Kombinatorika i diskretna matematika

Skripta s vježbi

Sadržaj

I Kombinatorika **3**

1 Skupovi **3**

2 Osnovni principi prebrojavanja **4**

2.1 Princip sume 4

2.2 Princip produkta 5

2.3 Princip bijekcije 6

2.4 Princip komplementa 6

3 Nizovi i permutacije **8**

3.1 Nizovi 8

3.2 Permutacije 8

3.3 Kružne permutacije 10

4 Kombinacije **12**

5 Permutacije i kombinacije s ponavljanjem **15**

6 Distribucijski problemi **18**

6.1 Raspodjela različitih objekata 18

6.2 Raspodjela identičnih objekata 18

7 Formula uključivanja-isključivanja **20**

8 Rekurzivne relacije **23**

8.1 Linearne homogene rekurzivne relacije 24

8.2 Linearne nehomogene rekurzivne relacije 25

8.3 Primjene rekurzivnih relacija 27

9 Funkcije izvodnice **29**

9.1 Kombinatorne primjene funkcija izvodnica 32

9.2 Eksponencijalne funkcije izvodnice 34

II Teorija grafova **37**

10 Osnovni pojmovi teorije grafova **37**

11 Izomorfizam grafova **39**

12 Povezanost grafova i Eulerovi grafovi **42**

13 Planarni grafovi **44**

Dio I

Kombinatorika

Kombinatorika odgovara na pitanja poput: na koliko načina možemo smjestiti n predmeta u m kutija; na koliko načina možemo posjesti n bračnih parova oko okruglog stola tako da dvije osobe istog spola ne sjede jedna do druge; i slično. Ima brojne primjene u drugim područjima, osobito u računarstvu i operacijskim istraživanjima, a mnogi zadaci s učeničkih natjecanja upravo su kombinatorne prirode.

1 Skupovi

Ponovimo nekoliko osnovnih pojmova koji će nam trebati.

Definicija 1.1. *Prazan skup* $\emptyset$ je skup bez elemenata. Za konačan skup A s $|A|$ označavamo broj elemenata skupa A.

Primjer 1.2. $|\emptyset| = 0, \quad |\{2,4,6,8\}| = 4, \quad |\mathbb{Z}| = \infty.$

Skup možemo zadati

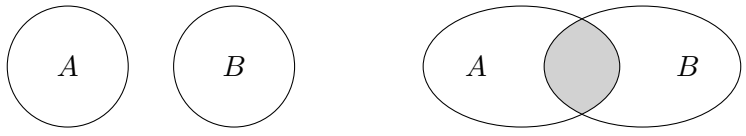
a) nabrajanjem elemenata, npr. $A = \{12, 20, 3, 8\}$;

b) opisom elemenata, npr. $A = \{\text{studenti matematike}\}$ ili $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid x \geq 0\} = \mathbb{Z}_+$.

Za svaki skup A vrijedi $\emptyset \subseteq A$ i $A \subseteq A$.

Zadatak 1. Dokažite da za konačne skupove A i B vrijedi $|A \cup B| + |A \cap B| = |A| + |B|$.

Rješenje. Razlikujemo dva slučaja: skupovi su disjunktni ($A \cap B = \emptyset$) ili se sijeku.



$A \cap B = \emptyset$ $\qquad$ $A \cap B$

1. slučaj: $A \cap B = \emptyset$, pa je $|A \cap B| = 0$. Neka je

$$A = \{a_1, \ldots, a_n\}, \quad B = \{b_1, \ldots, b_m\}, \qquad a_i \neq b_j \ \ \forall i = 1, \ldots, n, \ j = 1, \ldots, m.$$

Tada je $A \cup B = \{a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_m\}$, tj. $|A \cup B| = n + m$, pa je

$$|A \cup B| + |A \cap B| = n + m + 0 = |A| + |B|.$$

2. slučaj: $A \cap B \neq \emptyset$. Neka je

$$\begin{aligned} A &= \{a_1, \ldots, a_n, x_1, \ldots, x_k\}, & |A| &= n + k, \\ B &= \{b_1, \ldots, b_m, x_1, \ldots, x_k\}, & |B| &= m + k, \\ A \cap B &= \{x_1, \ldots, x_k\}, & |A \cap B| &= k, \\ A \cup B &= \{a_1, \ldots, a_n, x_1, \ldots, x_k, b_1, \ldots, b_m\}, & |A \cup B| &= n + k + m. \end{aligned}$$

Tada je $|A \cup B| + |A \cap B| = n + k + m + k = |A| + |B|$. $\square$

Zadatak 2. Odredite $\mathbb{Z}_+ \Delta E$ (simetričnu razliku), ako je $E = \{\dots, -4, -2, 0, 2, 4, 6, 8, \dots\}$ skup parnih cijelih brojeva.

Rješenje. Po definiciji je $\mathbb{Z}_+ \Delta E = (\mathbb{Z}_+ \setminus E) \cup (E \setminus \mathbb{Z}_+)$, gdje je $\mathbb{Z}_+ = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$. Kako je

$$\mathbb{Z}_+ \setminus E = \{1, 3, 5, 7, \dots\}, \qquad E \setminus \mathbb{Z}_+ = \{\dots, -6, -4, -2\},$$

dobivamo

$$\mathbb{Z}_+ \Delta E = \{\dots, -6, -4, -2, 1, 3, 5, 7, \dots\}.$$

□

Zadatak 3. Odredite $A \Delta A$.

Rješenje. $A \Delta A = (A \setminus A) \cup (A \setminus A) = A \setminus A = \emptyset$. □

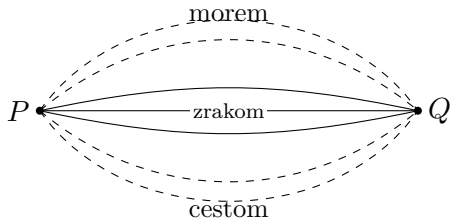
2 Osnovni principi prebrojavanja

Pri prebrojavanju se često susrećemo s pitanjima poput: *na koliko načina možemo grupu od 10 ljudi podijeliti u tri grupe od po 4, 3 i 2 osobe, pri čemu jednu osobu izostavljamo?* Postoje četiri osnovna principa koji nam pomažu pri prebrojavanju.

2.1 Princip sume

Pretpostavimo da se događaj E_i može dogoditi na n_i načina, $i = 1, \dots, k$, te da su ti načini u parovima disjunktni. Tada je broj načina da se dogodi (točno) jedan od događaja $E_1, \dots, E_k$ jednak $n_1 + n_2 + \cdots + n_k$.

Primjer 2.1. Iz grada P u grad Q možemo putovati morem na 2 načina, zrakom na 3 načina i cestom na 2 načina.



Ukupan broj načina je $n_1 + n_2 + n_3 = 2 + 3 + 2 = 7$.

Isti princip možemo zapisati jezikom teorije skupova.

Teorem 2.2 (Princip sume, PZ)**.** Neka su $A_1, \dots, A_k$ konačni, u parovima disjunktni skupovi ($A_i \cap A_j = \emptyset$ za $i \neq j$). Tada je

$$\Big|\bigcup_{i=1}^{k} A_i\Big| = \sum_{i=1}^{k} |A_i|.$$

Zadatak 4. Nađite broj uređenih parova cijelih brojeva (x, y) takvih da je $x^2 + y^2 \leq 5$.

Rješenje. Problem dijelimo na šest disjunktnih slučajeva $x^2 + y^2 = i$, $i = 0, 1, \ldots, 5$. Neka je $A_i = \{(x, y) \in \mathbb{Z}^2 \mid x^2 + y^2 = i\}$. Tada je

$$\begin{aligned}
A_0 &= \{(0,0)\}, & |A_0| &= 1,\\
A_1 &= \{(\pm 1, 0), (0, \pm 1)\}, & |A_1| &= 4,\\
A_2 &= \{(\pm 1, \pm 1)\}, & |A_2| &= 4,\\
A_3 &= \emptyset, & |A_3| &= 0,\\
A_4 &= \{(\pm 2, 0), (0, \pm 2)\}, & |A_4| &= 4,\\
A_5 &= \{(\pm 1, \pm 2), (\pm 2, \pm 1)\}, & |A_5| &= 8.
\end{aligned}$$

Po principu sume traženi broj je

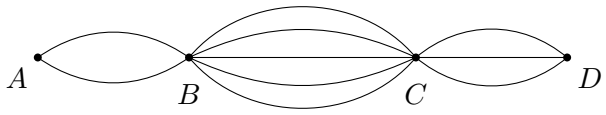
$$\Big|\bigcup_{i=0}^{5} A_i\Big| = 1 + 4 + 4 + 0 + 4 + 8 = 21.$$

□

2.2 Princip produkta

Pretpostavimo da se događaj E sastoji od r događaja $E_1, E_2, \ldots, E_r$ koji se odvijaju točno tim redom, te da se događaj E_i može dogoditi na n_i načina. Tada se događaj E može dogoditi na $n_1 \cdot n_2 \cdots n_r$ načina.

Primjer 2.3. Putujemo iz grada A u grad D i pritom moramo proći kroz gradove B i C. Od A do B možemo doći na 2 načina, od B do C na 5 načina, a od C do D na 3 načina.



Ukupan broj načina je $2 \cdot 5 \cdot 3 = 30$.

Teorem 2.4 (Princip produkta, PP)**.** Neka su $A_1, \ldots, A_r$ konačni skupovi. Tada je i njihov Kartezijev produkt

$$A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_r = \{(a_1, \ldots, a_r) \mid a_i \in A_i,\ i = 1, \ldots, r\}$$

konačan skup i vrijedi

$$|A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_r| = |A_1| \cdot |A_2| \cdots |A_r|.$$

Zadatak 5. Nađite broj pozitivnih djelitelja broja 600 (uključujući 1 i 600).

Rješenje. Kako je $600 = 2^3 \cdot 3^1 \cdot 5^2$, prirodan broj m je djelitelj broja 600 ako i samo ako je oblika $m = 2^a \cdot 3^b \cdot 5^c$, pri čemu je

$$a \in A_1 = \{0, 1, 2, 3\}, \qquad b \in A_2 = \{0, 1\}, \qquad c \in A_3 = \{0, 1, 2\}.$$

Djelitelji broja 600 su stoga u bijekciji s trojkama $(a, b, c) \in A_1 \times A_2 \times A_3$, pa ih po principu produkta ima

$$|A_1 \times A_2 \times A_3| = 4 \cdot 2 \cdot 3 = 24.$$

□

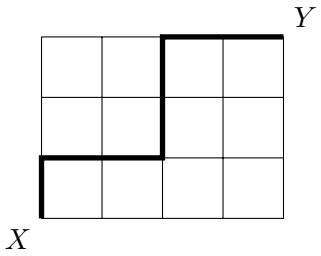
2.3 Princip bijekcije

Teorem 2.5 (Princip bijekcije, PB)**.** Neka su A i B konačni skupovi. Ako postoji bijekcija između A i B, onda je $|A| = |B|$. Vrijedi i obrat: ako je $|A| = |B|$, onda postoji bijekcija između A i B.

Princip bijekcije koristimo kada je umjesto traženih objekata lakše prebrojiti neke druge objekte koji su s njima u bijekciji.

Primjer 2.6. Ako u predavaonici ima 200 sjedala, svaki student sjedi na svom sjedalu i nijedno sjedalo nije prazno, onda u predavaonici ima 200 studenata.

Zadatak 6. Prolaznik želi prošetati od kuta X do kuta Y ulicama prikazanima na slici:



Koliko ima najkraćih puteva od X do Y?

Rješenje. Neka je A skup svih najkraćih puteva od X do Y. Svaki takav put sastoji se od 7 segmenata: 4 horizontalna i 3 vertikalna. Označimo li svaki horizontalni segment s 0, a svaki vertikalni s 1, svaki najkraći put na jedinstven način odgovara binarnom nizu duljine 7 s točno 4 nule i 3 jedinice. Npr. put na slici odgovara nizu 1001100.

Time je definirana bijekcija između A i skupa B svih binarnih nizova duljine 7 s točno 3 jedinice, pa je $|A| = |B|$. Broj $|B|$ odredit ćemo kasnije (Zadatak 21): $|B| = \binom{7}{3} = 35$. □

2.4 Princip komplementa

Teorem 2.7 (Princip komplementa, PK)**.** Neka je $A \subseteq S$ i $\bar{A} = S \setminus A$ komplement skupa A u S. Tada je

$$|A| = |S| - |\bar{A}|.$$

Princip komplementa koristimo kada je lakše prebrojati komplement nego sam skup.

Zadatak 7. Koliko ima prirodnih brojeva manjih od 10^n koji sadrže znamenku 4?

Rješenje. Neka je A skup svih prirodnih brojeva manjih od 10^n koji sadrže znamenku 4. Lakše je prebrojati komplement $\bar{A}$, tj. brojeve manje od 10^n koji ne sadrže znamenku 4. Kako je 10^n najmanji $(n+1)$-znamenkasti broj, za univerzalni skup uzimamo

$$S = \{\text{svi } k\text{-znamenkasti brojevi, } 1 \leq k \leq n\}.$$

Određivanje $|S|$. Kod k-znamenkastog broja prvu znamenku biramo na 9 načina (ne smije biti 0), a svaku od preostalih na 10 načina:

$$\underset{\uparrow}{\underline{}}\ \underset{\uparrow}{\underline{}}\ \underset{\uparrow}{\underline{}}\ \cdots\ \underset{\uparrow}{\underline{}}$$
$$9 \quad 10 \quad 10 \qquad\qquad 10$$

Po principu produkta k-znamenkastih brojeva ima $9 \cdot 10^{k-1}$, pa je

$$|S| = \sum_{k=1}^{n} 9 \cdot 10^{k-1} = 9 \cdot \frac{10^n - 1}{10 - 1} = 10^n - 1,$$

gdje smo koristili formulu za sumu geometrijskog niza $a_1 + a_1 q + \cdots + a_1 q^{n-1} = a_1 \frac{q^n - 1}{q - 1}$.

