

$$x \neq 2.$$

Zatim, kako je $\operatorname{arctg} t > 0 \iff t > 0$, uvjet $B(x) > 0$ je ekvivalentan nejednadžbi

$$\frac{2x^2 - 5x - 3}{x - 2} > 0.$$

Faktoriziramo brojnik:

$$2x^2 - 5x - 3 = (2x + 1)(x - 3).$$

Dakle rješavamo

$$\frac{(2x + 1)(x - 3)}{x - 2} > 0.$$

Kritične točke su $x = -\frac{1}{2}, 2, 3$. Tablica predznaka:

x	$\langle -\infty, -\frac{1}{2} \rangle$	$\langle -\frac{1}{2}, 2 \rangle$	$\langle 2, 3 \rangle$	$\langle 3, \infty \rangle$
$2x + 1$	—	+	+	+
$x - 3$	—	—	—	+
$x - 2$	—	—	+	+
$\frac{(2x + 1)(x - 3)}{x - 2}$	—	+	—	+

Zato je

$$x \in \left\langle -\frac{1}{2}, 2 \right\rangle \cup \langle 3, \infty \rangle.$$

3) Presjek svih uvjeta

Skup svih uvjeta:

- $x > 0$,
- $x \neq \ln 2$,
- $x \leq 4$,
- $x \neq 4 - k^2\pi^2, k \in \mathbb{Z}$,
- $x \in \left\langle -\frac{1}{2}, 2 \right\rangle \cup \langle 3, \infty \rangle$.

Među točkama $4 - k^2\pi^2$ jedino je 4 pozitivna, pa se taj uvjet na našem presjeku svodi na $x \neq 4$. Dakle:

$$\mathcal{D}(f) = (\langle 0, 2 \rangle \setminus \{\ln 2\}) \cup \langle 3, 4 \rangle = \langle 0, \ln 2 \rangle \cup \langle \ln 2, 2 \rangle \cup \langle 3, 4 \rangle.$$

□

Zadatak 1.7.

a) Dokažite da ako su funkcije f i g injektorije te je $f \circ g$ dobro definirana, tada je i $f \circ g$ injektorija. Vrijedi li zaključak i za proizvoljno mnogo kompozicija?

b) Neka je

$$f(x) = \frac{2^{\cos x} - 1}{2 + 2^{\cos x}}.$$

Pokažite da je f injektorija na $[\pi, 2\pi]$ te joj odredite inverz na tom intervalu.

Rješenje 1.7. a) Neka su $f: A \rightarrow B$ i $g: C \rightarrow A$ injektorije te je $f \circ g$ dobro definirana. Uzmimo $x_1, x_2 \in C$ i pretpostavimo

$$(f \circ g)(x_1) = (f \circ g)(x_2).$$

Tada je $f(g(x_1)) = f(g(x_2))$, pa iz injektivnosti od f slijedi $g(x_1) = g(x_2)$, a zatim iz injektivnosti od g slijedi $x_1 = x_2$. Dakle, $f \circ g$ je injektorija.

Isto vrijedi i za proizvoljno mnogo kompozicija: kompozicija injektorija je injektorija (dokaz npr. indukcijom po broju funkcija).

b) Definirajmo

$$\begin{aligned} g_1: [\pi, 2\pi] &\rightarrow [-1, 1], & g_1(x) &= \cos x, \\ g_2: [-1, 1] &\rightarrow \left[\frac{1}{2}, 2\right], & g_2(x) &= 2^x, \\ g_3: \left[\frac{1}{2}, 2\right] &\rightarrow \left[-\frac{1}{5}, \frac{1}{4}\right], & g_3(x) &= \frac{x-1}{2+x} = 1 - \frac{3}{2+x}. \end{aligned}$$

Tada je

$$f|_{[\pi, 2\pi]} = g_3 \circ g_2 \circ g_1.$$

Kodomene su odabrane kao slike pripadnih funkcija, pa su g_1, g_2, g_3 surjekcije. Funkcija g_1 je injektivna na $[\pi, 2\pi]$ (kosinus je tamo strogo rastući), g_2 je injektivna jer je eksponencijalna funkcija strogo rastuća. Provjerimo g_3 : neka je $g_3(x_1) = g_3(x_2)$ za $x_1, x_2 \in [\frac{1}{2}, 2]$. Tada

$$1 - \frac{3}{2+x_1} = 1 - \frac{3}{2+x_2} \iff x_1 = x_2,$$

pa je i g_3 injekcija. Dakle, sve tri funkcije su injekcije, pa je i $f|_{[\pi, 2\pi]}$ injekcija. Jer je injekcija i surjekcija, slijedi da je $f|_{[\pi, 2\pi]}$ bijekcija. Sada odredimo inverz koristeći

$$\left(f|_{[\pi, 2\pi]}\right)^{-1} = g_1^{-1} \circ g_2^{-1} \circ g_3^{-1}.$$

Za g_1^{-1} : nije dovoljno pisati samo $\arccos$, jer

$$g_1^{-1}: [-1, 1] \rightarrow [\pi, 2\pi], \quad \arccos: [-1, 1] \rightarrow [0, \pi].$$

Za $y \in [-1, 1]$ vrijedi

$$\cos x = y, \quad x \in [\pi, 2\pi] \iff x = 2\pi - \arccos y,$$

pa je

$$g_1^{-1}(y) = 2\pi - \arccos y.$$

Nadalje,

$$g_2^{-1}(y) = \log_2 y.$$

Za g_3^{-1} :

$$y = \frac{x-1}{2+x} \iff y(2+x) = x-1 \iff x(1-y) = 1+2y \iff x = \frac{1+2y}{1-y}.$$

Dakle,

$$g_3^{-1}(y) = \frac{1+2y}{1-y}.$$

Konačno,

$$\left(f|_{[\pi, 2\pi]}\right)^{-1}(y) = 2\pi - \arccos\left(\log_2 \frac{1+2y}{1-y}\right), \quad y \in \left[-\frac{1}{5}, \frac{1}{4}\right].$$

□