

§ 3. Infimum i supremum skupa

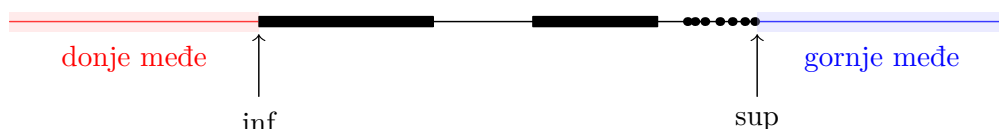
Postojanje infimuma i supremuma za ograničene skupove realnih brojeva je upravo svojstvo koje razlikuje realne brojeve od drugih skupova, zbog čega ćemo se detaljnije upoznati s ta dva broja.

Definicija 3.1

Skup $S \subseteq \mathbb{R}$ je omeđen odozgo ako postoji $M \in \mathbb{R}$ takav da za sve $x \in S$ vrijedi $x \leq M$. Kažemo da je M **gornja međa** skupa S . Najmanju gornju među zovemo **supremum** skupa S . Pišemo $\sup S$.

Definicija 3.2

Skup $S \subseteq \mathbb{R}$ je omeđen odozdo ako postoji $m \in \mathbb{R}$ takav da za sve $x \in S$ vrijedi $x \geq m$. Kažemo da je m **donja međa** skupa S . Najveću donju među zovemo **infimum** skupa S . Pišemo $\inf S$.



Uočimo da su gornje dvije definicije jako slične. Razlika je samo u tome promatramo li omeđenost odozgo ili odozdo. Na prvi pogled nije jasno što želimo reći definicijama infimuma i supremuma, to jest, što točno znači da je nešto najmanja gornja međa, odnosno, najveća donja međa. Zapravo vrijedi sljedeće:

Propozicija 3.3

Neka je $S \subseteq \mathbb{R}$. Realan broj L je supremum skupa S ako i samo ako:

- za sve $x \in S$, $x \leq L$; [L je gornja međa]
- za sve $\varepsilon > 0$ postoji $x \in S$ takav da $x > L - \varepsilon$. [ne postoji manja gornja međa]

Analogno, L je infimum skupa S ako i samo ako:

- za sve $x \in S$, $x \geq L$; [L je donja međa]
- za sve $\varepsilon > 0$ postoji $x \in S$ takav da $x < L + \varepsilon$. [ne postoji veća donja međa]

Drugim riječima, za dokaz jednakosti $\sup S = L$ treba pokazati dvije stvari: najprije da je L gornja međa, a zatim da u skupu postoje elementi koji su proizvoljno blizu broju L s lijeve strane. Potpuno analogno postupamo i kod dokaza da je $\inf S = L$.

Ono što razlikuje skup realnih brojeva $\mathbb{R}$ od skupa racionalnih brojeva $\mathbb{Q}$ je **aksiom potpunosti**, koji govori da svaki neprazan i odozgo omeđen podskup $S \subseteq \mathbb{R}$ ima supremum u $\mathbb{R}$. Na primjer, ako promotrimo skup

$$\{q \in \mathbb{Q} : q^2 < 2\},$$

njegov supremum je $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

Naposljetku, uvodimo pojam minimuma i maksimuma:

Definicija 3.4

Neka je $\emptyset \neq S \subseteq \mathbb{R}$. Ako za $L = \sup S$ vrijedi $L \in S$, kažemo da je L **maksimum** skupa S . Analogno, ako za $L = \inf S$ vrijedi $L \in S$, kažemo da je L **minimum** skupa S .

Riješimo jedan jednostavan primjer:

Primjer 3.1. Odredite infimum i supremum intervala $\langle 1, 3 \rangle$.

Rješenje 3.1. Označimo $S = \langle 1, 3 \rangle$. Tvrđimo

$$\sup S = 3, \inf S = 1.$$

Da bismo dokazali $\sup S = 3$, trebamo dokazati da je 3 gornja međa te da nijedan manji broj nije gornja međa.