Određivanje $|\bar{A}|$. Kod k-znamenkastog broja bez znamenke 4 prvu znamenku biramo na 8 načina (ne smije biti 0 ni 4), a svaku od preostalih na 9 načina:

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \neq 0,4}}{\square} \quad \underset{\substack{\uparrow \\ \neq 4}}{\square} \quad \underset{\substack{\uparrow \\ \neq 4}}{\square} \quad \cdots \quad \underset{\substack{\uparrow \\ \neq 4}}{\square}$$

Takvih brojeva ima $8 \cdot 9^{k-1}$, pa je

$$|\bar{A}| = \sum_{k=1}^{n} 8 \cdot 9^{k-1} = 8 \cdot \frac{9^n - 1}{9 - 1} = 9^n - 1.$$

Po principu komplementa

$$|A| = |S| - |\bar{A}| = (10^n - 1) - (9^n - 1) = 10^n - 9^n.$$

□

Zadatak 8. Koliko ima četveroznamenkastih neparnih brojeva kojima su sve znamenke različite?

Rješenje. Znamenke biramo redom kojim je to najlakše:

- zadnja znamenka mora biti neparna, tj. iz $\{1, 3, 5, 7, 9\}$: 5 načina;
- prva znamenka mora biti različita od 0 i od zadnje znamenke: 8 načina;
- druga znamenka mora biti različita od prve i zadnje: 8 načina;
- treća znamenka mora biti različita od prve, druge i zadnje: 7 načina.

$$\underset{\substack{\uparrow \\ 8}}{\square} \quad \underset{\substack{\uparrow \\ 8}}{\square} \quad \underset{\substack{\uparrow \\ 7}}{\square} \quad \underset{\substack{\uparrow \\ 5}}{\square}$$

Po principu produkta traženi broj je $8 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 5 = 2240$. □

Zadaci za vježbu.

1. Koliko ima peteroznamenkastih brojeva kojima je prva znamenka paran broj?
2. Koliko ima četveroznamenkastih brojeva koji su djeljivi s 5 i kojima su sve znamenke različite?

   Rješenje: Zadnja znamenka je 0 ili 5. Ako je 0, preostale znamenke biramo na $9 \cdot 8 \cdot 7$ načina; ako je 5, na $8 \cdot 8 \cdot 7$ načina (prva znamenka ne smije biti 0). Ukupno $9 \cdot 8 \cdot 7 + 8 \cdot 8 \cdot 7 = 17 \cdot 8 \cdot 7 = 952$.
3. Nađite broj pozitivnih djelitelja broja 252.

3 Nizovi i permutacije

3.1 Nizovi

Promatramo nizove $a_1a_2\dots a_n$ duljine n u kojima svaki član može poprimiti jednu od k različitih vrijednosti, npr. $a_i \in \{0, 1, \dots, k-1\}$.

Zadatak 9. Koliko ima različitih nizova tog oblika?

Rješenje. Član a_1 biramo na k načina, zatim a_2 na k načina, ..., i a_n na k načina. Po principu produkta ukupan broj nizova je $k \cdot k \cdots k = k^n$. □

Propozicija 3.1. Broj nizova duljine n čiji članovi mogu poprimiti k različitih vrijednosti je k^n. Specijalno, broj binarnih nizova duljine n je 2^n.

Zadatak 10. Bacamo dva puta igraću kocku. Koliko ima različitih ishoda? (Bacanja razlikujemo, pa je „prvo jedinica, pa trojka“ različito od „prvo trojka, pa jedinica“.)

Rješenje. U svakom bacanju dobivamo jedan od brojeva $1, \dots, 6$, pa po principu produkta ishoda ima $6 \cdot 6 = 36$. (Drugim riječima, radi se o nizovima duljine $n = 2$ s $k = 6$ mogućih vrijednosti, kojih ima 6^2.) □

Zadatak 11. Odredite broj podskupova n-članog skupa.

Rješenje. Neka je $S = \{a_1, \dots, a_n\}$. Podskupu $T \subseteq S$ pridružimo binarni niz duljine n čiji je i-ti član jednak 1 ako je $a_i \in T$, a 0 ako $a_i \notin T$. Time je definirana bijekcija između skupa svih podskupova od S i skupa svih binarnih nizova duljine n. Po principu bijekcije podskupova ima 2^n. □

Propozicija 3.2. Broj podskupova n-članog skupa je 2^n.

3.2 Permutacije

Definicija 3.3. Neka je $A = \{a_1, \dots, a_n\}$ skup od n elemenata i $0 \le r \le n$. *r-permutacija* skupa A je uređena r-torka međusobno različitih elemenata iz A. Za $r = n$ govorimo o *permutaciji* skupa A (preuređenju njegovih elemenata). Broj r-permutacija n-članog skupa označavamo s $P(n, r)$.

Primjer 3.4. Za $A = \{a, b, c\}$ sve permutacije su *abc*, *acb*, *bac*, *bca*, *cab*, *cba*, a sve 2-permutacije su *ab*, *ac*, *ba*, *bc*, *ca*, *cb*.

Zadatak 12. Odredite formulu za $P(n, r)$.

Rješenje. Prvi element r-permutacije biramo na n načina, drugi na $n-1$ način (mora biti različit od prvog), ..., r-ti na $n - r + 1$ način:

$$\underset{n}{\uparrow} \quad \underset{n-1}{\uparrow} \quad \underset{n-2}{\uparrow} \quad \cdots \quad \underset{n-r+1}{\uparrow}$$

Po principu produkta je

$$P(n, r) = n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1) = \frac{n!}{(n-r)!}.$$

Specijalno, za $r = n$ dobivamo $P(n, n) = n!$. □

Propozicija 3.5. Za $0 \leq r \leq n$ vrijedi

$$P(n,r) = \frac{n!}{(n-r)!}, \qquad P(n,n) = n!.$$

Primjer 3.6. Za $A = \{a,b,c\}$ je $P(3,3) = 3! = 6$ i $P(3,2) = \frac{3!}{1!} = 6$, što se slaže s prethodnim primjerom.

Zadatak 13. Koliko u hrvatskom jeziku ima peteroslovnih riječi (ne nužno smislenih) kojima su na prvom i zadnjem mjestu različiti samoglasnici, a na preostala tri mjesta različiti suglasnici?

Rješenje. Hrvatska abeceda ima 5 samoglasnika $S_1 = \{a,e,i,o,u\}$ i 25 suglasnika $S_2 = \{b,c,\check{c},\ldots,\check{z}\}$. Prvo i peto mjesto popunjavamo 2-permutacijom skupa S_1, a drugo, treće i četvrto 3-permutacijom skupa S_2:

$$\underbrace{}_{\in S_1} \quad \overbrace{}^{\in S_2} \quad \underbrace{}_{\in S_1}$$

Po principu produkta traženi broj je

$$P(5,2) \cdot P(25,3) = \frac{5!}{3!} \cdot \frac{25!}{22!} = 4 \cdot 5 \cdot 23 \cdot 24 \cdot 25 = 276\,000.$$

□

Zadatak 14. Na polici se nalazi $n+m$ različitih knjiga, od kojih je m matematičkog sadržaja.

a) Na koliko načina možemo rasporediti knjige na polici tako da na prvih m mjesta budu matematičke knjige?

b) Na koliko načina možemo rasporediti knjige tako da sve matematičke knjige budu jedna do druge?

Rješenje. a) Matematičke knjige na prvih m mjesta možemo poredati na $m!$ načina, a preostalih n knjiga na preostala mjesta na $n!$ načina. Po principu produkta traženi broj je $m! \cdot n!$.

b) Sve matematičke knjige shvatimo kao jedan objekt (blok). Tada raspoređujemo $n+1$ objekata, što možemo učiniti na $(n+1)!$ načina. Unutar bloka matematičke knjige možemo poredati na $m!$ načina. Traženi broj je $(n+1)! \cdot m!$.

□

Zadatak 15. Na koliko se načina 7 muškaraca i 3 žene mogu rasporediti u red tako da muškarci zauzimaju rubne pozicije i nikoje dvije žene nisu susjedne?

Rješenje. Muškarce najprije rasporedimo u red na 7! načina. Između njih postoji 6 mjesta (označenih s $\times$) na koja možemo smjestiti žene:

$$M \times M \times M \times M \times M \times M \times M$$

Prvu ženu smještamo na jedno od 6 mjesta, drugu na jedno od preostalih 5, treću na jedno od preostalih 4. Po principu produkta traženi broj je $7! \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4$. □

Zadatak 16. Nađite broj parnih cijelih brojeva n, $20\,000 \leq n < 70\,000$, kojima su sve znamenke različite.

Rješenje. Traženi brojevi su peteroznamenkasti, oblika $\overline{abcde}$, pri čemu je $a \in \{2,3,4,5,6\}$ (zbog uvjeta na veličinu) i $e \in \{0,2,4,6,8\}$ (zbog parnosti). Kako je $\{2,3,4,5,6\} \cap \{0,2,4,6,8\} = \{2,4,6\}$, a znamenke se ne smiju ponavljati, problem dijelimo na dva disjunktna slučaja.

1. slučaj: $a \in \{2,4,6\}$. Tada a biramo na 3 načina, a e na 4 načina (jedna je parna znamenka već iskorištena za a). Znamenke b, c, d biramo kao 3-permutaciju preostalih 8 znamenki, na $P(8,3) = 6 \cdot 7 \cdot 8$ načina. Ukupno $3 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 = 4032$.

2. slučaj: $a \in \{3,5\}$. Tada a biramo na 2 načina, e na 5 načina, a b, c, d opet na $P(8,3)$ načina. Ukupno $2 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 = 3360$.

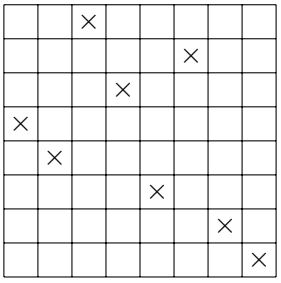
Po principu sume traženi broj je $4032 + 3360 = 7392$. □

Zadatak 17. Na koliko se načina 8 topova može razmjestiti na šahovsku ploču tako da se međusobno ne napadaju,

a) ako topove ne razlikujemo,

b) ako topove razlikujemo?

Rješenje. Topovi napadaju vodoravno i okomito, pa u svakom retku i u svakom stupcu mora biti točno jedan top. Jedan takav raspored prikazan je na slici.



a) Topove raspoređujemo redak po redak. Top u prvom retku možemo staviti u bilo koji od 8 stupaca, top u drugom retku u jedan od preostalih 7 stupaca, ..., top u osmom retku u jedini preostali stupac. Ukupno $8 \cdot 7 \cdots 1 = 8!$ rasporeda.

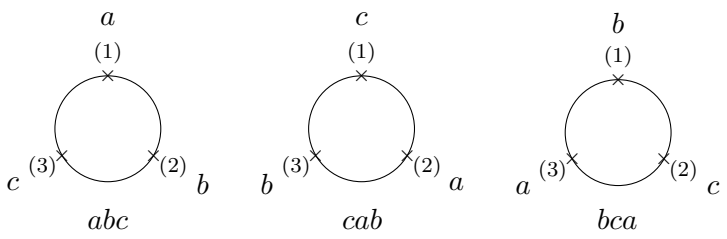
b) Svakom rasporedu iz a) odgovara $8!$ načina da se 8 različitih topova rasporedi na odabranih 8 polja, pa je ukupno $8! \cdot 8!$ rasporeda.

□

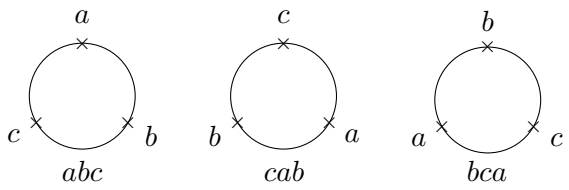
3.3 Kružne permutacije

Do sada smo objekte raspoređivali u red. Kada objekte raspoređujemo oko zatvorene krivulje (npr. osobe oko okruglog stola), govorimo o kružnim permutacijama.

Promotrimo raspored tri različita objekta a, b, c na tri mjesta oko kružnice. Ako su mjesta *numerirana* s (1), (2) i (3), rasporedi



su različiti (uz njih još i *acb*, *cba*, *bac*), pa se ne razlikuju od običnih permutacija. Ako mjesta *nisu* numerirana, bitan je samo međusobni položaj objekata:



Sada su sva tri rasporeda jednaka: svaki objekt ima iste susjede slijeva i zdesna, a jedan se raspored dobiva iz drugog rotacijom.

Definicija 3.7. Dvije kružne permutacije istih objekata smatramo jednakima ako se jedna može dobiti rotacijom druge. Neka je A skup od n različitih objekata i $0 \leq r \leq n$. *Kružna r-permutacija* skupa A je kružna permutacija nekih r objekata iz A. Broj kružnih r-permutacija n-članog skupa označavamo s $Q(n, r)$.

