# Drugi kolokvij

Za samostalno rješavanje u periodu 14. 1. 2016. – 28. 1. 2016.

1. Dokažite da za $1 < p < 2$, $p' := \frac{p}{p-1}$, $n \in \mathbb{N}$ te $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{C}$ vrijedi nejednakost

$$\left( \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \Big| \sum_{j=0}^{n-1} a_j e^{\frac{2\pi i jk}{n}} \Big|^{p'} \right)^{1/p'} \leq \left( \sum_{j=0}^{n-1} |a_j|^p \right)^{1/p}.$$

2. Preciznu verziju *Hausdorff-Youngove nejednakosti* na $\mathbb{R}$ dao je Beckner:

$$\|\widehat{f}\|_{\mathrm{L}^{p'}(\mathbb{R})} \leq C_p \|f\|_{\mathrm{L}^p(\mathbb{R})} \qquad \text{za } 1 < p < 2,$$

pri čemu je (optimalna) konstanta $C_p$ dana s

$$C_p := \left( \frac{p^{1/p}}{p'^{1/p'}} \right)^{1/2},$$

a $p'$ označava konjugirani eksponent od $p$, tj. $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$. Ovu tvrdnju uzmite kao poznatu (bez dokaza).

(a) Uz pomoć računala skicirajte graf funkcije $p \mapsto C_p$ na intervalu $\langle 1, 2 \rangle$. U nekoliko riječi usporedite gornju nejednakost s verzijom dokazanom na predavanjima (koristeći interpolaciju).

(b) Nađite funkciju $f$ takvu da se u gornjoj nejednakosti postiže jednakost za svaki $1 < p < 2$.

(c) Dokažite preciznu verziju *Youngove nejednakosti za konvoluciju* na $\mathbb{R}$:

$$\|f * g\|_{\mathrm{L}^r(\mathbb{R})} \leq C_p C_q C_{r'} \|f\|_{\mathrm{L}^p(\mathbb{R})} \|g\|_{\mathrm{L}^q(\mathbb{R})}$$

za eksponente $p, q, r$ takve da je $1 < p, q, r' < 2$ i $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 + \frac{1}{r}$, pri čemu je $C_p$ dano gornjom formulom.

(d) Dokažite sljedeću varijantu *principa neodređenosti* (jaču od Heisenbergove formulacije): Ako je $f \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R})$ takva da je $\|f\|_{\mathrm{L}^2(\mathbb{R})} = 1$, onda vrijedi

$$\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 \ln |f(x)| \, dx + \int_{\mathbb{R}} |\widehat{f}(\xi)|^2 \ln |\widehat{f}(\xi)| \, d\xi \leq -\frac{1}{2} \ln \frac{e}{2}.$$

*Napomena*: Za potrebe dokaza ovog dijela zadatka možete pretpostaviti da se $f$ nalazi u nekom po volji odabranom gustom podskupu od $\mathrm{L}^2(\mathbb{R})$.

3. *Dijadska maksimalna funkcija* definirana je formulom

$$(\mathrm{M}_{\mathrm{dij}} f)(x) := \sup_{\substack{I \in \mathcal{D} \\ I \ni x}} \frac{1}{|I|} \Big| \int_I f(t) dt \Big|$$

za svaki $x \in \mathbb{R}$ i svaku lokalno integrabilnu funkciju $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$. Pokažite da za svaki $p \in \langle 1, \infty \rangle$ i svaku $f \in \mathrm{L}^p(\mathbb{R})$ vrijedi

$$\|\mathrm{M}_{\mathrm{dij}} f\|_{\mathrm{L}^p(\mathbb{R})} \le \frac{p}{p-1} \|f\|_{\mathrm{L}^p(\mathbb{R})}.$$

*Napomena*: Ovdje $\mathcal{D} := \{[2^j k, 2^j (k+1)\rangle : j, k \in \mathbb{Z}\}$ označava familiju dijadskih intervala.

4. Dokažite da za svaki $d \in \mathbb{N}$ postoji konstanta $c_d > 0$ sa sljedećim svojstvom. Neka su $f \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R}^d)$, $f \ge 0$ i $\alpha > 0$. Ako je $B$ kugla u $\mathbb{R}^d$ takva da je $(Mf)(x) \ge \alpha$ za svaku točku $x \in B$, tada vrijedi $(Mf)(x) \ge c_d \alpha$ za svaku točku $x \in 2B$.

   *Napomena*: Ovdje $2B$ označava kuglu s istim središtem kao $B$, ali dvostrukim polumjerom.

5. *"Parabolična" maksimalna funkcija* definirana je s

$$(\mathrm{M}_{\mathrm{par}} f)(x) := \sup_{r > 0} \frac{1}{r} \Big| \int_0^r f(x + t^2) dt \Big|$$

za svaki $x \in \mathbb{R}$ i svaku lokalno integrabilnu funkciju $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$. Dokažite da za svaki $p \in \langle 1, \infty ]$ ona zadovoljava ocjenu

$$\|\mathrm{M}_{\mathrm{par}} f\|_{\mathrm{L}^p(\mathbb{R})} \le C_p \|f\|_{\mathrm{L}^p(\mathbb{R})}$$

za neku konačnu konstantu $C_p$ ovisnu samo o eksponentu $p$.

Vjekoslav Kovač

*Uputa za 4. zadatak*: Imitirajte dokaz slabe $\mathrm{L}^1$ ocjene za Hardy-Littlewoodovu maksimalnu funkciju. Neka su $B_1, \ldots, B_n$ kugle koje prekrivaju (zatvarač od) $B$ i takve su da za svaki $i$ vrijedi $\frac{1}{|B_i|} \int_{B_i} f > \frac{\alpha}{2}$. Razlikujte slučaj kada neka od kugala $B_i$ ima radijus veći nego $B$ i slučaj kada sve kugle $B_i$ imaju radijuse manje ili jednake nego kugla $B$. U drugom slučaju se može odozdo ocijeniti prosjek od $f$ na $3B$.

*Uputa za 5. zadatak*: Zamjenom varijabli i dijadskim "razbijanjem" intervala integracije svedite traženu nejednakost na poznatu ocjenu za Hardy-Littlewoodovu maksimalnu funkciju.