Uistinu, svaki broj u skupu S je manji od 3 pa je 3 gornja međa. Također, koji god $\varepsilon > 0$ uzmemo, postoji element skupa S veći od $3 - \varepsilon$. Ako je $0 < \varepsilon < 2$, možemo uzeti $3 - \varepsilon/2 \in S$, a ako je $\varepsilon \geq 2$, možemo uzeti $2 \in S$.

Analogno dokažemo da je $\inf S = 1$.

□

Naravno, mi ćemo često imati kompliciranije skupove kojima nije ovako jednostavno odrediti infimum i supremum, no osnovna ideja je uvijek ista.

Zadatak 3.2. Odredite infimum i supremum skupova:

a) $A = \left\{ \frac{1}{x^2 + 1} : x \in \mathbb{R} \right\};$

b) $B = \left\{ \frac{x^2 - 4}{x^2 + 4} : x \in \mathbb{R} \right\}.$

Rješenje 3.2. a) Primijetimo da vrijedi

$$\frac{1}{x^2 + 1} \leq \frac{1}{0 + 1} = 1 \quad \text{za svaki } x \in \mathbb{R}.$$

iz čega slijedi da je 1 gornja međa skupa A . Nadalje, za $x = 0$ imamo

$$\frac{1}{x^2 + 1} = 1,$$

iz čega slijedi da je 1 maksimum skupa A . Dakle, $\sup A = \max A = 1$.

Nadalje, primijetimo da vrijedi

$$\frac{1}{x^2 + 1} > 0 \quad \text{za svaki } x \in \mathbb{R}.$$

iz čega slijedi da je 0 donja međa skupa A .

Dokažimo da je $\inf A = 0$. Neka je $\varepsilon > 0$. Trebamo pronaći $x \in \mathbb{R}$ takav da je

$$\frac{1}{x^2 + 1} < 0 + \varepsilon,$$

to jest

$$x^2 + 1 > \frac{1}{\varepsilon}.$$

Kako je $\varepsilon > 0$, možemo uzeti, na primjer, $x = \frac{1}{\varepsilon}$. Tada je

$$x^2 + 1 = \frac{1}{\varepsilon^2} + 1 > \frac{1}{\varepsilon},$$

pa doista vrijedi

$$\frac{1}{x^2 + 1} < \varepsilon.$$

Dakle, $\inf A = 0$.

b) Primijetimo da vrijedi

$$\frac{x^2 - 4}{x^2 + 4} = \frac{x^2 + 4 - 4 - 4}{x^2 + 4} = 1 - \frac{8}{x^2 + 4}.$$

Nadalje, imamo

$$1 - \frac{8}{x^2 + 4} < 1,$$

jer je $\frac{8}{x^2 + 4} > 0$, pa imamo da je 1 gornja međa skupa B . Tvrdimo da je $\sup B = 1$. Neka je $\varepsilon > 0$. Tražimo $x \in \mathbb{R}$ takav da je

$$\begin{aligned} 1 - \frac{8}{x^2 + 4} > 1 - \varepsilon &\iff \varepsilon > \frac{8}{x^2 + 4} \\ &\iff (x^2 + 4)\varepsilon > 8. \end{aligned}$$

Uzmimo $x = \frac{8}{\varepsilon}$. Tada je

$$(x^2 + 4)\varepsilon = \left(\frac{64}{\varepsilon^2} + 4\right)\varepsilon = \frac{64}{\varepsilon} + 4\varepsilon > 8,$$

pa slijedi

$$1 - \frac{8}{x^2 + 4} > 1 - \varepsilon.$$

Dakle, $\sup B = 1$.

