

§ 2. Matematička indukcija

Matematička indukcija je jedan od osnovnih alata kojima dokazujemo tvrdnje oblika „Dokažite da za sve prirodne brojeve n vrijedi ...” Ideja iza matematičke indukcije je jako jednostavna – ako dokažemo da tvrdnja vrijedi za 1 te ako dokažemo da ako tvrdnja vrijedi za k , onda vrijedi i za $k + 1$, zapravo smo dokazali da tvrdnja vrijedi za sve prirodne brojeve.

Formalno, indukcija se sastoji od tri koraka:

- 1) **baza indukcije** u kojoj dokazujemo da tvrdnja vrijedi za neki početni broj n , uglavnom $n = 1$;
- 2) **pretpostavka indukcije** u kojoj pretpostavljamo da tvrdnja vrijedi za neki prirodni broj k ;
- 3) **korak indukcije** u kojem dokazujemo da ako tvrdnja vrijedi za k , onda vrijedi i za $k + 1$.

Svaki od koraka je potrebno precizno napisati i provesti. Riješimo jedan jednostavan primjer.

Primjer 2.1. Dokažite da za svaki prirodni broj n vrijedi

$$1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Rješenje 2.1. Tvrdnju ćemo dokazati matematičkom indukcijom. **Baza** je slučaj $n = 1$ za koji tvrdnja očito vrijedi. **Pretpostavimo** da tvrdnja vrijedi za neki $k \in \mathbb{N}$. **Dokažimo** da tvrdnja onda vrijedi i za $k + 1$. Iz pretpostavke imamo

$$1 + 2 + \dots + k = \frac{k(k+1)}{2}.$$

Dodajmo $k + 1$ na lijevu i desnu stranu. Na lijevoj strani imamo

$$1 + 2 + \dots + k + (k + 1),$$

a na desnoj

$$\frac{k(k+1)}{2} + k + 1 = \frac{k(k+1) + 2(k+1)}{2} = \frac{(k+1)(k+2)}{2}.$$

To su upravo dva izraza koja trebamo čime smo dokazali originalnu tvrdnju.

□

Uočimo:

- u ovom slučaju, baza je bila uistinu trivijalna za dokazati. Iako će to često biti tako, ponekad je najteže dokazati bazni slučaj.
- jako smo eksplicitni u izražavanju, odnosno, naglašavamo da koristimo indukciju, što je baza, što pretpostavka, a što korak.
- ukoliko je baza $n = n_0$, gdje je n_0 neki prirodni broj, onda indukcijom dokažemo da tvrdnja vrijedi samo za sve $n \geq n_0$.

Zadatak 2.2. Dokažite da za svaki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi:

- a) $2^n > n$,
- b) $\sum_{k=1}^n (2k-1) = n^2$.

Rješenje 2.2. a) Tvrdnju ćemo dokazati matematičkom indukcijom. **Baza** je slučaj $n = 1$, gdje vrijedi $2^1 = 2 > 1$. **Pretpostavimo** da za neki $k \in \mathbb{N}$ vrijedi $2^k > k$. **Dokažimo** da tada vrijedi i $2^{k+1} > k + 1$.

Imamo

$$2^{k+1} = 2 \cdot 2^k > 2k.$$

Budući da je $k \geq 1$, imamo $2k \geq k + 1$, pa je $2^{k+1} > k + 1$.

Dokazali smo tvrdnju za sve $n \in \mathbb{N}$.

b) Tvrdnju ćemo dokazati matematičkom indukcijom. **Baza** je slučaj $n = 1$, gdje je

$$\sum_{k=1}^1 (2k - 1) = 1 = 1^2.$$

Pretpostavimo da za neki $k \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$\sum_{i=1}^k (2i - 1) = k^2.$$

Dokažimo da vrijedi i za $k + 1$:

$$\sum_{i=1}^{k+1} (2i - 1) = \sum_{i=1}^k (2i - 1) + (2(k + 1) - 1).$$

Koristeći pretpostavku indukcije dobivamo

$$\sum_{i=1}^{k+1} (2i - 1) = k^2 + (2k + 1) = (k + 1)^2.$$

Dakle, tvrdnja vrijedi za sve prirodne brojeve n .

□

Naravno, indukcijom se mogu dokazivati i puno kompliciranije stvari.

Zadatak 2.3. Dokažite da za svaki prirodni broj n veći od 1 vrijedi

$$\frac{n}{2} < 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{2^n - 1} < n.$$

Rješenje 2.3. Neka je

$$S_n := \sum_{j=1}^{2^n - 1} \frac{1}{j}.$$

Baza je slučaj $n = 2$:

$$S_2 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}, \quad \frac{2}{2} = 1 < 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{11}{6} < 2.$$

Pretpostavimo da za neki $k \geq 2$ vrijedi

$$\frac{k}{2} < S_k < k.$$

Dokažimo da tada vrijedi i

$$\frac{k+1}{2} < S_{k+1} < k+1.$$

Za svaki $j \in \{2^k, \dots, 2^{k+1} - 1\}$ vrijedi $2^k \leq j < 2^{k+1}$, pa je

$$\frac{1}{2^{k+1}} < \frac{1}{j} \leq \frac{1}{2^k}.$$

To je 2^k članova pa je

$$\frac{1}{2} = \frac{2^k}{2^{k+1}} < \sum_{j=2^k}^{2^{k+1}-1} \frac{1}{j} \leq \frac{2^k}{2^k} = 1.$$

Jer je

$$S_{k+1} = S_k + \sum_{j=2^k}^{2^{k+1}-1} \frac{1}{j}.$$

slijedi

$$S_{k+1} > \frac{k}{2} + \frac{1}{2} = \frac{k+1}{2}$$

te

$$S_{k+1} < k + 1.$$

□

Zadatak 2.4. Neka je dan niz a_n definiran s

$$a_1 = \sqrt{4}, \quad a_{n+1} = \sqrt{4 + a_n}.$$

Dokažite da za sve prirodne brojeve n vrijedi $a_n < 3$.