Primjer 3.8. Za $A = \{a, b, c, d\}$ ima $P(4, 3) = 24$ 3-permutacija. U svakom retku sljedeće tablice nalaze se 3-permutacije koje se dobivaju jedna iz druge rotacijom, tj. koje određuju istu kružnu 3-permutaciju:

abc	*cab*	*bca*
abd	*dab*	*bda*
acd	*dac*	*cda*
bcd	*dbc*	*cdb*
acb	*bac*	*cba*
adb	*bad*	*dba*
adc	*cad*	*dca*
bdc	*cbd*	*dcb*

Dakle, $Q(4, 3) = 24/3 = 8$.

Općenito, svaka kružna r-permutacija odgovara točno r „linearnih“ r-permutacija (onima koje se dobivaju rotacijom), pa vrijedi sljedeće.

Propozicija 3.9.

$$Q(n, r) = \frac{P(n, r)}{r}, \qquad \text{specijalno} \qquad Q(n, n) = \frac{n!}{n} = (n-1)!.$$

Zadatak 18. Na koliko načina možemo 5 muškaraca i 3 žene posjesti oko okruglog stola ako

a) nema ograničenja,

b) muškarac M_1 i žena $\check{\text{Z}}_1$ ne smiju sjediti jedno do drugoga,

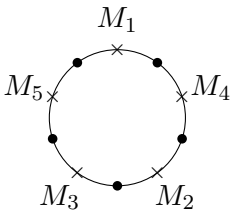
c) nikoje dvije žene ne smiju sjediti jedna do druge?

Rješenje. a) Radi se o kružnoj permutaciji 8 osoba: $Q(8, 8) = 7!$.

b) Koristimo princip komplementa. Prebrojimo rasporede u kojima M_1 i $\check{\text{Z}}_1$ sjede jedno do drugoga: shvatimo li ih kao jedan objekt, raspoređujemo 7 objekata oko stola, na $Q(7, 7) = 6!$ načina, a M_1 i $\check{\text{Z}}_1$ unutar para mogu zamijeniti mjesta na 2 načina. Takvih rasporeda je $2 \cdot 6!$, pa je traženi broj

$$7! - 2 \cdot 6! = 3600.$$

c) Najprije posjednemo muškarce, na $Q(5,5) = 4!$ načina. Između njih nastaje 5 mjesta (na slici označena točkama) na koja smještamo žene:



Prvu ženu smještamo na jedno od 5 mjesta, drugu na jedno od preostala 4, treću na jedno od preostala 3. Ukupno $4! \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 1440$.

□

Zadatak 19. Na koliko načina možemo posjesti n bračnih parova oko okruglog stola tako da svaka žena sjedi pokraj svog muža?

Rješenje. Svaki bračni par shvatimo kao jedan objekt; n objekata oko stola raspoređujemo na $Q(n,n) = (n-1)!$ načina. Unutar svakog para muž i žena mogu zamijeniti mjesta, što daje dodatni faktor 2^n. Traženi broj je $(n-1)! \cdot 2^n$. □

Zadaci za vježbu.

1. Na koliko načina možemo posjesti n bračnih parova oko okruglog stola tako da se muškarci i žene izmjenjuju?

   Rješenje: Najprije posjednemo muškarce ($(n-1)!$ načina), a zatim žene smjestimo na n mjesta između njih ($n!$ načina). Ukupno $(n-1)! \cdot n!$.

2. Na koliko se načina 7 muškaraca i 2 žene mogu rasporediti u red tako da se između žena nalaze točno 3 muškarca?

   Rješenje: Od 9 mjesta žene mogu zauzeti mjesta $(1,5), (2,6), (3,7), (4,8)$ ili $(5,9)$, tj. 5 mogućnosti. Žene na tim mjestima možemo poredati na $2!$ načina, a muškarce na preostalih 7 mjesta na $7!$ načina. Ukupno $5 \cdot 2 \cdot 7! = 10 \cdot 7!$.

4 Kombinacije

Definicija 4.1. Neka je A skup od n različitih elemenata i $0 \leq r \leq n$. *r-kombinacija* skupa A je bilo koji r-člani podskup od A. Broj r-kombinacija n-članog skupa označavamo s $C(n,r)$.

Primjer 4.2. Za $A = \{a,b,c,d\}$ sve 3-kombinacije su $\{a,b,c\}$, $\{a,b,d\}$, $\{a,c,d\}$, $\{b,c,d\}$.

Razlika između permutacija i kombinacija je u tome što je kod permutacija bitan poredak elemenata, a kod kombinacija nije. Svaku r-permutaciju skupa A možemo dobiti tako da najprije odaberemo r-kombinaciju, a zatim njezine elemente poredamo u niz, što možemo učiniti na $r!$ načina. Stoga je $P(n,r) = C(n,r) \cdot r!$, odakle slijedi:

Propozicija 4.3.

$$C(n,r) = \frac{P(n,r)}{r!} = \frac{n!}{r!\,(n-r)!} = \binom{n}{r}.$$

Broj $\binom{n}{r}$ zove se *binomni koeficijent* (čitamo „n povrh r“).

Propozicija 4.4 (Svojstva binomnih koeficijenata)**.** Za $n, k \in \mathbb{N}_0$, $k \leq n$ vrijedi:

1. $\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}$;
2. $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1, \quad \binom{n}{1} = n$;
3. $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ (simetrija);
4. $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$ za $1 \leq k \leq n-1$;
5. $\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \cdots + \binom{n}{n} = 2^n$.

Zadatak 20. U igri loto 6/45 izvlači se 6 od 45 brojeva. Kolika je vjerojatnost dobitka (pogotka svih 6 brojeva)? Kolika bi ta vjerojatnost bila u igri 7/39?

Rješenje. Mogućih ishoda izvlačenja ima

$$\binom{45}{6} = \frac{45 \cdot 44 \cdot 43 \cdot 42 \cdot 41 \cdot 40}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} = 15 \cdot 22 \cdot 43 \cdot 7 \cdot 41 \cdot 2 = 8\,145\,060,$$

a samo je jedan povoljan, pa je tražena vjerojatnost $\frac{1}{8\,145\,060} \approx 1{,}23 \cdot 10^{-7}$.

U igri 7/39 ishoda ima

$$\binom{39}{7} = \frac{39 \cdot 38 \cdot 37 \cdot 36 \cdot 35 \cdot 34 \cdot 33}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7} = 39 \cdot 19 \cdot 37 \cdot 3 \cdot 17 \cdot 11 = 15\,380\,937,$$

pa je vjerojatnost $\frac{1}{15\,380\,937} \approx 6{,}5 \cdot 10^{-8}$. □

Zadatak 21. Koliko ima binarnih nizova duljine 7 koji sadrže točno tri nule i četiri jedinice? (Usporedite sa Zadatkom 6.)

Rješenje. Niz je jednoznačno određen izborom mjesta na kojima su nule. Tri mjesta od sedam biramo na $\binom{7}{3}$ načina, a na preostala četiri mjesta su jedinice. Traženi broj je $\binom{7}{3} = 35$. □

Zadatak 22. Iz grupe od 4 profesora i 7 studenata treba izabrati peteročlani odbor. Na koliko je to načina moguće ako

a) nema ograničenja,

b) odbor mora sadržavati točno 2 profesora,

c) odbor mora sadržavati barem 3 profesora,

d) određeni profesor P i određeni student S ne smiju oboje biti u odboru?

Rješenje. a) Biramo 5 od 11 osoba: $\binom{11}{5} = 462$.

b) Biramo 2 od 4 profesora i 3 od 7 studenata: $\binom{4}{2}\binom{7}{3} = 210$.

c) Odbor ima 3 ili 4 profesora. Po principu sume

$$\binom{4}{3}\binom{7}{2} + \binom{4}{4}\binom{7}{1} = 84 + 7 = 91.$$

d) Koristimo princip komplementa. Odbora u kojima su i P i S ima $\binom{9}{3}$ (preostala 3 člana biramo od preostalih 9 osoba), pa je traženi broj

$$\binom{11}{5} - \binom{9}{3} = 462 - 84 = 378.$$

□

Zadatak 23. Na fakultetu studira 400 studenata prve, 250 druge, 200 treće i 150 četvrte godine.

a) Na koliko načina možemo izabrati dva studentska predstavnika?

b) Na koliko načina možemo izabrati dva studentska predstavnika ako oni moraju biti s različitih godina?

Rješenje. a) Ukupno ima 1000 studenata, pa je traženi broj $\binom{1000}{2} = 499\,500$.

b) Koristimo princip komplementa. Izbora u kojima su oba predstavnika s iste godine po principu sume ima $\binom{400}{2} + \binom{250}{2} + \binom{200}{2} + \binom{150}{2}$, pa je traženi broj

$$\binom{1000}{2} - \binom{400}{2} - \binom{250}{2} - \binom{200}{2} - \binom{150}{2} = 357\,500.$$

□

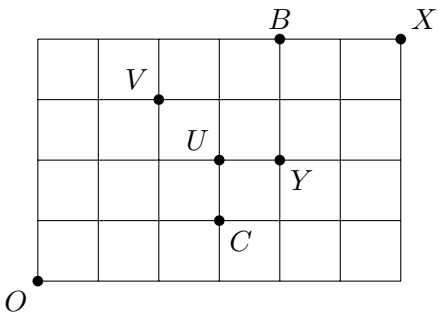
Zadatak 24. U jednoj vreći nalazi se n, a u drugoj m predmeta (svi su predmeti međusobno različiti). Iz prve vreće izvadimo r, a iz druge k predmeta, a zatim izvađene predmete poredamo u niz. Koliko različitih nizova možemo dobiti?

Rješenje. Kod izvlačenja poredak nije bitan (kombinacije), a pri slaganju u niz jest (permutacije). Iz prve vreće r predmeta biramo na $\binom{n}{r}$ načina, iz druge k predmeta na $\binom{m}{k}$ načina, a dobivenih $r + k$ predmeta poredamo na $(r + k)!$ načina. Po principu produkta traženi broj je

$$\binom{n}{r}\binom{m}{k}(r + k)!.$$

□

Zadatak 25. Ulice u jednom dijelu grada čine pravokutnu mrežu i jednosmjerne su u smjeru istoka i sjevera. Automobil se nalazi u jugozapadnom kutu mreže $O = (0, 0)$.



Na koliko načina se može doći do točke $X = (6, 4)$

a) bez dodatnih uvjeta,

b) ako se usput mora stati u $Y = (4, 2)$,

c) ako se usput mora stati ili u $U = (3, 2)$ ili u $V = (2, 3)$,

d) ako se mora proći kroz $B = (4, 4)$, a izbjeći $C = (3, 1)$?

Rješenje. a) Svaki put od O do X sastoji se od 6 koraka na istok i 4 koraka na sjever (zbog jednosmjernosti nema vraćanja). Kao u Zadatku 6, korak na istok označimo s 0, a korak na sjever s 1. Time je definirana bijekcija između puteva i binarnih nizova duljine 10 s točno 4 jedinice. Niz je određen izborom 4 od 10 mjesta za jedinice, pa je traženi broj $\binom{10}{4} = 210$.

b) Od O do Y treba napraviti 4 koraka na istok i 2 na sjever, što daje $\binom{6}{2}$ puteva, a od Y do X po 2 koraka na istok i na sjever, što daje $\binom{4}{2}$ puteva. Po principu produkta ukupno $\binom{6}{2}\binom{4}{2} = 90$.

c) Nijedan put ne može proći i kroz U i kroz V (to bi zahtijevalo kretanje na zapad ili jug), pa su slučajevi disjunktni. Puteva kroz U ima $\binom{5}{2}\binom{5}{2} = 100$, a kroz V ima $\binom{5}{2}\binom{5}{1} = 50$. Ukupno $100 + 50 = 150$.

d) Puteva od O do X kroz B ima $\binom{8}{4} \cdot 1 = 70$. Od njih oduzmemo one koji prolaze i kroz C: od O do C ima $\binom{4}{1}$ puteva, od C do B ima $\binom{4}{1}$, a od B do X jedan put, dakle ukupno 16. Po principu komplementa traženi broj je $70 - 16 = 54$.

□

Napomena 4.5. Putevi poput onih iz Zadataka 6 i 25 nazivaju se *cjelobrojne šetnje*.

Zadaci za vježbu.

1. Koliko ima najkraćih puteva u cjelobrojnoj mreži od ishodišta do točke $(m, n) \in \mathbb{N}^2$?
   Rješenje: $\binom{m+n}{n}$.
2. Na koliko načina možemo podijeliti 30 vrtlara u tri skupine od po 10, od kojih će prva saditi cvijeće, druga kositi travu, a treća orezivati grane?
   Rješenje: $\binom{30}{10}\binom{20}{10}\binom{10}{10}$.

5 Permutacije i kombinacije s ponavljanjem

Do sada smo promatrali izbore u kojima se elementi ne ponavljaju. Sada dopuštamo ponavljanje.

Primjer 5.1. Za $A = \{a, b, c\}$ sve 2-permutacije s ponavljanjem su aa, ab, ac, ba, bb, bc, ca, cb, cc.

Zadatak 26. Nađite broj r-permutacija s ponavljanjem skupa $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$.

Rješenje. Budući da su ponavljanja dopuštena, svako od r mjesta možemo popuniti bilo kojim od n elemenata. Po principu produkta traženi broj je n^r. □

Propozicija 5.2. Broj r-permutacija s ponavljanjem n-članog skupa je n^r.

Zadatak 27. Kuća ima 4 kata. Kuću bojamo izvana tako da je svaki kat obojen jednom bojom, a na raspolaganju imamo 6 boja. Na koliko načina možemo obojiti kuću?