S druge strane, primijetimo da vrijedi

$$1 - \frac{8}{x^2 + 4} \geq 1 - \frac{8}{0 + 4} = 1 - 2 = -1,$$

gdje smo iskoristili činjenicu da je $x^2 \geq 0$. Sada za $x = 0$ imamo $1 - \frac{8}{x^2 + 4} = 1 - \frac{8}{4} = -1$, te imamo $\inf B = \min B = -1$. □

Ako je skup zadan pomoću niza, tada iz promatranja ponašanja toga niza često možemo zaključiti koliki su njegov infimum i supremum.

Definicija 3.5

Niz realnih brojeva je funkcija $a: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$. Umjesto $a(n)$ pišemo a_n . Niz označavamo s $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Kažemo da je niz $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ **rastući** ako za sve prirodne brojeve n vrijedi $a_n \leq a_{n+1}$. Analogno, kažemo da je niz $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ **padajući** ako za sve prirodne brojeve n vrijedi $a_n \geq a_{n+1}$. Ukoliko vrijedi stroga nejednakost, kažemo da je niz strogo rastući, to jest, strogo padajući.

Zadatak 3.3. Odredite infimum i supremum skupova:

$$\text{a) } A = \left\{ \frac{3n-2}{n+3} : n \in \mathbb{N} \right\};$$

$$\text{b) } B = \left\{ \frac{n^2+1}{2n^2+n} : n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Rješenje 3.3. a) Imamo

$$a_n = \frac{3n-2}{n+3} = \frac{3(n+3) - 3 \cdot 3 - 2}{n+3} = 3 - \frac{11}{n+3}.$$

Dakle, $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ je rastući niz, iz čega slijedi

$$\inf A = \min A = a_1 = 3 - \frac{11}{4} = \frac{1}{4}.$$

Tvrdimo da je $\sup A = 3$. Vrijedi

$$a_n = 3 - \frac{11}{n+3} \leq 3,$$

iz čega slijedi da je 3 gornja međa skupa A .

Neka je $\varepsilon > 0$. Imamo:

$$\begin{aligned} a_n > 3 - \varepsilon &\iff 3 - \frac{11}{n+3} > 3 - \varepsilon \\ &\iff \varepsilon > \frac{11}{n+3} \\ &\iff (n+3)\varepsilon > 11. \end{aligned}$$

Odaberimo $n_0 \in \mathbb{N}$ tako velik da je $n_0\varepsilon > 11$. Tada je i

$$(n_0+3)\varepsilon > 11,$$

odakle slijedi $a_{n_0} > 3 - \varepsilon$. Dakle, $\sup A = 3$.

b) Imamo niz

$$b_n = \frac{n^2+1}{2n^2+n}.$$

Da bismo odredili infimum, najprije ispitajmo monotonost niza:

$$\begin{aligned} b_n < b_{n+1} &\iff \frac{n^2+1}{2n^2+n} < \frac{(n+1)^2+1}{2(n+1)^2+n+1} \\ &\iff \frac{n^2+1}{2n^2+n} < \frac{n^2+2n+2}{2n^2+5n+3} \\ &\iff (n^2+1)(2n^2+5n+3) < (n^2+2n+2)(2n^2+n) \\ &\iff 2n^4+5n^3+5n^2+5n+3 < 2n^4+5n^3+6n^2+2n \\ &\iff -n^2+3n+3 < 0. \end{aligned}$$

Nultočke polinoma $-x^2+3x+3$ su

$$-x^2+3x+3=0 \iff x_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{9+12}}{-2} = \frac{3 \mp \sqrt{21}}{2}.$$

Odnosno, vrijedi $x_1 \approx -0.79$ i $x_2 \approx 3.79$.

