1	2	3	4	5	6	$\sum$

Ime i Prezime, JMBAG

Kombinatorna i diskretna matematika
4. ispit, 11.9.2026.

Kalkulatori su zabranjeni. (Rješenja ostavite u kombinatornom zapisu.) Zadaci označeni zvjezdicom (*) odnose se na drugi dio gradiva.

1. [20 bodova]

(a) Na koliko načina možemo poredati 5 različitih pasa i 11 različitih mačaka u vrstu?

(b) Na koliko načina možemo poredati 5 različitih pasa i 11 različitih mačaka u vrstu tako da ne postoje 3 uzastopne mačke?

(c) Na koliko načina možemo poredati brojeve $0, 1, \ldots, 9$ u niz tako da je zbroj bilo koje dvije uzastopne znamenke u nizu različit od 6?

2. *[20 bodova] Odredite opću formulu za niz $(a_n)_{n\geq 0}$ koji zadovoljava $a_0 = 0$, $a_1 = 0$ i

$$a_{n+2} - 3a_{n+1} + 2a_n = 2n, \quad n \geq 0.$$

3. *[20 bodova] Neka je b_n broj riječi duljine n koje se mogu sastaviti od barem dva slova A, točno dva slova B i najviše dva slova C.

(a) Odredite eksponencijalnu funkciju izvodnicu za niz $(b_n)_{n\geq 0}$.

(b) Izračunajte b_{20}.

Napomena. Ne morate koristiti (a) dio zadatka da biste riješili (b) dio zadatka.

4. *[20 bodova] Postoje li jednostavni grafovi s 8 vrhova kojima vrhovi imaju sljedeće stupnjeve:

(a) $7, 6, 5, 4, 3, 2, 2, 2$?

(b) $6, 6, 6, 6, 6, 6, 6, 6$?

(c) $7, 7, 7, 7, 7, 7, 5, 5$?

Ako postoje, skicirajte ih. Ako ne postoje, obrazložite.

5. [10 bodova]

(a) Dokažite da k-članih skupova n-članog skupa ima točno $\binom{n}{k}$.

(b) Definirajte permutaciju n-članog skupa te dokažite kombinatorno da ih ima točno $n!$.

6. *[10 bodova]

(a) Dokažite da je u svakom grafu broj vrhova s neparnim stupnjem paran.

(b) Iskažite i dokažite Eulerovu formula za planarne grafove.

$f(n)$	a_n^p
$f(n) = p(n) \cdot b^n$, $\text{st}(p) = m$	$a_n^p = q(n) \cdot n^k \cdot b^n$, k = kratnost od b kao nultočke kar. jedn. (može biti $m = 0, b = 1$ ili $k = 0$), $q(n)$ = polinom stupnja m
Posebno: $b = 1$ $f(n) = p(n),\ \text{st}(p) = m$	$a_n^p = q(n) \cdot n^k$, k = kratnost od 1 kao nultočke kar. jedn. (može biti $k = 0$), $q(n)$ = polinom stupnja m
Posebno: $m = 0$ $f(n) = C \cdot b^n$	$a_n^p = A \cdot n^k \cdot b^n$, k = kratnost od b kao nultočke kar. jedn. (može biti $k = 0$), A = neodređeni koeficijent