Ime i prezime: ________________________ Studij (zaokružite): bio bio & kem zook geo

MATEMATIKA 1

ISPIT, 31. 01. 2024.

Ispit se sastoji od 5 zadataka, a svaki može donijeti najviše 20 bodova. Dozvoljena je tablica derivacija i integrala. Kalkulatori i druga pomagala nisu dozvoljeni. Potpišite se na svaki list papira koji predate.

---

1. Dokažite matematičkom indukcijom da za sve prirodne brojeve n vrijedi $3^n \geq n^2 + n + 1$.

2. a) Odredite parnost funkcije

$$f(x) = (x^7 - x^5)\cos x\, e^{-x^2}.$$

   b) Odredite prirodnu domenu funkcije

$$f(x) = \frac{\sqrt{x^3 - x}}{\ln x}.$$

3. a) Izračunajte limes

$$\lim_{x \to +\infty} x(\sqrt{x^2+1} - x).$$

   b) Koristeći L'Hopitalovo pravilo izračunajte limes

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{x - \sin x}.$$

4. Izračunajte integrale:

   a) $\displaystyle\int \frac{\operatorname{tg} x}{\cos x}\, dx$,

   b) $\displaystyle\int \frac{x}{x^2 + 3x + 2}\, dx$.

5. Pretpostavimo da su stope apsorpcije i potrošnje hranjivih tvari, $A(r)$, $C(r)$, jednostavnih sfernih stanica radijusa r dane sa

$$A(r) = 4k_1\pi r^2, \quad C(r) = \frac{4}{3}k_2\pi r^3,$$

gdje su k_1, $k_2 > 0$ pozitivne konstante. Neto stopa povećanja hranjivih tvari u ovisnosti o radijusu stanice je tada dana s

$$N(r) = A(r) - C(r) = 4k_1\pi r^2 - \frac{4}{3}k_2\pi r^3.$$

Odrediti radijus stanice za koji je neto stopa povećanja hranjivih tvari $N(r)$ najveća.