Dakle, gornja nejednakost vrijedi za $n > x_2$, tj. za $n \geq 4$. Tada je niz rastući. Imamo:

$$b_1 > b_2 > b_3 > b_4 < b_5 < b_6 < \dots$$

Slijedi da je $\inf B = \min B = b_4 = \frac{17}{36}$. Odredimo sada $\sup B$. Imamo:

$$b_1 = \frac{1^2 + 1}{2 \cdot 1^2 + 1} = \frac{2}{3}.$$

Za $n \geq 2$ procijenimo sada članove niza:

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{n^2 + 1}{2n^2 + n} = \frac{1}{2} \cdot \frac{n^2 + 1}{n^2 + \frac{n}{2}} \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{n^2 + \frac{n}{2} - \frac{n}{2} + 1}{n^2 + \frac{n}{2}} \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\frac{n}{2} - 1}{n^2 + \frac{n}{2}} \\ &= \frac{1}{2} - \frac{n - 2}{4n^2 + 2n} \leq \frac{1}{2}, \quad n \geq 2. \end{aligned}$$

Dakle, $\sup B = \max B = b_1 = \frac{2}{3}$.

□

Zadatak 3.4. Neka su $A, B \subseteq \mathbb{R}$ odozgo omeđeni neprazni skupovi. Dokažite:

- a) $\sup(A + B) = \sup A + \sup B$;
- b) $\sup(A \cup B) = \max\{\sup A, \sup B\}$.

Rješenje 3.4. a) Najprije pokažimo da je $\sup A + \sup B$ gornja međa skupa $A + B$. Doista,

$$x + y \leq \sup A + \sup B \quad \text{za sve } x \in A \text{ i } y \in B.$$

Sada pokažimo da nijedan manji broj ne može biti gornja međa. Neka je $\varepsilon > 0$. Tada postoje $x_0 \in A$ i $y_0 \in B$ takvi da vrijedi

$$x_0 > \sup A - \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{i} \quad y_0 > \sup B - \frac{\varepsilon}{2}.$$

Tada je $x_0 + y_0 \in A + B$ i

$$x_0 + y_0 > \sup A - \frac{\varepsilon}{2} + \sup B - \frac{\varepsilon}{2} = \sup A + \sup B - \varepsilon.$$

b) Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je $\sup A \leq \sup B$. Najprije pokažimo da je $\sup B$ gornja međa skupa $A \cup B$. Svaki element skupa $A \cup B$ pripada barem jednom od skupova A i B . Zato za svaki $x \in A \cup B$ vrijedi $x \leq \sup B$: ako je $x \in A$, onda je $x \leq \sup A \leq \sup B$, a ako je $x \in B$, onda izravno imamo $x \leq \sup B$.

Sada pokažimo da je ta gornja međa i najmanja. Neka je $\varepsilon > 0$. Kako je $\sup B$ supremum skupa B , postoji $x_0 \in B$ takav da je

$$x_0 > \sup B - \varepsilon.$$

Budući da je $B \subseteq A \cup B$, vrijedi i $x_0 \in A \cup B$. Dakle, $\sup B$ je najmanja gornja međa skupa $A \cup B$. Slijedi da je

$$\sup B = \max\{\sup A, \sup B\}$$

supremum skupa $A \cup B$.

□

Analogno se pokaže tvrdnja za infimume. Kao domaću zadaću, provjerite da za odozdo omeđene neprazne skupove $A, B \subseteq \mathbb{R}$ vrijedi

- a) $\inf(A + B) = \inf A + \inf B$;
 b) $\inf(A \cup B) = \min\{\inf A, \inf B\}$.

Zadatak 3.5. Odredite infimum i supremum skupova:

- a) $A = \left\{ \frac{m - n - 1}{mn + 4m + 3n + 12} : m, n \in \mathbb{N} \right\}$;
 b) $B = \left\{ (-1)^n \frac{n^2 + 2}{n^2 + 7} : n \in \mathbb{N} \right\}$.

