1	2	3	4	5	6	$\sum$

Ime i Prezime, JMBAG

Kombinatorna i diskretna matematika
3. ispit, 28.8.2026.

Kalkulatori su zabranjeni. (Rješenja ostavite u kombinatornom zapisu.) Zadaci označeni zvjezdicom (*) odnose se na drugi dio gradiva.

1. [20 bodova]

(a) Na koliko načina možemo poredati znamenke $0, 1, \ldots, 9$ u krug tako da je umnožak svakih dviju uzastopnih znamenki paran?

(b) Na koliko načina možemo poredati znamenke $0, 1, \ldots, 9$ u krug tako da je umnožak svakih dviju uzastopnih znamenki djeljiv s 3?

(c) Na koliko načina možemo poredati znamenke $0, 1, \ldots, 9$ u krug tako da zbroj nikoje dvije uzastopne znamenke nije 8?

2. *[20 bodova] Neka je n prirodan broj. Ploču $1 \times n$ popločavamo pločicama 1×2 i 1×3. Pločice 1×2 mogu biti crvene, bijele ili plave, dok pločice 1×3 mogu biti zelene ili žute. Neka je $(a_n)_n$ broj različitih popločavanja ploče $1 \times n$ na opisan način.

(a) Dokažite da je $a_n = 3a_{n-2} + 2a_{n-3}$ za $n \geq 4$.

(b) Odredite formulu za opći član niza $(a_n)_n$.

Napomena. Za jedan od početnih uvjeta možete uzeti $a_0 = 1$.

3. *[20 bodova] Neka je b_n broj načina za izabrati ukupno n deserata, ako na raspolaganju imamo 10 identičnih bombona, 11 identičnih kolača i 12 identičnih sladoleda. Odredite funkciju izvodnicu za niz $(b_n)_n$ te izračunajte b_{23}.

4. *[20 bodova] U povezanom planarnom grafu s 10 vrhova, ukupno ima $a+b$ područja, od kojih je a područja stupnja 4 i b područja stupnja 5.

(a) Dokažite da je $2a + 3b = 16$.

(b) Skicirajte primjere takvih planarnih grafova za $(a, b) = (8, 0)$ i $(a, b) = (5, 2)$.

5. [10 bodova]

(a) Dokažite kombinatorno da za sve $m, n, r \in \mathbb{N}$ vrijedi identitet $\sum_{k=0}^{r} \binom{m}{k}\binom{n}{r-k} = \binom{m+n}{r}$

(b) Definirajte permutaciju n-članog skupa te dokažite kombinatorno da ih ima točno $n!$.

6. *[10 bodova]

(a) Dokažite da je u svakom grafu broj vrhova s neparnim stupnjem paran.

(b) Dokažite da stablo s više od jednog vrha ima barem jedan list.

$f(n)$	a_n^p
$f(n) = p(n) \cdot b^n$, $\text{st}(p) = m$	$a_n^p = q(n) \cdot n^k \cdot b^n$, k = kratnost od b kao nultočke kar. jedn. (može biti $m = 0, b = 1$ ili $k = 0$), $q(n)$ = polinom stupnja m
Posebno: $b = 1$ $f(n) = p(n),\ \text{st}(p) = m$	$a_n^p = q(n) \cdot n^k$, k = kratnost od 1 kao nultočke kar. jedn. (može biti $k = 0$), $q(n)$ = polinom stupnja m
Posebno: $m = 0$ $f(n) = C \cdot b^n$	$a_n^p = A \cdot n^k \cdot b^n$, k = kratnost od b kao nultočke kar. jedn. (može biti $k = 0$), A = neodređeni koeficijent