1	2	3	4	5	6	$\sum$

Ime i Prezime, JMBAG

Kombinatorna i diskretna matematika
2. ispit, 18.2.2026.

Kalkulatori su zabranjeni. (Rješenja ostavite u kombinatornom zapisu.) Zadaci označeni zvjezdicom (*) odnose se na drugi dio gradiva.

1. [20 bodova]

(a) Na koliko načina možemo poredati 30 slova A, 40 slova B i 71 slovo C u niz tako da nikoja dva slova C nisu susjedna?

(b) Na koliko načina možemo poredati 30 slova A, 40 slova B i 71 slovo C u niz tako da nikoja dva slova A nisu susjedna?

2. *[20 bodova] Odredite niz $(a_n)_{n\geq 0}$ koji zadovoljava $a_0 = 1$, $a_1 = 7$ i

$$a_{n+2} - 7a_{n+1} + 12a_n = 4^{n+1} \quad \text{za} \quad n \geq 0.$$

3. *[20 bodova] Neka je a_n broj nizova sastavljenih od slova A, B, C takvih da se A javlja proizvoljno puta, B se javlja parno mnogo puta, a C se javlja najviše 3 puta. Odredite eksponencijalnu funkciju izvodnicu za $(a_n)_{n\geq 0}$ te a_{50}.

4. *[20 bodova] Odredite postoje li grafovi s 8 vrhova u kojem vrhovi imaju stupnjeve:

(a)
$$8,\ 7,\ 6,\ 5,\ 4,\ 3,\ 2,\ 1$$

(b)
$$7,\ 7,\ 6,\ 5,\ 4,\ 4,\ 3,\ 2$$

(c)
$$7,\ 7,\ 5,\ 5,\ 3,\ 3,\ 2,\ 2$$

(d)
$$5,\ 5,\ 5,\ 5,\ 5,\ 5,\ 5,\ 4$$

Ako postoje, skicirajte neki graf s tim stupnjevima. Ako ne postoje, obrazložite. Nadalje, za svaki od slučaja gdje graf postoji, odredite postoji li planaran graf s tim stupnjevima.

5. [10 bodova]

(a) Koristeći binomni teorem dokažite da je broj podskupova n-članog skupa s parnim brojem elemenata jednak broju podskupova n-članog skupa s neparnim brojem elemenata i taj broj iznosi 2^{n-1}.

(b) Definirajte deranžman i koristeći FUI, dokažite da ih na n-članom skupu ima $\sum_{i=0}^{n}(-1)^i\frac{n!}{i!}$.

6. [10 bodova]*

(a) Definirajte šetnju, stazu i put u grafu te dokažite da ako za dva različita vrha x i y grafa G postoji šetnja između njih, onda postoji i put između njih.

(b) Iskažite i dokažite Eulerovu formulu za planarne grafove.

$f(n)$	a_n^p
$f(n) = p(n) \cdot b^n$, $\text{st}(p) = m$	$a_n^p = q(n) \cdot n^k \cdot b^n$, k = kratnost od b kao nultočke kar. jedn. (može biti $m = 0, b = 1$ ili $k = 0$), $q(n)$ = polinom stupnja m
Posebno: $b = 1$ $f(n) = p(n),\ \text{st}(p) = m$	$a_n^p = q(n) \cdot n^k$, k = kratnost od 1 kao nultočke kar. jedn. (može biti $k = 0$), $q(n)$ = polinom stupnja m
Posebno: $m = 0$ $f(n) = C \cdot b^n$	$a_n^p = A \cdot n^k \cdot b^n$, k = kratnost od b kao nultočke kar. jedn. (može biti $k = 0$), A = neodređeni koeficijent