1	2	3	4	5	6	$\sum$

Ime i Prezime, JMBAG

Kombinatorna i diskretna matematika
1. ispit, 4.2.2026.

Kalkulatori su zabranjeni. (Rješenja ostavite u kombinatornom zapisu.) Zadaci označeni zvjezdicom (*) odnose se na drugi dio gradiva.

1. [20 bodova]

(a) Koliko ima prirodnih rješenja (x_1, x_2, x_3, x_4) jednadžbe

$$x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_4 = 3^{33}?$$

(b) Koliko ima cjelobrojnih rješenja (x_1, x_2, x_3, x_4) jednadžbe

$$x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_4 = 3^{33}?$$

2. *[20 bodova] Odredite niz $(a_n)_{n\geq 0}$ koji zadovoljava $a_0 = 2$, $a_1 = 6$ i

$$a_{n+2} - 5a_{n+1} + 6a_n = 2n - 3 \quad \text{za} \quad n \geq 0.$$

3. *[20 bodova] Neka je b_n broj nenegativnih cjelobrojnih rješenja jednadžbe

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = n$$

takvih da je x_1 paran, x_2 neparan i $x_3 = x_4$. Odredite funkciju izvodnicu za niz $(b_n)_{n\geq 0}$ te odredite b_{20} i b_{21}.

4. *[20 bodova] Pravilnom n-terokutu u ravnini nacrtano je k dijagonala koje se ne sijeku osim u vrhovima. Time je n-terokut podijeljen na 7 trokuta i 8 četverokuta. Odredite n i k.

Uputa. Promotrite planaran graf u kojem su vrhovi jednaki vrhovima n-terokuta, a bridovi su stranice n-terokuta i nacrtane dijagonale. Koristite Eulerovu formulu i lemu o rukovanju za područja. Ne zaboravite na vanjsko područje.

5. [10 bodova]

(a) Dokažite kombinatorno

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}.$$

(b) Koristeći FUI odredite formulu za broj surjekcija s n-članog skupa u k-člani skup.

6. *[10 bodova]

(a) Definirajte bipartitan graf i dokažite: Ako povezan graf ne sadrži cikluse neparne duljine, onda je bipartitan.

(b) Definirajte Platonovo tijelo te dokažite da ih postoji točno 5.

$f(n)$	a_n^p
$f(n) = p(n) \cdot b^n$, $\text{st}(p) = m$	$a_n^p = q(n) \cdot n^k \cdot b^n$, k = kratnost od b kao nultočke kar. jedn. (može biti $m = 0, b = 1$ ili $k = 0$), $q(n)$ = polinom stupnja m
Posebno: $b = 1$ $f(n) = p(n),\ \text{st}(p) = m$	$a_n^p = q(n) \cdot n^k$, k = kratnost od 1 kao nultočke kar. jedn. (može biti $k = 0$), $q(n)$ = polinom stupnja m
Posebno: $m = 0$ $f(n) = C \cdot b^n$	$a_n^p = A \cdot n^k \cdot b^n$, k = kratnost od b kao nultočke kar. jedn. (može biti $k = 0$), A = neodređeni koeficijent