Rješenje 3.5. a) Vrijedi

$$\begin{aligned} \frac{m - n - 1}{mn + 4m + 3n + 12} &= \frac{m - n - 1}{(m + 3)(n + 4)} \\ &= \frac{m + 3 - (n + 4)}{(m + 3)(n + 4)} \\ &= \frac{1}{n + 4} - \frac{1}{m + 3}. \end{aligned}$$

Dakle, $A = C + D$, gdje je

$$C := \left\{ \frac{1}{n + 4} : n \in \mathbb{N} \right\}, \quad D := \left\{ -\frac{1}{m + 3} : m \in \mathbb{N} \right\}.$$

Vrijedi:

$$\begin{aligned} \sup C &= \max C = \frac{1}{5} \quad (n = 1), & \sup D &= 0, \\ \inf C &= 0, & \inf D &= \min D = -\frac{1}{4} \quad (m = 1). \end{aligned}$$

Dakle, imamo:

$$\begin{aligned} \sup A &= \sup C + \sup D = \frac{1}{5} + 0 = \frac{1}{5} \quad (\text{nije maksimum}), \\ \inf A &= \inf C + \inf D = 0 + \left(-\frac{1}{4}\right) = -\frac{1}{4} \quad (\text{nije minimum}). \end{aligned}$$

b) Definiramo $B := C \cup D$, gdje je

$$\begin{aligned} C &:= \left\{ (-1)^{2k} \frac{(2k)^2 + 2}{(2k)^2 + 7} : k \in \mathbb{N} \right\} = \left\{ \frac{4k^2 + 2}{4k^2 + 7} : k \in \mathbb{N} \right\}, \\ D &:= \left\{ (-1)^{2k-1} \frac{(2k-1)^2 + 2}{(2k-1)^2 + 7} : k \in \mathbb{N} \right\} = \left\{ -\frac{(2k-1)^2 + 2}{(2k-1)^2 + 7} : k \in \mathbb{N} \right\}. \end{aligned}$$

Skup C. Definiramo

$$c_k = \frac{4k^2 + 2}{4k^2 + 7} = 1 - \frac{5}{4k^2 + 7} < 1.$$

Niz (c_k) je rastući pa vrijedi $\inf C = \min C = c_1 = \frac{6}{11}$. Uočimo da je 1 gornja međa skupa C. Dokažimo da je $\sup C = 1$. Neka je $\varepsilon > 0$. Tada je

$$\begin{aligned} c_k > 1 - \varepsilon &\iff 1 - \frac{5}{4k^2 + 7} > 1 - \varepsilon \\ &\iff \varepsilon > \frac{5}{4k^2 + 7} \iff (4k^2 + 7)\varepsilon > 5. \end{aligned}$$

Odaberimo $k_0 \in \mathbb{N}$ tako velik da je $k_0\varepsilon > 5$. Tada vrijedi

$$(4k_0^2 + 7)\varepsilon > (4k_0^2)\varepsilon > k_0^2\varepsilon \geq k_0\varepsilon > 5.$$

Dakle, $\sup C = 1$.

Skup D . Definiramo

$$d_k = -\frac{(2k-1)^2 + 2}{(2k-1)^2 + 7} = -1 + \frac{5}{(2k-1)^2 + 7}.$$

Niz (d_k) je padajući pa vrijedi $\sup D = \max D = d_1 = -\frac{3}{8}$. Uočimo da je -1 donja međa skupa D . Dokažimo da je $\inf D = -1$. Neka je $\varepsilon > 0$. Tada je

$$\begin{aligned} d_k < -1 + \varepsilon &\iff -1 + \frac{5}{(2k-1)^2 + 7} < -1 + \varepsilon \\ &\iff \varepsilon > \frac{5}{(2k-1)^2 + 7} \iff ((2k-1)^2 + 7)\varepsilon > 5. \end{aligned}$$

Odaberimo $k_0 \in \mathbb{N}$ tako velik da je $k_0\varepsilon > 5$. Tada vrijedi

$$((2k_0+1)^2 + 7)\varepsilon > 4k_0^2\varepsilon > k_0^2\varepsilon \geq k_0\varepsilon > 5.$$

Dakle, $\inf D = -1$.