Rješenje 2.4. Tvrdnju ćemo dokazati matematičkom indukcijom. **Baza** je slučaj $n = 1$, gdje je $a_1 = \sqrt{4} = 2 < 3$. **Pretpostavimo** da za neki $k \in \mathbb{N}$ vrijedi $a_k < 3$. **Dokažimo** da tada vrijedi i $a_{k+1} < 3$.

Iz rekursivne formule

$$a_{k+1} = \sqrt{4 + a_k}$$

i pretpostavke indukcije dobivamo

$$a_{k+1} < \sqrt{4 + 3} = \sqrt{7} < 3.$$

Time smo dokazali da $a_n < 3$ za svaki $n \in \mathbb{N}$.

□

Zadatak 2.5. Neka je (a_n) niz definiran sa $a_1 = 1, a_2 = 2$ i

$$a_n = a_{n-1} + (n-1)a_{n-2}, \quad \text{za } n \geq 3.$$

Dokažite da vrijedi $a_{2026} \geq \sqrt{2026!}$.

Rješenje 2.5. Matematičkom indukcijom ćemo dokazati da vrijedi

$$a_n \geq \sqrt{n!}$$

za sve prirodne brojeve. **Baza** indukcije je očito zadovoljena jer lako provjerimo slučajeve $n = 1$ i $n = 2$. **Pretpostavimo** da tvrdnja vrijedi za $n - 2$ i $n - 1$, odnosno, da vrijedi

$$a_{n-2} \geq \sqrt{(n-2)!}, \quad a_{n-1} \geq \sqrt{(n-1)!}.$$

Tada:

$$a_n = a_{n-1} + (n-1)a_{n-2} \geq \sqrt{(n-1)!} + (n-1)\sqrt{(n-2)!} = \sqrt{(n-1)!}(1 + \sqrt{n-1}).$$

Kako je

$$(1 + \sqrt{n-1})^2 = 1 + 2\sqrt{n-1} + n-1 > n,$$

slijedi da je $1 + \sqrt{n-1} > \sqrt{n}$. Zato je

$$a_n \geq \sqrt{(n-1)!}(1 + \sqrt{n-1}) > \sqrt{(n-1)!} \cdot \sqrt{n} = \sqrt{n!}$$

čime je dokazan korak indukcije, a samim time i tvrdnja zadatka.

□

§ 2.1. Apsolutna vrijednost

Definicija 2.1

Apsolutna vrijednost je funkcija $|\cdot|: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definirana s:

$$|x| := \begin{cases} x, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -x, & x < 0. \end{cases}$$

Lako se provjeravaju sljedeća svojstva:

- a) $|x| \geq 0$, za sve $x \in \mathbb{R}$;
- b) $|x| = 0 \iff x = 0$;
- c) $|x + y| \leq |x| + |y|$;

Zadatak 2.6. Dokažite da za sve realne brojeve x i y vrijedi

$$||x| - |y|| \leq |x - y|.$$

Rješenje 2.6. Koristit ćemo nejednakost trokuta:

$$|x| = |(x - y) + y| \leq |x - y| + |y|,$$

$$|y| = |(y - x) + x| \leq |y - x| + |x| = |x - y| + |x|.$$

Preuređenjem dobivamo

$$|x| - |y| \leq |x - y|, \quad -(|x| - |y|) \leq |x - y|$$

zbog čega je

$$||x| - |y|| \leq |x - y|.$$

□

Zadatak 2.7. Dokažite da za sve realne brojeve $x_1, \dots, x_n$ vrijedi

$$|x_1 + \dots + x_n| \leq |x_1| + \dots + |x_n|.$$

Rješenje 2.7. Dokazat ćemo matematičkom indukcijom. **Baza** je slučaj $n = 2$:

$$|x_1 + x_2| \leq |x_1| + |x_2|$$

što je posljedica nejednakosti trokuta.

Pretpostavimo da za neki $k \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$|x_1 + \cdots + x_k| \leq |x_1| + \cdots + |x_k|.$$

Dokažimo da tada vrijedi

$$|x_1 + \cdots + x_k + x_{k+1}| \leq |x_1| + \cdots + |x_k| + |x_{k+1}|.$$

Možemo zapisati

$$\begin{aligned} |x_1 + \cdots + x_k + x_{k+1}| &= |(x_1 + \cdots + x_k) + x_{k+1}| \\ &\leq |x_1 + \cdots + x_k| + |x_{k+1}| \leq |x_1| + \cdots + |x_k| + |x_{k+1}|. \end{aligned}$$

pri čemu smo u prvoj nejednakosti primijenili nejednakost trokuta na dva člana, a u drugoj za k članova, koja vrijedi po pretpostavci indukcije. Dakle, tvrdnja vrijedi za sve $n \in \mathbb{N}$.

□