Rješenje. Katovi ne moraju biti različitih boja (cijela kuća može biti iste boje), pa se radi o 4-permutacijama s ponavljanjem skupa od 6 boja. Traženi broj je $6^4 = 1296$. □

Što ako je točno određeno koliko se puta pojedini element ponavlja?

Zadatak 28. Nađite broj permutacija slova a, a, a, b, c.

Rješenje. Kada bismo slova a razlikovali (npr. kao a_1, a_2, a_3), permutacija bi bilo 5!. Međutim, permutacije koje se razlikuju samo po poretku slova a_1, a_2, a_3, npr.

$$a_1ba_2a_3c, \quad a_1ba_3a_2c, \quad a_2ba_1a_3c, \quad a_2ba_3a_1c, \quad a_3ba_1a_2c, \quad a_3ba_2a_1c,$$

predstavljaju istu riječ *abaac*. Svaka tražena permutacija stoga je brojena 3! puta, pa je traženi broj $\frac{5!}{3!} = 20$. □

Na isti način dobivamo općenitu formulu, koju je najprirodnije izreći jezikom multiskupova.

Definicija 5.3. *Multiskup* je „skup“ u kojem se elementi mogu ponavljati, npr.

$$M = \{a, b, a, c, b, a\} = \{3 \cdot a,\ 2 \cdot b,\ 1 \cdot c\}.$$

Općenito pišemo $M = \{r_1 \cdot a_1,\ \ldots,\ r_n \cdot a_n\}$, gdje je r_i broj ponavljanja elementa a_i. Ako se element a_i može ponavljati neograničeno mnogo puta, pišemo $r_i = \infty$.

Propozicija 5.4. (a) Broj r-permutacija multiskupa $\{\infty \cdot a_1,\ \ldots,\ \infty \cdot a_n\}$ je n^r.

(b) Neka je $M = \{r_1 \cdot a_1,\ \ldots,\ r_n \cdot a_n\}$ i $r = r_1 + \cdots + r_n$. Broj permutacija multiskupa M je

$$P(r; r_1, \ldots, r_n) = \frac{r!}{r_1!\, r_2! \cdots r_n!}.$$

Zadatak 29. Nađite broj ternarnih nizova duljine 10 koji sadrže dvije nule, tri jedinice i pet dvojki.

Rješenje. Radi se o permutacijama multiskupa $\{2 \cdot 0,\ 3 \cdot 1,\ 5 \cdot 2\}$, kojih ima

$$P(10; 2, 3, 5) = \frac{10!}{2!\, 3!\, 5!} = 2520.$$

□

Zadatak 30. Koliko ima anagrama riječi COMBINATORICS? (Anagram ne mora biti smislena riječ.)

Rješenje. Neki od anagrama su TOMB IN CORSICA i TO COSMIC BRAIN. Riječ COMBINATORICS odgovara multiskupu

$$\{2 \cdot C,\ 2 \cdot O,\ 2 \cdot I,\ 1 \cdot M,\ 1 \cdot B,\ 1 \cdot N,\ 1 \cdot A,\ 1 \cdot T,\ 1 \cdot R,\ 1 \cdot S\}$$

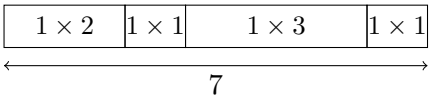
s ukupno 13 elemenata, pa anagrama ima

$$\frac{13!}{2!\, 2!\, 2!} = \frac{13!}{8}.$$

□

Zadatak 31. Na koliko načina možemo popločiti pravokutnik 1×7 pločicama dimenzija 1×1, 1×2 i 1×3? (Pločice iste veličine ne razlikujemo.)

Rješenje. Jedno popločenje prikazano je na slici:



Označimo pločice 1×1, 1×2 i 1×3 redom s b_1, b_2, b_3. Gornje popločenje tada odgovara nizu $b_2\, b_1\, b_3\, b_1$, tj. jednoj permutaciji multiskupa $\{2 \cdot b_1,\ 1 \cdot b_2,\ 1 \cdot b_3\}$.

Svaki rastav broja 7 na pribrojnike 1, 2 i 3 određuje multiskup pločica, a broj popločenja s tim pločicama jednak je broju permutacija tog multiskupa:

rastav	multiskup	broj permutacija
$7 = 7 \cdot 1$	$\{7 \cdot b_1\}$	$\frac{7!}{7!} = 1$
$7 = 3 \cdot 2 + 1 \cdot 1$	$\{1 \cdot b_1,\ 3 \cdot b_2\}$	$\frac{4!}{1!\,3!} = 4$
$7 = 2 \cdot 2 + 3 \cdot 1$	$\{3 \cdot b_1,\ 2 \cdot b_2\}$	$\frac{5!}{3!\,2!} = 10$
$7 = 2 \cdot 2 + 1 \cdot 3$	$\{2 \cdot b_2,\ 1 \cdot b_3\}$	$\frac{3!}{2!\,1!} = 3$
$7 = 1 \cdot 2 + 5 \cdot 1$	$\{5 \cdot b_1,\ 1 \cdot b_2\}$	$\frac{6!}{5!\,1!} = 6$
$7 = 1 \cdot 3 + 1 \cdot 2 + 2 \cdot 1$	$\{2 \cdot b_1,\ 1 \cdot b_2,\ 1 \cdot b_3\}$	$\frac{4!}{2!\,1!\,1!} = 12$
$7 = 2 \cdot 3 + 1 \cdot 1$	$\{1 \cdot b_1,\ 2 \cdot b_3\}$	$\frac{3!}{1!\,2!} = 3$
$7 = 1 \cdot 3 + 4 \cdot 1$	$\{4 \cdot b_1,\ 1 \cdot b_3\}$	$\frac{5!}{4!\,1!} = 5$

Slučajevi su disjunktni, pa po principu sume popločenja ima $1+4+10+3+6+12+3+5 = 44$. □

Promotrimo sada *kombinacije s ponavljanjem.*

Primjer 5.5. Za $A = \{1, 2, 3, 4\}$ postoje $\binom{4}{3} = 4$ tročlana podskupa. Ako dopustimo ponavljanje elemenata, „tročlanih izbora“ ima 20: $\{1, 1, 1\}$, $\{1, 1, 2\}$, $\{1, 2, 2\}$, $\ldots$, $\{4, 4, 4\}$.

Definicija 5.6. Neka je $M = \{\infty \cdot a_1,\ \ldots,\ \infty \cdot a_n\}$. Multiskup oblika $\{m_1 \cdot a_1,\ \ldots,\ m_n \cdot a_n\}$, gdje su $m_i \in \mathbb{N}_0$, zovemo $(m_1 + \cdots + m_n)$-članim *multipodskupom* od M. Broj r-članih multipodskupova od M (tj. broj r-kombinacija s ponavljanjem n-članog skupa) označavamo s $H(n, r)$.

Teorem 5.7. $H(n, r) = \binom{n + r - 1}{r}$.

Primjer 5.8. U prethodnom primjeru je $n = 4$, $r = 3$, pa je $H(4, 3) = \binom{6}{3} = 20$.

Zadatak 32. Sendvič bar nudi sendviče s piletinom, šunkom i tunom. Student želi kupiti 6 sendviča. Koliko različitih izbora ima ako nema ograničenja na broj sendviča pojedine vrste?

Rješenje. Tražimo 6-člane multipodskupove multiskupa $\{\infty \cdot p,\ \infty \cdot š,\ \infty \cdot t\}$. Njih ima

$$H(3, 6) = \binom{3 + 6 - 1}{6} = \binom{8}{6} = 28.$$

□

Zadaci za vježbu.

1. Koliko se peteroznamenkastih brojeva može sastaviti od znamenki broja 62774277 (svaku znamenku smijemo upotrijebiti najviše onoliko puta koliko se pojavljuje u tom broju)?

   Rješenje: Na raspolaganju su četiri sedmice, dvije dvojke, jedna šestica i jedna četvorka. Razlikujemo slučajeve prema broju upotrijebljenih sedmica i u svakom brojimo permutacije odgovarajućeg multiskupa (kao u Zadatku 31):

$$3 \cdot \frac{5!}{4!} + \frac{5!}{3!\,2!} + 3 \cdot \frac{5!}{3!} + 2 \cdot \frac{5!}{2!\,2!} + \frac{5!}{2!} + \frac{5!}{2!} = 15 + 10 + 60 + 60 + 60 + 60 = 265.$$

6 Distribucijski problemi

Distribucijski problemi (problemi raspodjele) su pitanja poput: na koliko načina možemo podijeliti k kuglica u n kutija, k kuna na n djece, k poklona na n članova obitelji i slično. Promatramo raspodjelu k objekata u n *različitih* kutija, pri čemu razlikujemo slučaj kada su objekti međusobno različiti i slučaj kada su identični.

6.1 Raspodjela različitih objekata

Propozicija 6.1. Broj načina da se k različitih objekata rasporedi u n različitih kutija jednak je

1. $P(n,k) = n(n-1)\cdots(n-k+1)$, ako svaka kutija smije sadržavati najviše jedan objekt;
2. n^k, ako kutije smiju sadržavati proizvoljno mnogo objekata;
3. $n(n+1)(n+2)\cdots(n+k-1)$, ako kutije smiju sadržavati proizvoljno mnogo objekata i pritom je bitan i poredak objekata unutar kutije.

Dokaz. 1. Prvi objekt stavljamo u jednu od n kutija, drugi u jednu od preostalih $n-1$ kutija, itd.

2. Svaki od k objekata stavljamo u bilo koju od n kutija.

3. Objekte raspoređujemo jedan po jedan. Prvi objekt možemo staviti u bilo koju od n kutija. Pretpostavimo da je raspoređeno već i objekata. Kutija u kojoj je j objekata nudi $j+1$ mogućih položaja za novi objekt (ispred prvog, između dva susjedna ili iza posljednjeg), a prazna kutija jedan položaj. Ukupno je stoga $\sum(j+1) = i+n$ mogućih položaja za $(i+1)$-vi objekt. Npr. drugi objekt možemo smjestiti na $n+1$ način: u neku od $n-1$ praznih kutija ili lijevo odnosno desno od prvog objekta. Po principu produkta ukupan broj rasporeda je $n(n+1)\cdots(n+k-1)$. □

6.2 Raspodjela identičnih objekata

Propozicija 6.2. Broj načina da se k identičnih objekata rasporedi u n različitih kutija jednak je

1. $\binom{n}{k}$, ako svaka kutija smije sadržavati najviše jedan objekt;
2. $\binom{n+k-1}{k}$, ako kutije smiju sadržavati proizvoljno mnogo objekata;
3. $\binom{k-1}{n-1}$, ako svaka kutija mora sadržavati barem jedan objekt ($k \geq n$).

Dokaz. 1. Kako su objekti identični, raspored je određen time koje su kutije pune, pa biramo k od n kutija.

2. Neka su kutije $K_1, \ldots, K_n$. Raspored u kojem je r_i objekata u kutiji K_i ($r_1 + \cdots + r_n = k$) odgovara k-članom multipodskupu $\{r_1 \cdot K_1, \ \ldots, \ r_n \cdot K_n\}$ multiskupa $\{\infty \cdot K_1, \ \ldots, \ \infty \cdot K_n\}$. Po Teoremu 5.7 takvih ima $H(n,k) = \binom{n+k-1}{k}$.

3. U svaku kutiju najprije stavimo po jedan objekt; to možemo učiniti na samo jedan način jer su objekti identični. Preostalih $k-n$ objekata raspoređujemo bez ograničenja, kao u 2., na

$$\binom{n+(k-n)-1}{k-n} = \binom{k-1}{k-n} = \binom{k-1}{n-1}$$

načina, pri čemu smo iskoristili simetriju binomnih koeficijenata. □

Zadatak 33. Na koliko načina možemo podijeliti k kuna na n djece tako da svako dijete dobije barem jednu kunu?

Rješenje. Kune su međusobno jednake, pa raspoređujemo k identičnih objekata u n različitih kutija tako da nijedna kutija ne ostane prazna. Po Propoziciji 6.2 traženi broj je $\binom{k-1}{n-1}$. □

Zadatak 34. (a) Koliko ima prirodnih rješenja (x_1, x_2, x_3, x_4) jednadžbe

$$x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_4 = 3^{33}?$$

(b) Koliko ima cjelobrojnih rješenja (x_1, x_2, x_3, x_4) jednadžbe

$$x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_4 = 3^{33}?$$

Rješenje. (a) Primijetimo da je svaki broj x_i potencija broja 3, pa uvodimo supstituciju $x_i = 3^{y_i}$ za $y_i \in \mathbb{N}_0$. Tada je jednadžba ekvivalentna s

$$y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = 33,$$

što po principu kuglica i štapića ima $\binom{36}{3}$ rješenja.

(b) Svako cjelobrojno rješenje jednadžbe dobije se iz prirodnog rješenja u kojem se eventualno promijene predznaci parno mnogo brojeva. Postoji 8 načina za izabrati parno mnogo brojeva iz skupa od 4 broja. Slijedi da je odgovor $8 \cdot \binom{36}{3}$.

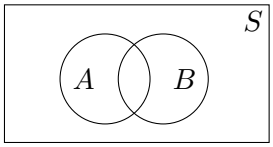
□

Zadaci za vježbu.