Sada imamo

$$\sup B = \sup(C \cup D) = \max\{\sup C, \sup D\} = \max\left\{1, -\frac{3}{8}\right\} = 1,$$

$$\inf B = \inf(C \cup D) = \min\{\inf C, \inf D\} = \min\left\{\frac{6}{11}, -1\right\} = -1.$$

□

Zadatak 3.6. Neka su $A, B \subseteq [0, \infty)$ odozgo omeđeni i neprazni. Definiramo

$$A \cdot B = \{xy : x \in A, y \in B\}.$$

Dokažite

$$\sup(A \cdot B) = \sup A \cdot \sup B.$$

Rješenje 3.6. Ako je $\sup A = 0$, onda je $A = \{0\}$ pa je $A \cdot B = \{0\}$ i tvrdnja slijedi. Pretpostavimo da je $\sup A > 0$. Vrijedi:

$$xy \leq \sup A \sup B \quad \text{za sve } x \in A \text{ i } y \in B.$$

pa slijedi da je $\sup A \sup B$ gornja međa skupa $A \cdot B$. Dokažimo da je to doista supremum. Navest ćemo dva dokaza.

Prvi način. Ako je $\sup B = 0$, onda je $B = \{0\}$ pa je $A \cdot B = \{0\}$ i tvrdnja slijedi. Pretpostavimo stoga da je i $\sup B > 0$. Neka je $0 < \varepsilon < \sup A \sup B$. Tada za

$$\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon}{2\sup B} > 0$$

postoji $x \in A$ takav da je

$$x > \sup A - \varepsilon_1,$$

$$\varepsilon_2 = \frac{\varepsilon}{2\sup A} > 0$$

a postoji i $y \in B$ takav da je

$$y > \sup B - \varepsilon_2.$$

Sada imamo

$$\begin{aligned} xy &> (\sup A - \varepsilon_1)(\sup B - \varepsilon_2) \\ &= \sup A \sup B - \varepsilon + \frac{\varepsilon^2}{4 \sup A \sup B} \\ &> \sup A \sup B - \varepsilon. \end{aligned}$$

Drugi način. Stavimo oznaku $C = A \cdot B$. Već smo dokazali da je $\sup A \sup B$ gornja međa skupa $C = A \cdot B$. Kako je skup C odozgo ograničen, po aksiomu potpunosti, C ima supremum u $\mathbb{R}$, a kako je supremum najmanja gornja međa, vrijedi

$$\sup C \leq \sup A \sup B \quad (1)$$

Dokažimo sada da vrijedi i $\sup A \sup B \leq \sup C$. Vrijedi $ab \leq \sup C$ za sve $a \in A, b \in B$. Budući da smo pretpostavili $\sup A > 0$, postoji $a_0 \in A \setminus \{0\}$. Vrijedi

$$b \leq \frac{\sup C}{a_0}$$

za sve $b \in B$ pa je $\frac{\sup C}{a_0}$ gornja međa skupa B , iz čega slijedi

$$\sup B \leq \frac{\sup C}{a_0}.$$

Ukoliko je $\sup B = 0$, onda je $B = \{0\}$ pa je $C = \{0\}$ i onda tvrdnja očito vrijedi jer je u ovom slučaju $\sup C = \sup A \sup B = 0$. Ako je $\sup B > 0$, onda možemo zaključiti da je

$$a_0 \leq \frac{\sup C}{\sup B}$$

za sve $a_0 \in A \setminus \{0\}$, a zapravo vrijedi i

$$a \leq \frac{\sup C}{\sup B}$$

za sve $a \in A$. Stoga je $\frac{\sup C}{\sup B}$ gornja međa skupa A pa je

$$\sup A \leq \frac{\sup C}{\sup B},$$

odnosno

$$\sup A \sup B \leq \sup C. \quad (2)$$

Iz (1) i (2) slijedi $\sup A \sup B = \sup C$.

