Prvi kolokvij

Za samostalno rješavanje do 18. 1. 2018.

1. Dokažite da je formulom
$$(T_n f)(x) := \int_{[x+n-1,x+n\rangle} f(y)dy, \quad n \in \mathbb{N}$$
definiran uniformno ograničeni niz linearnih operatora na $\mathrm{L}^1(\mathbb{R})$ takav da za svaku $f \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R})$ i za svaki $x \in \mathbb{R}$ vrijedi $\lim_{n\to\infty}(T_n f)(x) = 0$. Nadalje pokažite da maksimalni operator $T^\star$ definiran sa $T^\star f := \sup_{n\in\mathbb{N}} |T_n f|$ ipak nije slabo L^1 ograničen.

2. Neka je $\|\cdot\|$ općenita *kvazinorma* na nekom kompleksnom vektorskom prostoru X, tj.
$$\|f\| \geq 0, \quad \|f\| = 0 \Leftrightarrow f = \mathbf{0}, \quad \|\alpha f\| = |\alpha|\|f\|, \quad \|f+g\| \lesssim \|f\| + \|g\|$$
za sve $f, g \in X$ i $\alpha \in \mathbb{C}$.
   (a) Ako su $\varepsilon > 0$, $N \in \mathbb{N}$ i $f_1, f_2, \ldots, f_N \in X$ takvi da vrijedi $\|f_n\| \lesssim e^{-\varepsilon n}$ za $n = 1, 2, \ldots, N$, dokažite $\|\sum_{n=1}^N f_n\| \lesssim_\varepsilon 1$.
   (b) Pokažite da postoji dovoljno veliki broj $A \in \langle 0, +\infty\rangle$ takav da ako su $N \in \mathbb{N}$ i $f_1, f_2, \ldots, f_N \in X$ takvi da vrijedi $\|f_n\| \lesssim n^{-A}$ za $n = 1, 2, \ldots, N$, tada je $\|\sum_{n=1}^N f_n\| \lesssim_A 1$.

   Napomena: Poanta gornjih ocjena je da ne ovise o broju vektora N. Implicitnu konstantu u definiciji kvazinorme smatramo apsolutnom, tj. o njoj smiju ovisiti broj A i implicitne konstante u (a) i (b).

3. Posebni slučaj tzv. *Birnbaum-Orliczove norme* na prostoru mjere $(\mathbb{X}, \mathcal{X}, \mu)$ je $\|\cdot\|_{e^{\mathrm{L}}}$ definirana sa
$$\|f\|_{e^{\mathrm{L}}} := \inf\Big\{a \in \langle 0, +\infty\rangle : \int_{\mathbb{X}} \big(e^{|f|/a} - 1\big) d\mu \leq 1\Big\},$$
pri čemu smatramo $\inf \emptyset = +\infty$. Pripadni funkcijski prostor je
$$e^{\mathrm{L}}(\mathbb{X}, \mathcal{X}, \mu) := \big\{f\colon \mathbb{X} \to \mathbb{C} \,:\, f \text{ je } \mathcal{X}\text{-izmjeriva},\ \|f\|_{e^{\mathrm{L}}} < +\infty\big\}.$$
   (a) Provjerite da je $\|\cdot\|_{e^{\mathrm{L}}}$ doista norma na $e^{\mathrm{L}}(\mathbb{X}, \mathcal{X}, \mu)$.

   Napomena: Opet identificiramo funkcije koje se razlikuju na skupu mjere 0.
   (b) Dokažite da za vjerojatnosni prostor $(\mathbb{X}, \mathcal{X}, \mu)$ i $\mathcal{X}$-izmjerivu kompleksnu funkciju f vrijedi
$$\|f\|_{e^{\mathrm{L}}} \sim \sup_{p\in[1,\infty\rangle} \big(p^{-1}\|f\|_{\mathrm{L}^p}\big)$$
te da imamo
$$f \in e^{\mathrm{L}} \;\Leftrightarrow\; \|f\|_{\mathrm{L}^p} = O(p),\ p \to \infty.$$

   Uputa: Razvijte eksponencijalnu funkciju u Taylorov red i pomoću Stirlingove formule ocijenite faktorijele.

4. Promatramo multisublinearne forme $\Lambda\colon \prod_{j=0}^{n} \mathcal{S}(\mathbb{X}_j, \mathcal{X}_j, \mu_j) \to \mathbb{C}$, pri čemu su svi prostori mjere $(\mathbb{X}_j, \mathcal{X}_j, \mu_j)$ upravo $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$. Neka su dani eksponenti $p_0, p_1, \ldots, p_n \in \langle 0, \infty]$ takvi da je $p_j < 1$ za barem jedan indeks j. Dokažite da ne postoji multisublinearna forma Λ koja je restringiranog tipa $(\frac{1}{p_0}, \frac{1}{p_1}, \ldots, \frac{1}{p_n})$ i netrivijalna (tj. nije identički jednaka 0).

5. Dokažite *težinsku Hardy-Littlewood-Soboljevljevu nejednakost* u jednoj dimenziji:

$$\int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \frac{|x|^{\alpha} |f(x)| |y|^{\beta} |g(y)|}{|x-y|^{1-s}} dx dy \lesssim_{\alpha,\beta,p,q,s} \|f\|_{\mathrm{L}^p(\mathbb{R})} \|g\|_{\mathrm{L}^q(\mathbb{R})},$$

pri čemu su $1 < p, q < \infty,\ 0 < s < 1,\ \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ takvi da vrijedi

$$-s \leq \alpha + \beta \leq 0, \quad \frac{1}{p} < \alpha + 1, \quad \frac{1}{q} < \beta + 1, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \alpha + \beta + s + 1.$$

Potom pokažite da ocjena ne može vrijediti ni za koje α, β, p, q, s takve da je $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} \neq \alpha + \beta + s + 1$.

Svaki zadatak donosi po 6 bodova.

Vjekoslav Kovač