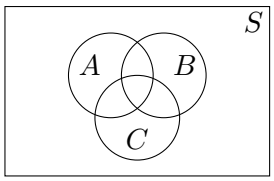
1. Riješite Zadatak 33 uz pretpostavku da neka djeca smiju dobiti 0 kuna.
   Rješenje: $\binom{n+k-1}{k}$.
2. Koliko rješenja u $\mathbb{N}_0$ ima jednadžba $x_1 + x_2 + x_3 = 2$?
   Rješenje: $\binom{4}{2} = 6$.

7 Formula uključivanja-isključivanja

Princip sume kaže da je $|A \cup B| = |A| + |B|$ za disjunktne skupove A i B. Pri prebrojavanju smo dosad problem rastavljali na disjunktne slučajeve, no to nije uvijek lako. Često je mnogo jednostavnije rastaviti problem na skupove koji nisu nužno disjunktni. Za dva i tri skupa vrijedi:



$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|,$$



$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|.$$

Ako su A, B, C podskupovi univerzalnog skupa S, onda iz de Morganovih formula $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$, $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$ i principa komplementa slijedi

$$|\bar{A} \cap \bar{B}| = |S| - |A \cup B| = |S| - |A| - |B| + |A \cap B|,$$
$$|\bar{A} \cap \bar{B} \cap \bar{C}| = |S| - |A| - |B| - |C| + |A \cap B| + |A \cap C| + |B \cap C| - |A \cap B \cap C|.$$

Općenito vrijedi sljedeći teorem.

Teorem 7.1 (Formula uključivanja-isključivanja, FUI)**.** Neka su $A_1, \ldots, A_n$ konačni podskupovi skupa S. Tada je

$$|A_1 \cup \cdots \cup A_n| = \sum_i |A_i| - \sum_{i<j} |A_i \cap A_j| + \sum_{i<j<k} |A_i \cap A_j \cap A_k| - \cdots + (-1)^{n+1} |A_1 \cap \cdots \cap A_n|,$$

odnosno, ekvivalentno,

$$|\bar{A}_1 \cap \cdots \cap \bar{A}_n| = |S| - \sum_i |A_i| + \sum_{i<j} |A_i \cap A_j| - \sum_{i<j<k} |A_i \cap A_j \cap A_k| + \cdots + (-1)^n |A_1 \cap \cdots \cap A_n|.$$

Zadatak 35. Koliko ima prirodnih brojeva manjih ili jednakih 10^6 koji nisu djeljivi ni s 2, ni s 3, ni s 5?

Rješenje. Neka je $S = \{1, 2, \ldots, 10^6\}$ i za $d \in \mathbb{N}$ neka je $A_d = \{x \in S \mid d \text{ dijeli } x\}$. Elementi skupa A_d su $d, 2d, \ldots, kd$, gdje je k najveći prirodan broj takav da je $kd \leq 10^6$, pa je

$$|A_d| = \left\lfloor \frac{10^6}{d} \right\rfloor.$$

Broj je djeljiv s dva relativno prosta broja d i e ako i samo ako je djeljiv s de, pa je $A_d \cap A_e = A_{de}$. Kako su 2, 3 i 5 u parovima relativno prosti, vrijedi $A_2 \cap A_3 = A_6$, $A_2 \cap A_5 = A_{10}$, $A_3 \cap A_5 = A_{15}$ i $A_2 \cap A_3 \cap A_5 = A_{30}$. Po FUI je

$$\begin{aligned} |\bar{A}_2 \cap \bar{A}_3 \cap \bar{A}_5| &= |S| - |A_2| - |A_3| - |A_5| + |A_6| + |A_{10}| + |A_{15}| - |A_{30}| \\ &= 10^6 - 500\,000 - 333\,333 - 200\,000 + 166\,666 + 100\,000 + 66\,666 - 33\,333 \\ &= 266\,666. \end{aligned}$$

□

Zadatak 36. Koliko prirodnih brojeva dijeli barem jedan od brojeva 10^{60}, 20^{50} i 30^{40}?

Rješenje. Neka su A, B, C skupovi prirodnih djelitelja redom brojeva 10^{60}, 20^{50} i 30^{40}. Tražimo $|A \cup B \cup C|$.

Ako je $n = p_1^{\alpha_1} \cdots p_s^{\alpha_s}$ rastav na proste faktore, onda su djelitelji od n točno brojevi oblika $p_1^{\beta_1} \cdots p_s^{\beta_s}$ s $0 \le \beta_i \le \alpha_i$, pa ih po principu produkta ima $(\alpha_1 + 1) \cdots (\alpha_s + 1)$ (usp. Zadatak 5). Kako je

$$10^{60} = 2^{60} \cdot 5^{60}, \qquad 20^{50} = 2^{100} \cdot 5^{50}, \qquad 30^{40} = 2^{40} \cdot 3^{40} \cdot 5^{40},$$

imamo $|A| = 61^2$, $|B| = 101 \cdot 51$, $|C| = 41^3$. Zajednički djelitelji dvaju brojeva su djelitelji njihove najveće zajedničke mjere, pa je

$$\begin{aligned}
A \cap B &: \text{ djelitelji od } 2^{60} \cdot 5^{50}, & |A \cap B| &= 61 \cdot 51,\\
A \cap C &: \text{ djelitelji od } 2^{40} \cdot 5^{40}, & |A \cap C| &= 41^2,\\
B \cap C &: \text{ djelitelji od } 2^{40} \cdot 5^{40}, & |B \cap C| &= 41^2,\\
A \cap B \cap C &: \text{ djelitelji od } 2^{40} \cdot 5^{40}, & |A \cap B \cap C| &= 41^2.
\end{aligned}$$

Po FUI je

$$|A \cup B \cup C| = 61^2 + 101 \cdot 51 + 41^3 - 61 \cdot 51 - 41^2 - 41^2 + 41^2 = 73\,001.$$

□

Napomena 7.2. Pri brojanju djelitelja broja $p_1^{\alpha_1} \cdots p_s^{\alpha_s}$ broj 1 se ne broji više puta: on odgovara jedinstvenom izboru $\beta_1 = \cdots = \beta_s = 0$. Npr. za $18 = 2^1 \cdot 3^2$ djelitelji su

$$2^0 3^0 = 1, \quad 2^0 3^1 = 3, \quad 2^0 3^2 = 9, \quad 2^1 3^0 = 2, \quad 2^1 3^1 = 6, \quad 2^1 3^2 = 18,$$

dakle njih $(1 + 1)(2 + 1) = 6$.

Zadatak 37. Pustinjom putuje karavana od 9 deva. Nakon odmora u oazi treba promijeniti redoslijed deva tako da nijedna deva ne hoda neposredno iza one deve iza koje je hodala prije oaze. Na koliko je načina to moguće?

Rješenje. Označimo deve brojevima $1, 2, \ldots, 9$ prema redoslijedu prije oaze. Neka je S skup svih rasporeda deva, $|S| = 9!$, i za $i = 1, \ldots, 8$ neka je A_i skup rasporeda u kojima deva $i + 1$ hoda neposredno iza deve i. Tražimo $|\bar{A}_1 \cap \cdots \cap \bar{A}_8|$.

Ako je zadano p parova $(i, i + 1)$ koji moraju ostati zajedno, svaki takav par „slijepimo“ u blok (parovi se mogu nadovezivati, npr. $4, 5, 6$ je jedan blok koji sadrži dva para). Tada raspoređujemo $9 - p$ objekata, što možemo učiniti na $(9 - p)!$ načina; npr. za $p = 2$:

$$1, 2, 3, \boxed{4, 5, 6}, 7, 8, 9 \qquad \text{ili} \qquad 1, 2, \boxed{3, 4}, 5, 6, \boxed{7, 8}, 9.$$

Parove biramo na $\binom{8}{p}$ načina, pa po FUI

$$\begin{aligned}
|\bar{A}_1 \cap \cdots \cap \bar{A}_8| &= \sum_{p=0}^{8} (-1)^p \binom{8}{p} (9 - p)!\\
&= 9! - \binom{8}{1} 8! + \binom{8}{2} 7! - \binom{8}{3} 6! + \binom{8}{4} 5! - \binom{8}{5} 4! + \binom{8}{6} 3! - \binom{8}{7} 2! + \binom{8}{8} 1!\\
&= 148\,329.
\end{aligned}$$

□

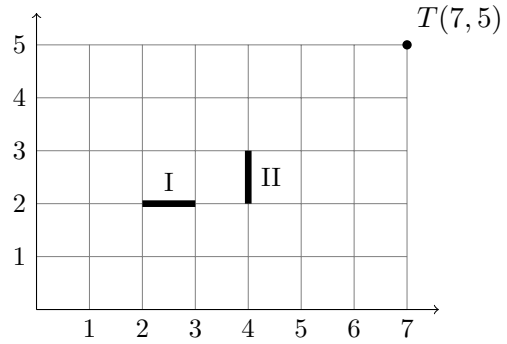
Zadatak 38. Odredite broj *deranžmana* n-članog skupa, tj. permutacija bez fiksnih točaka (svi elementi promijene mjesto).

Rješenje. Permutacija je bijekcija π skupa $\{1,\dots,n\}$; tražimo one za koje je $\pi(i)\neq i$ za sve i. Neka je S skup svih permutacija, $|S|=n!$, i $A_i=\{\pi \mid \pi(i)=i\}$. Ako je zadano p fiksnih točaka, preostalih $n-p$ elemenata permutiramo proizvoljno, na $(n-p)!$ načina, a p fiksnih točaka biramo na $\binom{n}{p}$ načina. Po FUI broj deranžmana je

$$D_n=|\bar{A}_1\cap\cdots\cap\bar{A}_n|=\sum_{p=0}^{n}(-1)^p\binom{n}{p}(n-p)!=n!-\binom{n}{1}(n-1)!+\binom{n}{2}(n-2)!-\cdots+(-1)^n\binom{n}{n}0!.$$

□

Zadatak 39. Koliko ima najkraćih puteva u cjelobrojnoj mreži od ishodišta do točke $(7,5)$ koji ne prolaze ni segmentom $[(2,2),(3,2)]$ ni segmentom $[(4,2),(4,3)]$?



Rješenje. Svaki najkraći put od $(0,0)$ do $(7,5)$ ima 7 koraka udesno i 5 koraka gore, pa je za skup S svih takvih puteva $|S|=\binom{12}{5}=792$. Neka je A_1 skup puteva koji prolaze segmentom I, a A_2 skup puteva koji prolaze segmentom II. Put kroz segment I ide od $(0,0)$ do $(2,2)$, zatim tim segmentom, pa od $(3,2)$ do $(7,5)$; analogno za segment II. Zato je

$$|A_1|=\binom{4}{2}\binom{7}{3}=210,\qquad |A_2|=\binom{6}{2}\binom{5}{2}=150,$$
$$|A_1\cap A_2|=\binom{4}{2}\cdot 1\cdot\binom{5}{2}=60$$

(put kroz oba segmenta ide od $(0,0)$ do $(2,2)$, zatim jedinstvenim putem od $(2,2)$ preko $(3,2)$ i $(4,2)$ do $(4,3)$, pa od $(4,3)$ do $(7,5)$). Po FUI

$$|\bar{A}_1\cap\bar{A}_2|=792-210-150+60=492.$$

□

Zadatak 40. Koliko ima cjelobrojnih rješenja jednadžbe $x_1+x_2+x_3=15$ uz uvjete $0\le x_1\le 5$, $0\le x_2\le 6$, $0\le x_3\le 7$?

Rješenje. Neka je S skup svih rješenja u $\mathbb{N}_0$. Po Zadatku 34 je $|S|=\binom{3+15-1}{15}=\binom{17}{2}=136$. Neka je A_i skup rješenja iz S koja ne zadovoljavaju i-ti uvjet; npr. $A_1=\{(x_1,x_2,x_3)\in S \mid x_1\ge 6\}$ (pri čemu ostali uvjeti mogu, ali ne moraju biti zadovoljeni).

Supstitucijom $y_1 = x_1 - 6 \geq 0$ jednadžba prelazi u $y_1 + x_2 + x_3 = 9$, pa je $|A_1| = \binom{11}{2} = 55$. Analogno, supstitucijom $y_2 = x_2 - 7$ dobivamo $x_1 + y_2 + x_3 = 8$, pa je $|A_2| = \binom{10}{2} = 45$, a supstitucijom $y_3 = x_3 - 8$ dobivamo $x_1 + x_2 + y_3 = 7$, pa je $|A_3| = \binom{9}{2} = 36$.

Za presjeke radimo dvije supstitucije istovremeno:

$$\begin{aligned} A_1 \cap A_2 &: y_1 + y_2 + x_3 = 2, & |A_1 \cap A_2| &= \tbinom{4}{2} = 6, \\ A_1 \cap A_3 &: y_1 + x_2 + y_3 = 1, & |A_1 \cap A_3| &= \tbinom{3}{2} = 3, \\ A_2 \cap A_3 &: x_1 + y_2 + y_3 = 0, & |A_2 \cap A_3| &= \tbinom{2}{2} = 1. \end{aligned}$$

Konačno, $A_1 \cap A_2 \cap A_3 = \emptyset$, jer bi tada bilo $x_1 + x_2 + x_3 \geq 6 + 7 + 8 = 21 > 15$. Po FUI je traženi broj

$$|\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap \bar{A}_3| = 136 - 55 - 45 - 36 + 6 + 3 + 1 - 0 = 10.$$

□

Zadaci za vježbu.

1. Na koliko se načina brojevi $-n, \ldots, -1, 1, \ldots, n$ mogu rasporediti u vrhove pravilnog $2n$-terokuta tako da k i $-k$ ni za jedan $k \in \{1, \ldots, n\}$ ne budu u susjednim vrhovima?