□

Analogna tvrdnja vrijedi i za infimume. Kao domaću zadaću, provjerite da za neprazne skupove $A, B \subseteq [0, \infty)$ vrijedi $\inf(A \cdot B) = \inf A \cdot \inf B$. Također, vrijedi i općenitija tvrdnja. Za A, B neprazne i omeđene,

$$\begin{aligned} \sup(A \cdot B) &= \max\{\sup A \sup B, \sup A \inf B, \inf A \sup B, \inf A \inf B\}, \\ \inf(A \cdot B) &= \min\{\sup A \sup B, \sup A \inf B, \inf A \sup B, \inf A \inf B\}. \end{aligned}$$

Zadatak 3.7. Odredite infimum i supremum skupova:

a) $A = \left\{ \frac{2n-1}{n} \cdot \frac{1+m}{m} : m, n \in \mathbb{N} \right\};$

b) $B = \left\{ \frac{n^2 x}{n^2 x + 2x + n^2 + 2} : n \in \mathbb{N}, x \geq 0 \right\}.$

Rješenje 3.7. a) Neka je $A = C \cdot D$, gdje je

$$C := \left\{ \frac{2n-1}{n} : n \in \mathbb{N} \right\} \subseteq [0, \infty), \quad D := \left\{ \frac{1+m}{m} : m \in \mathbb{N} \right\} \subseteq [0, \infty).$$

Dobivamo da je $\sup C = 2$, $\inf C = \min C = 1$ (postiže se za $n = 1$) te $\sup D = \max D = 2$ (postiže se za $m = 1$) i $\inf D = 1$.

Dakle, imamo

$$\sup A = \sup C \cdot \sup D = 2 \cdot 2 = 4,$$

$$\inf A = \inf C \cdot \inf D = 1 \cdot 1 = 1.$$

b) Vrijedi

$$B = \left\{ \frac{n^2}{n^2 + 2} \cdot \frac{x}{x+1} : n \in \mathbb{N}, x \geq 0 \right\} = C \cdot D,$$

gdje je

$$C := \left\{ \frac{n^2}{n^2 + 2} : n \in \mathbb{N} \right\} \subseteq [0, \infty), \quad D := \left\{ \frac{x}{x+1} : x \geq 0 \right\} \subseteq [0, \infty).$$

Lako dobivamo da je $\sup C = 1$ i $\inf C = \min C = \frac{1}{3}$ ($n = 1$). Vrijedi

$$\frac{x}{x+1} \geq 0$$

pa je 0 donja međa skupa D , a ujedno i minimum skupa D jer se dostiže za $x = 0$. Stoga je $\inf D = 0$. Nadalje,

$$\frac{x}{x+1} = 1 - \frac{1}{x+1} < 1$$

za $x \geq 0$ pa je 1 gornja međa skupa D . Dokažimo da je $\sup D = 1$. Treba dokazati da za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $x \geq 0$ takav da vrijedi

$$1 - \varepsilon < 1 - \frac{1}{x+1}.$$

što je ekvivalentno s $\varepsilon(x+1) > 1$. Uzmimo $x = \frac{1}{\varepsilon}$. Tada je $x \geq 0$ i

$$\varepsilon(x+1) = \varepsilon \left(\frac{1}{\varepsilon} + 1 \right) = 1 + \varepsilon > 1,$$

pa slijedi

$$1 - \varepsilon < 1 - \frac{1}{x+1}.$$

Slijedi da je $\sup D = 1$ te $\inf D = \min D = 0$ ($x = 0$). Sada vidimo da je

$$\sup B = \sup C \cdot \sup D = 1 \cdot 1 = 1$$

te

$$\inf B = \inf C \cdot \inf D = \frac{1}{3} \cdot 0 = 0 = \min B.$$

□