   Rješenje: Neka je A_k skup rasporeda u kojima su k i $-k$ susjedni. Ako je zadano p takvih parova, svaki par slijepimo u blok, pa raspoređujemo $2n - p$ objekata oko mnogokuta. Fiksiramo li jedan objekt, njegov početni vrh biramo na $2n$ načina, preostale objekte redamo u smjeru kazaljke na $(2n - p - 1)!$ načina, a elemente unutar blokova na 2^p načina. Po FUI traženi broj je

   $$2n \sum_{p=0}^{n} (-1)^p \binom{n}{p} 2^p \, (2n - p - 1)!.$$

   (Npr. za $n = 3$ dobivamo 192.)

8 Rekurzivne relacije

Često treba prebrojati familije objekata koje ovise o nekom parametru n (broju koraka, broju objekata, ...). Npr. neka je p_n broj permutacija n objekata. Podatak za n objekata često se može izraziti pomoću podataka za $n - 1$ ili manje objekata; za permutacije vrijedi

$$p_n = n \cdot p_{n-1}.$$

Ovo je primjer *rekurzivne relacije*. Da bi relacija jednoznačno određivala niz, potrebni su i *početni uvjeti*, ovdje $p_1 = 1$. Uzastopnim uvrštavanjem dobivamo

$$p_n = n \, p_{n-1} = n(n-1) \, p_{n-2} = \cdots = n(n-1) \cdots 2 \cdot p_1 = n!.$$

Najpoznatija rekurzivna relacija je ona koja određuje Fibonaccijeve brojeve:

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}, \qquad F_1 = F_2 = 1.$$

Drugi primjeri rekurzivnih relacija su

$$a_n + 7a_{n-1} + 12a_{n-2} = 2^n, \qquad a_n = \frac{a_{n-1}}{(2n-1) \, a_{n-1} + 1}$$

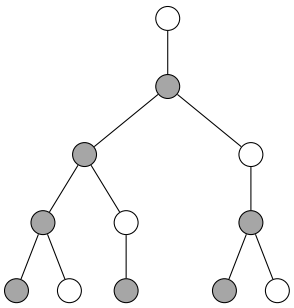
(uz odgovarajuće početne uvjete). Rad s rekurzivnim relacijama sastoji se od dva koraka:

a) postaviti rekurzivnu relaciju koja opisuje zadani problem;

b) riješiti tu relaciju, tj. naći eksplicitnu formulu za a_n (što općenito nije jednostavno kao u primjeru s permutacijama).

Zadatak 41. Promatramo razmnožavanje bakterija diobom. Nezrela bakterija ($\circ$) nakon jednog ciklusa postaje zrela ($\bullet$), a zrela bakterija se u svakom ciklusu dijeli na jednu zrelu i jednu nezrelu. Bakterije ne umiru, a na početku imamo jednu nezrelu bakteriju. Koliko ima bakterija nakon n ciklusa?

Rješenje. Neka je f_n broj bakterija u n-tom ciklusu.



$f_1 = 1$
$f_2 = 1$
$f_3 = 2$
$f_4 = 3$
$f_5 = 5$

Označimo s z_n i m_n broj zrelih, odnosno nezrelih bakterija u n-tom ciklusu, tako da je $f_n = z_n + m_n$. Svaka nezrela bakterija u n-tom ciklusu nastala je diobom zrele bakterije iz prethodnog ciklusa, a svaka zrela bakterija u n-tom ciklusu je ili bila zrela ili je sazrela iz nezrele u prethodnom ciklusu. Stoga je

$$m_n = z_{n-1}, \qquad z_n = z_{n-1} + m_{n-1} = f_{n-1}.$$

Slijedi

$$f_n = z_n + m_n = f_{n-1} + z_{n-1} = f_{n-1} + f_{n-2},$$

uz početne uvjete $f_1 = f_2 = 1$. Dakle, f_n je n-ti Fibonaccijev broj. □

8.1 Linearne homogene rekurzivne relacije

Rekurziju za permutacije riješili smo uzastopnim uvrštavanjem. Za složenije relacije potreban nam je općenit postupak.

Definicija 8.1. *Linearna homogena rekurzivna relacija s konstantnim koeficijentima* je relacija oblika

$$c_0 a_n + c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \cdots + c_r a_{n-r} = 0, \tag{1}$$

gdje su c_i konstante, $c_0 \neq 0$, $c_r \neq 0$ i $1 \leq r \leq n$. *Karakteristična jednadžba* relacije (1) je

$$c_0 x^r + c_1 x^{r-1} + \cdots + c_{r-1} x + c_r = 0,$$

a njezina rješenja zovemo *karakteristični korijeni*. (Karakterističnu jednadžbu dobivamo supstitucijom $a_i = x^i$ i dijeljenjem s x^{n-r}.)

Teorem 8.2. (a) Ako su $x_1, \ldots, x_r$ međusobno različiti karakteristični korijeni relacije (1), onda je njezino opće rješenje

$$a_n = A_1 x_1^n + A_2 x_2^n + \cdots + A_r x_r^n,$$

gdje su $A_1, \ldots, A_r$ konstante.

(b) Ako su $x_1, \ldots, x_k$ međusobno različiti karakteristični korijeni, pri čemu je x_i kratnosti m_i, onda je opće rješenje

$$a_n = \sum_{i=1}^{k} (A_{i1} + A_{i2}\, n + A_{i3}\, n^2 + \cdots + A_{im_i} n^{m_i - 1}) x_i^n,$$

gdje su A_{ij} konstante.

Konstante A_i, odnosno A_{ij}, određujemo iz početnih uvjeta $a_1 = \beta_1, \ldots, a_r = \beta_r$.

Zadatak 42. Riješite rekurzivnu relaciju $a_n = 2a_{n-1} + a_{n-2} - 2a_{n-3}$ uz početne uvjete $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $a_3 = 3$.

Rješenje. Relaciju zapišemo kao $a_n - 2a_{n-1} - a_{n-2} + 2a_{n-3} = 0$. Karakteristična jednadžba je

$$x^3 - 2x^2 - x + 2 = 0 \iff x^2(x-2) - (x-2) = 0 \iff (x^2-1)(x-2) = 0,$$

pa su karakteristični korijeni $x_1 = 1$, $x_2 = -1$, $x_3 = 2$, međusobno različiti. Opće rješenje je

$$a_n = A_1 + A_2(-1)^n + A_3\, 2^n.$$

Iz početnih uvjeta dobivamo sustav

$$\begin{aligned} A_1 - A_2 + 2A_3 &= 1, \\ A_1 + A_2 + 4A_3 &= 2, \\ A_1 - A_2 + 8A_3 &= 3. \end{aligned}$$

Oduzimanjem prve jednadžbe od treće dobivamo $6A_3 = 2$, tj. $A_3 = \frac{1}{3}$. Zbrajanjem prvih dviju dobivamo $2A_1 + 6A_3 = 3$, pa je $A_1 = \frac{1}{2}$, a iz prve jednadžbe $A_2 = A_1 + 2A_3 - 1 = \frac{1}{6}$. Dakle,

$$a_n = \frac{1}{2} + \frac{(-1)^n}{6} + \frac{2^n}{3}.$$

□

Zadatak 43. Riješite rekurzivnu relaciju $a_n = 4a_{n-1} - 4a_{n-2}$ uz početne uvjete $a_1 = 2$, $a_2 = 5$.

Rješenje. Karakteristična jednadžba je $x^2 - 4x + 4 = (x-2)^2 = 0$, pa je $x = 2$ dvostruki korijen. Opće rješenje je

$$a_n = (A + Bn)\, 2^n.$$

Iz početnih uvjeta je $2A + 2B = 2$ i $4A + 8B = 5$, tj. $A + B = 1$ i $4A + 8B = 5$, odakle je $B = \frac{1}{4}$, $A = \frac{3}{4}$. Dakle,

$$a_n = \frac{3}{4}\, 2^n + \frac{1}{4}\, n\, 2^n = (n+3)\, 2^{n-2}.$$

□

8.2 Linearne nehomogene rekurzivne relacije

Postupak 8.3. *Linearna nehomogena rekurzivna relacija s konstantnim koeficijentima* je relacija oblika

$$c_0 a_n + c_1 a_{n-1} + \cdots + c_r a_{n-r} = f(n),$$

gdje su c_i konstante, $c_0 \neq 0$, $c_r \neq 0$, $1 \leq r \leq n$, a f je zadana funkcija od n. Rješavamo je ovako:

1. Odredimo opće rješenje a_n^H pripadne homogene relacije $c_0 a_n + \cdots + c_r a_{n-r} = 0$, ali još ne računamo konstante A_i.
2. Prema obliku funkcije $f(n)$ iz donje tablice odredimo oblik partikularnog rješenja a_n^P.
3. Uvrštavanjem a_n^P u zadanu relaciju odredimo nepoznate koeficijente u a_n^P.
4. Opće rješenje nehomogene relacije je $a_n = a_n^H + a_n^P$.
5. Iz početnih uvjeta odredimo konstante preostale u a_n^H.

$f(n)$	oblik partikularnog rješenja a_n^P
$C \cdot b^n$	ako b nije karakteristični korijen: $a_n^P = A \cdot b^n$ ako je b karakteristični korijen kratnosti k: $a_n^P = A \cdot n^k b^n$
polinom stupnja m	ako 1 nije karakteristični korijen: $a_n^P = p(n)$ ako je 1 karakteristični korijen kratnosti k: $a_n^P = n^k p(n)$
$C \cdot n^m b^n$	ako b nije karakteristični korijen: $a_n^P = p(n)\, b^n$ ako je b karakteristični korijen kratnosti k: $a_n^P = n^k p(n)\, b^n$

Ovdje je $p(n) = q_0 + q_1 n + \cdots + q_m n^m$ polinom stupnja m s neodređenim koeficijentima.

Zadatak 44. Riješite rekurzivnu relaciju $a_{n+1} - 5a_n = 4n^2 + 2n + 6$ uz početni uvjet $a_1 = 1$.

Rješenje. Karakteristična jednadžba pripadne homogene relacije $a_{n+1} - 5a_n = 0$ je $x - 5 = 0$, pa je $a_n^H = A \cdot 5^n$.

Funkcija $f(n) = 4n^2 + 2n + 6$ je polinom stupnja 2, a 1 nije karakteristični korijen, pa tražimo $a_n^P = q_0 + q_1 n + q_2 n^2$. Uvrštavanjem u relaciju dobivamo

$$q_0 + q_1(n+1) + q_2(n+1)^2 - 5(q_0 + q_1 n + q_2 n^2) = 4n^2 + 2n + 6,$$

tj.

$$-4q_2\, n^2 + (2q_2 - 4q_1)\, n + (q_2 + q_1 - 4q_0) = 4n^2 + 2n + 6.$$

Izjednačavanjem koeficijenata dobivamo $q_2 = -1$, zatim $q_1 = -1$ i $q_0 = -2$, pa je $a_n^P = -n^2 - n - 2$. Opće rješenje je

$$a_n = A \cdot 5^n - n^2 - n - 2.$$

Iz $a_1 = 1$ slijedi $5A - 4 = 1$, tj. $A = 1$. Dakle, $a_n = 5^n - n^2 - n - 2$. □

Zadatak 45. Riješite rekurzivnu relaciju $a_n = 6a_{n-1} - 9a_{n-2} + n \cdot 3^n$ uz početne uvjete $a_0 = 2$, $a_1 = 3$.

Rješenje. Karakteristična jednadžba pripadne homogene relacije $a_n - 6a_{n-1} + 9a_{n-2} = 0$ je $x^2 - 6x + 9 = (x-3)^2 = 0$, pa je $x = 3$ dvostruki korijen i

$$a_n^H = A \cdot 3^n + B \cdot n\, 3^n.$$

Funkcija $f(n) = n \cdot 3^n$ je oblika $Cn^m b^n$ s $m = 1$ i $b = 3$, pri čemu je $b = 3$ karakteristični korijen kratnosti $k = 2$. Prema tablici tražimo

$$a_n^P = n^2(q_0 + q_1 n)\, 3^n.$$

Uvrštavanjem u relaciju i dijeljenjem s 3^{n-2} dobivamo

$$9n^2(q_0 + q_1 n) = 18(n-1)^2(q_0 + q_1 n - q_1) - 9(n-2)^2(q_0 + q_1 n - 2q_1) + 9n,$$

odnosno, nakon dijeljenja s 9,

$$q_0n^2 + q_1n^3 = (2n^2 - 4n + 2)(q_0 + q_1n - q_1) - (n^2 - 4n + 4)(q_0 + q_1n - 2q_1) + n.$$

Kad izmnožimo desnu stranu, članovi uz n^3 i n^2 se poklope s lijevom stranom, a izjednačavanjem koeficijenata uz n i slobodnih članova dobivamo

$$0 = -6q_1 + 1, \qquad 0 = -2q_0 + 6q_1,$$

tj. $q_1 = \frac{1}{6}$, $q_0 = \frac{1}{2}$. Dakle, $a_n^P = n^2(\frac{1}{2} + \frac{n}{6})3^n$, pa je opće rješenje

$$a_n = A \cdot 3^n + Bn\,3^n + n^2\Big(\frac{1}{2} + \frac{n}{6}\Big)3^n.$$

Iz $a_0 = 2$ slijedi $A = 2$, a iz $a_1 = 3$ slijedi $3 = 3A + 3B + 2$, tj. $B = -\frac{5}{3}$. Dakle,

$$a_n = 3^n\Big(2 - \frac{5}{3}n + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n^3\Big) = \frac{1}{2}\,3^{n-1}(n^3 + 3n^2 - 10n + 12).$$

□

8.3 Primjene rekurzivnih relacija

Zadatak 46. Odredite broj nizova duljine n sastavljenih od elemenata skupa $\{0, 1, 2\}$ u kojima nikoje dvije nule nisu susjedne.

Rješenje. Neka je a_n traženi broj. Promotrimo kako niz počinje:

- ako počinje s 1 ili s 2, ostatak je bilo koji dopustiv niz duljine $n - 1$; takvih nizova ima $2a_{n-1}$;
- ako počinje s 0, sljedeći član mora biti 1 ili 2, a ostatak je bilo koji dopustiv niz duljine $n - 2$; takvih nizova ima $2a_{n-2}$.

Po principu sume je $a_n = 2a_{n-1} + 2a_{n-2}$. Početni uvjeti su $a_1 = 3$ i $a_2 = 3 \cdot 3 - 1 = 8$ (od 9 nizova duljine 2 ne smijemo uzeti samo 00).

Karakteristična jednadžba je $x^2 - 2x - 2 = 0$, s korijenima $x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{3}$, pa je $a_n = A(1 - \sqrt{3})^n + B(1 + \sqrt{3})^n$. Iz početnih uvjeta

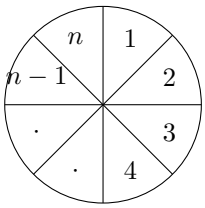
$$A(1 - \sqrt{3}) + B(1 + \sqrt{3}) = 3,$$
$$A(1 - \sqrt{3})^2 + B(1 + \sqrt{3})^2 = 8$$

dobivamo $A = \frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{3}}$, $B = \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{3}}$. Dakle,

$$a_n = \Big(\frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{3}}\Big)(1 - \sqrt{3})^n + \Big(\frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{3}}\Big)(1 + \sqrt{3})^n.$$

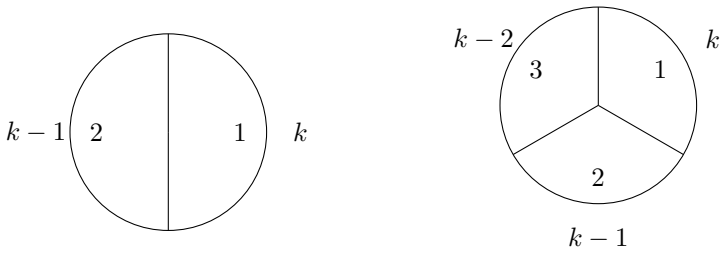
□

Zadatak 47. Krug je podijeljen na $n \geq 1$ sektora:



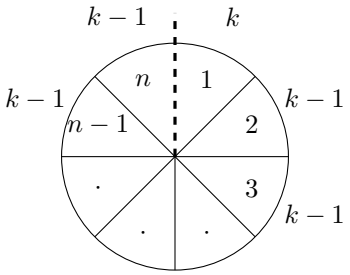
Sektore treba obojiti s $k \geq 3$ boja tako da je svaki sektor obojen jednom bojom i da su susjedni sektori različitih boja. Na koliko načina možemo obojiti krug?

Rješenje. Neka je a_n traženi broj. Očito je $a_1 = k$, $a_2 = k(k-1)$ i $a_3 = k(k-1)(k-2)$:



Za $n = 4$ više ne vrijedi $a_4 = k(k-1)(k-2)(k-3)$, jer sektori 1 i 3 nisu susjedni pa smiju biti iste boje.

Zato najprije promatramo „razrezani“ krug, u kojem sektori n i 1 nisu susjedni. Sektor 1 bojimo na k načina, a svaki sljedeći na $k-1$ način (mora se razlikovati samo od prethodnog), pa takvih bojanja ima $k(k-1)^{n-1}$:



Ta bojanja dijelimo na dva disjunktna slučaja:

- sektori n i 1 različitih su boja: to su točno dobra bojanja kruga, njih ima a_n;
- sektori n i 1 iste su boje: tada ih možemo shvatiti kao jedan sektor, pa ovakvih bojanja ima a_{n-1}.

Po principu sume dobivamo rekurzivnu relaciju

$$a_n + a_{n-1} = k(k-1)^{n-1}, \qquad n > 3, \qquad a_3 = k(k-1)(k-2).$$

Karakteristična jednadžba pripadne homogene relacije je $x+1 = 0$, pa je $a_n^H = A(-1)^n$. Funkcija $f(n) = k(k-1)^{n-1}$ je oblika Cb^n s $b = k-1 \neq -1$, pa tražimo $a_n^P = B(k-1)^{n-1}$. Uvrštavanjem i dijeljenjem s $(k-1)^{n-2}$ dobivamo $B(k-1) + B = k(k-1)$, tj. $B = k-1$, pa je $a_n^P = (k-1)^n$ i

$$a_n = A(-1)^n + (k-1)^n.$$

Iz $a_3 = k(k-1)(k-2)$ slijedi $A = (k-1)^3 - k(k-1)(k-2) = (k-1)\big((k-1)^2 - k(k-2)\big) = k-1$. Dakle,

$$a_n = (k-1)^n + (-1)^n(k-1).$$

□

Zadaci za vježbu.

1. Riješite rekurzivnu relaciju $a_{n+3} - 5a_{n+2} + 7a_{n+1} - 3a_n = 0$ uz početne uvjete $a_0 = -1$, $a_1 = 3$, $a_2 = 7$.

   Rješenje: Karakteristična jednadžba $x^3 - 5x^2 + 7x - 3 = (x-1)^2(x-3) = 0$ daje $a_n = A + Bn + C \cdot 3^n$; iz početnih uvjeta $A = -1$, $B = 4$, $C = 0$, tj. $a_n = 4n - 1$.

2. Riješite rekurzivnu relaciju $a_n - 3a_{n-1} = 2 - 2n^2$ uz početni uvjet $a_0 = 3$.

   Rješenje: $a_n^H = A \cdot 3^n$, $a_n^P = Bn^2 + Cn + D$; dobiva se $a_n = 3^n + n^2 + 3n + 2$.

9 Funkcije izvodnice

Jedan od najvažnijih zadataka kombinatorike je razvijanje alata za prebrojavanje. Funkcije izvodnice su jedan od najmoćnijih takvih alata.

Definicija 9.1. *Funkcija izvodnica* (FI) niza $(a_n)_{n\geq 0} = (a_0, a_1, a_2, \dots)$ je red potencija

$$A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots$$

Napomena 9.2. Uvijek pretpostavljamo da je x takav da red konvergira. Postoji teorija (formalni redovi potencija) koja nam dopušta da pitanje konvergencije zanemarimo i s redovima računamo kao s polinomima.

Propozicija 9.3 (Računske operacije s funkcijama izvodnicama)**.** Neka su $A(x)$ i $B(x)$ funkcije izvodnice nizova (a_n) i (b_n).

1. $A(x) = B(x)$ ako i samo ako je $a_i = b_i$ za sve $i \in \mathbb{N}_0$.
2. $A(x) + B(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n) x^n$.
3. $A(x) \cdot B(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$, gdje je $c_n = \sum_{i=0}^{n} a_i b_{n-i}$.
4. $\alpha A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (\alpha a_n) x^n$ za konstantu α.
5. $A'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n\, a_n x^{n-1}$.
6. $\int_0^x A(t)\, dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1}\, x^{n+1}$.

Zadatak 48. Nađite funkciju izvodnicu niza $(a_n)_{n\geq 0}$ ako je

a) $a_m = 1$ za neki fiksni m, a $a_n = 0$ za $n \neq m$;

b) $a_n = 1$ za sve n;

c) $a_n = k^n$, gdje je k konstanta;

d) $a_n = n + 1$;

e) $a_n = 3n + 5$;

f) $a_n = n^2$.

Rješenje. a) Svi članovi niza osim m-tog jednaki su 0, pa je $A(x) = x^m$.

b) Geometrijski red: $A(x) = 1 + x + x^2 + \cdots = \dfrac{1}{1-x}$.

c) $A(x) = \sum_{n\geq 0}(kx)^n = \dfrac{1}{1-kx}$.

d) Deriviranjem jednakosti $1 + x + x^2 + x^3 + \cdots = \frac{1}{1-x}$ dobivamo

$$A(x) = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \cdots = \Big(\frac{1}{1-x}\Big)' = \frac{1}{(1-x)^2}.$$

e) Množenjem rezultata iz d) s x dobivamo funkciju izvodnicu niza $b_n = n$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} nx^n = x + 2x^2 + 3x^3 + \cdots = \frac{x}{(1-x)^2}. \tag{2}$$

Prema svojstvima 2. i 4. je zato

$$A(x) = 3 \cdot \frac{x}{(1-x)^2} + 5 \cdot \frac{1}{1-x} = \frac{5-2x}{(1-x)^2}.$$

f) Deriviranjem jednakosti (2) dobivamo

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^{n-1} = \Big(\frac{x}{(1-x)^2}\Big)' = \frac{(1-x)^2 + 2x(1-x)}{(1-x)^4} = \frac{1+x}{(1-x)^3},$$

pa nakon množenja s x slijedi

$$A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n^2 x^n = \frac{x(1+x)}{(1-x)^3}.$$

□

Funkcije izvodnice koristimo kada brojevi a_n imaju neko kombinatorno značenje.

Zadatak 49. Nađite funkciju izvodnicu niza (a_n), gdje je a_n broj n-kombinacija m-članog skupa.

Rješenje. Kako je $a_n = \binom{m}{n}$ i $\binom{m}{n} = 0$ za $n > m$, po binomnom teoremu je

$$A(x) = \sum_{n=0}^{m} \binom{m}{n} x^n = (1+x)^m.$$

□

Teorem 9.4 (Generalizirani binomni teorem)**.** Za svaki $\alpha \in \mathbb{R}$ je

$$(1+x)^\alpha = \sum_{n\geq 0} \binom{\alpha}{n} x^n, \qquad \text{gdje je} \quad \binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}.$$

U prethodnom zadatku krenuli smo od poznatog broja n-kombinacija i odredili funkciju izvodnicu. Kombinatorna primjena funkcija izvodnica ide obrnutim smjerom: najprije odredimo funkciju izvodnicu, a zatim iz nje očitamo a_n.

Zadatak 50. Pomoću funkcija izvodnica odredite broj n-kombinacija m-članog skupa.

Rješenje. Elemente skupa promatramo jedan po jedan. Svaki element ili nije u podskupu (to označimo s $x^0 = 1$) ili jest (to označimo s $x^1 = x$). Te dvije mogućnosti su disjunktne, pa svakom elementu pridružujemo faktor $1 + x$. Funkcija izvodnica za podskupove m-članog skupa je stoga

$$\underbrace{(1+x)(1+x)\cdots(1+x)}_{m} = (1+x)^m.$$

Nakon množenja, koeficijent uz x^n jednak je broju načina da se iz n faktora odabere x, a iz preostalih $m - n$ faktora 1, tj. broju n-članih podskupova. Po binomnom teoremu $(1+x)^m = \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} x^k$, pa je $a_n = \binom{m}{n}$. □

Ključna vještina je, dakle, iz funkcije izvodnice očitati koeficijent a_n. Pritom nam pomažu algebarski trikovi (npr. rastav na parcijalne razlomke), binomni teorem i razvoj u Taylorov red: svaku analitičku funkciju možemo razviti u red

$$f(x) = \sum_{n\geq 0} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}\, x^n, \qquad \text{pa je} \qquad a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}.$$

Taylorov red koristimo tek u krajnjem slučaju, jer zahtijeva računanje n-te derivacije. Često ćemo koristiti sljedeći oblik binomnog teorema:

$$\frac{1}{(1-x)^n} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{k+n-1}{k} x^k. \tag{3}$$

Zadatak 51. Nađite koeficijent uz x^k, $k \geq 18$, u izrazu $(x^3 + x^4 + x^5 + \dots)^6$.

Rješenje. Vrijedi

$$(x^3+x^4+x^5+\dots)^6 = x^{18}(1+x+x^2+\dots)^6 = \frac{x^{18}}{(1-x)^6} \overset{(3)}{=} \sum_{j=0}^{\infty} \binom{j+5}{5} x^{j+18} = \sum_{k=18}^{\infty} \binom{k-13}{5} x^k,$$

pa je traženi koeficijent $\binom{k-13}{5}$. □

Zadatak 52. Odredite opći član niza čija je funkcija izvodnica $f(x) = \dfrac{1+x}{1-x}$.

Rješenje.

$$f(x) = \frac{1}{1-x} + \frac{x}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n + \sum_{n=0}^{\infty} x^{n+1} = 1 + 2x + 2x^2 + 2x^3 + \dots,$$

pa je $a_0 = 1$ i $a_n = 2$ za $n \geq 1$. □

Zadatak 53. Odredite opći član niza čija je funkcija izvodnica $f(x) = \dfrac{1}{(1-x)^2}$.

Rješenje. 1. način. Funkcija f je produkt $A(x)B(x)$, gdje je $A(x) = B(x) = \frac{1}{1-x} = \sum_{i\geq 0} x^i$, tj. $a_i = b_i = 1$ za sve i. Po svojstvu 3. je

$$c_n = \sum_{i=0}^{n} a_i b_{n-i} = \sum_{i=0}^{n} 1 = n + 1.$$

2. način. Po formuli (3) je

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{k+1}{k} x^k = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) x^k,$$

pa je $a_n = n + 1$. □

Zadatak 54. Odredite opći član niza čija je funkcija izvodnica $f(x) = \dfrac{1+x}{(1-x)(1-2x)}$.

Rješenje. Rastavimo f na parcijalne razlomke:

$$\frac{1+x}{(1-x)(1-2x)} = \frac{A}{1-x} + \frac{B}{1-2x} \quad \Longrightarrow \quad 1+x = A(1-2x) + B(1-x).$$

Izjednačavanjem koeficijenata dobivamo $A + B = 1$ i $-2A - B = 1$, odakle je $B = 3$, $A = -2$. Stoga je

$$f(x) = \frac{3}{1-2x} - \frac{2}{1-x} = 3\sum_{n=0}^{\infty} 2^n x^n - 2\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (3\cdot 2^n - 2)\, x^n,$$

pa je $a_n = 3 \cdot 2^n - 2$. □

9.1 Kombinatorne primjene funkcija izvodnica

U Zadatku 50 element koji nije u podskupu označili smo s x^0, a element koji jest s x^1. Ta ideja vodi do općenite metode.

Primjer 9.5. Neka je $S = \{a, b, c\}$. Izbore elemenata iz S možemo kodirati ovako: izbor jednog elementa ($\{a\}$, $\{b\}$ ili $\{c\}$) zapisujemo kao $a + b + c$, izbor dvaju elemenata kao $ab + bc + ca$, a izbor svih triju kao abc. Upravo te izraze dobivamo kao koeficijente u

$$(1+ax)(1+bx)(1+cx) = 1 + (a+b+c)\, x + (ab+bc+ca)\, x^2 + abc\, x^3.$$

Faktor $1 + ax = x^0 + ax^1$ čitamo kao „a nije izabran *ili* a je izabran jednom“. Zanima li nas samo broj izbora, stavimo $a = b = c = 1$:

$$(1+x)^3 = 1 + 3x + 3x^2 + x^3,$$

pa je $a_0 = 1$, $a_1 = 3$, $a_2 = 3$, $a_3 = 1$ i $a_n = 0$ za $n \geq 4$.

Primjer 9.6. Neka je $S = \{2\cdot a,\ 1\cdot b\}$ multiskup. Izbor jednog elementa ($\{a\}$ ili $\{b\}$) zapisujemo kao $a + b$, izbor dvaju ($\{a, a\}$ ili $\{a, b\}$) kao $a^2 + ab$, a izbor triju ($\{a, a, b\}$) kao $a^2 b$. Te izraze dobivamo u

$$(1 + ax + a^2x^2)(1+bx) = 1 + (a+b)\, x + (a^2+ab)\, x^2 + a^2 b\, x^3,$$

gdje 1, ax, a^2x^2 znače da je a izabran 0, 1, odnosno 2 puta. Za $a = b = 1$ dobivamo $(1 + x + x^2)(1 + x) = 1 + 2x + 2x^2 + x^3$.

Propozicija 9.7. Neka je a_n broj n-kombinacija multiskupa $M = \{m_1 \cdot b_1,\ \ldots,\ m_k \cdot b_k\}$. Funkcija izvodnica niza (a_n) je

$$(1 + x + \cdots + x^{m_1})(1 + x + \cdots + x^{m_2}) \cdots (1 + x + \cdots + x^{m_k}),$$

tj. a_n je koeficijent uz x^n u razvoju tog produkta. (Ako je $m_i = \infty$, odgovarajući faktor je $1 + x + x^2 + \cdots = \frac{1}{1-x}$.)

Zadatak 55. Nađite broj 4-kombinacija multiskupa $M = \{2 \cdot b,\ 1 \cdot c,\ 2 \cdot d,\ 1 \cdot e\}$.

Rješenje. Funkcija izvodnica je

$$(1 + x + x^2)(1+x)(1 + x + x^2)(1+x) = (1 + 2x + 2x^2 + x^3)^2.$$

Koeficijent uz x^4 dobivamo iz umnožaka $2x \cdot x^3$, $2x^2 \cdot 2x^2$ i $x^3 \cdot 2x$, pa je $a_4 = 2 + 4 + 2 = 8$. □

Kada tražimo samo jedan koeficijent, nepraktično je množiti sve faktore, osobito za veliki n. Posao olakšavaju algebarski trikovi.

Zadatak 56. Nađite broj 15-kombinacija multiskupa $\{10 \cdot a,\ 7 \cdot b,\ 12 \cdot c\}$.

Rješenje. Funkcija izvodnica je $(1 + x + \cdots + x^{10})(1 + x + \cdots + x^7)(1 + x + \cdots + x^{12})$. Pomoću formule za sumu geometrijskog niza $1 + x + \cdots + x^m = \frac{1-x^{m+1}}{1-x}$ i formule (3) dobivamo

$$\begin{aligned}\frac{1-x^{11}}{1-x} \cdot \frac{1-x^8}{1-x} \cdot \frac{1-x^{13}}{1-x} &= (1-x^{11})(1-x^8)(1-x^{13}) \sum_{k=0}^{\infty} \binom{k+2}{2} x^k \\ &= (1 - x^8 - x^{11} - x^{13} + x^{19} + x^{21} + x^{24} - x^{32}) \sum_{k=0}^{\infty} \binom{k+2}{2} x^k.\end{aligned}$$

Član s x^{15} dobivamo množenjem 1, $-x^8$, $-x^{11}$ i $-x^{13}$ redom s članovima reda uz x^{15}, x^7, x^4 i x^2, pa je

$$a_{15} = \binom{17}{2} - \binom{9}{2} - \binom{6}{2} - \binom{4}{2} = 136 - 36 - 15 - 6 = 79.$$

□

Zadatak 57. Nađite broj n-kombinacija multiskupa $\{\infty \cdot b_1,\ \ldots,\ \infty \cdot b_k\}$.

Rješenje. Funkcija izvodnica je

$$(1 + x + x^2 + \ldots)^k = \frac{1}{(1-x)^k} = \sum_{i=0}^{\infty} \binom{i+k-1}{i} x^i,$$

pa je $a_n = \binom{n+k-1}{n}$, u skladu s Teoremom 5.7. □

Napomena 9.8. Zadatak 57 možemo interpretirati i kao broj raspodjela n identičnih objekata u k različitih kutija, ili kao broj rješenja jednadžbe $x_1 + \cdots + x_k = n$ u $\mathbb{N}_0$. Slično, Zadatak 56 je ekvivalentan određivanju broja cjelobrojnih rješenja jednadžbe $x_1 + x_2 + x_3 = 15$ uz uvjete $0 \le x_1 \le 10$, $0 \le x_2 \le 7$, $0 \le x_3 \le 12$.

Zadatak 58. Neka je a_n broj cjelobrojnih rješenja jednadžbe $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = n$ uz uvjete $x_1 \in \{2, 3, 4\} \cup \{7, 8, 9, \ldots\}$, $100 \le x_2 \le 110$, $x_3 \ge 5$, $x_4 \ge 0$. Nađite funkciju izvodnicu niza (a_n) i pomoću nje izračunajte a_{112}.

Rješenje. Funkcija izvodnica je produkt faktora koji odgovaraju pojedinim varijablama:

$$\begin{aligned}&(x^2 + x^3 + x^4 + x^7 + x^8 + \ldots)(x^{100} + \cdots + x^{110})(x^5 + x^6 + \ldots)(1 + x + \ldots) \\ &= x^2\Big(\frac{1-x^3}{1-x} + \frac{x^5}{1-x}\Big) \cdot x^{100} \frac{1-x^{11}}{1-x} \cdot \frac{x^5}{1-x} \cdot \frac{1}{1-x} = \frac{x^{107}(1-x^3+x^5)(1-x^{11})}{(1-x)^4} \\ &= (x^{107} - x^{110} + x^{112} - x^{118} + x^{121} - x^{123}) \sum_{k=0}^{\infty} \binom{k+3}{3} x^k.\end{aligned}$$

Koeficijent uz x^{112} je

$$a_{112} = \binom{8}{3} - \binom{5}{3} + \binom{3}{3} = 56 - 10 + 1 = 47.$$

□

Zadatak 59. Neka je a_k broj načina da se k identičnih objekata rasporedi u n različitih kutija tako da nijedna kutija ne ostane prazna. Nađite funkciju izvodnicu niza $(a_k)_{k\geq 0}$.

Rješenje. Svaka kutija sadrži barem jedan objekt, pa joj odgovara faktor $x + x^2 + x^3 + \dots$. Funkcija izvodnica je

$$(x + x^2 + \dots)^n = x^n(1 + x + x^2 + \dots)^n = \frac{x^n}{(1-x)^n} = x^n \sum_{k=0}^{\infty} \binom{k+n-1}{k} x^k.$$

□

Zadatak 60. Tri puta bacamo igraću kocku. Na koliko načina zbroj dobivenih brojeva može biti 14?

Rješenje. Svakom bacanju odgovara faktor $x + x^2 + \dots + x^6$, pa je funkcija izvodnica

$$\begin{aligned}(x + x^2 + \dots + x^6)^3 &= x^3\Big(\frac{1-x^6}{1-x}\Big)^3 = x^3(1 - 3x^6 + 3x^{12} - x^{18}) \sum_{i=0}^{\infty} \binom{i+2}{2} x^i \\ &= (x^3 - 3x^9 + 3x^{15} - x^{21}) \sum_{i=0}^{\infty} \binom{i+2}{2} x^i.\end{aligned}$$

Koeficijent uz x^{14} je

$$a_{14} = \binom{13}{2} - 3\binom{7}{2} = 78 - 63 = 15.$$

□

Zadaci za vježbu.

1. Nađite funkciju izvodnicu niza $a_n = 2^n$.

   Rješenje: $\sum_{n\geq 0}(2x)^n = \frac{1}{1-2x}$.

2. Nađite funkciju izvodnicu za kombinacije multiskupa $\{2 \cdot a,\ 1 \cdot b,\ 3 \cdot c\}$ i pomoću nje odredite broj 3-kombinacija.

   Rješenje: $(1 + x + x^2)(1 + x)(1 + x + x^2 + x^3)$; koeficijent uz x^3 je 6.

9.2 Eksponencijalne funkcije izvodnice

„Obične“ funkcije izvodnice koristimo za prebrojavanje rasporeda u kojima poredak nije bitan (kombinacije multiskupova, raspodjele identičnih objekata u kutije, ...). Kada je poredak bitan, koristimo eksponencijalne funkcije izvodnice.

Definicija 9.9. *Eksponencijalna funkcija izvodnica* (EFI) niza $(a_n)_{n\geq 0}$ je

$$A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} x^n = a_0 + a_1 \frac{x}{1!} + a_2 \frac{x^2}{2!} + a_3 \frac{x^3}{3!} + \dots$$

Pravila za računanje s eksponencijalnim funkcijama izvodnicama ista su kao za obične. Eksponencijalna funkcija izvodnica niza $a_n = 1$ je $\sum_{n\geq 0} \frac{x^n}{n!} = e^x$, odakle i naziv.

Zadatak 63. Nađite eksponencijalnu funkciju izvodnicu niza

a) $a_n = n!$;

b) $a_n = a^n$, gdje je $a \in \mathbb{R}$.

Rješenje. a) $A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{n!} x^n = \frac{1}{1-x}$.

b) $A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ax)^n}{n!} = e^{ax}$.

□

Broj r-permutacija n-članog skupa je $P(n,r) = \binom{n}{r} r!$, pa je eksponencijalna funkcija izvodnica tog niza

$$\sum_{r=0}^{\infty} \binom{n}{r} r! \frac{x^r}{r!} = \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} x^r = (1+x)^n = \Big(1 + \frac{x}{1!}\Big)^n,$$

pri čemu faktor $1 + \frac{x}{1!}$ odgovara jednom elementu koji ili nije ili jest u permutaciji. Općenito vrijedi:

Propozicija 9.10. Neka je a_r broj r-permutacija multiskupa $M = \{n_1 \cdot b_1,\ \ldots,\ n_k \cdot b_k\}$. Eksponencijalna funkcija izvodnica niza (a_r) je

$$\Big(1 + \frac{x}{1!} + \cdots + \frac{x^{n_1}}{n_1!}\Big)\Big(1 + \frac{x}{1!} + \cdots + \frac{x^{n_2}}{n_2!}\Big) \cdots \Big(1 + \frac{x}{1!} + \cdots + \frac{x^{n_k}}{n_k!}\Big),$$

tj. a_r je koeficijent uz $\frac{x^r}{r!}$ u razvoju tog produkta.

Zadatak 64. Koliko različitih riječi duljine 4 (ne nužno smislenih) možemo sastaviti od slova riječi BANANA?

Rješenje. Tražimo broj 4-permutacija multiskupa $\{1 \cdot B,\ 3 \cdot A,\ 2 \cdot N\}$. Eksponencijalna funkcija izvodnica je

$$\Big(1+x\Big)\Big(1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}\Big)\Big(1 + x + \frac{x^2}{2}\Big) = \Big(1 + 2x + \frac{3}{2}x^2 + \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{6}x^4\Big)\Big(1 + x + \frac{x^2}{2}\Big).$$

Koeficijent uz x^4 je $\frac{1}{6} + \frac{2}{3} + \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{19}{12}$. Kako je to koeficijent uz x^4, a ne uz $\frac{x^4}{4!}$, slijedi

$$a_4 = \frac{19}{12} \cdot 4! = 38.$$

□

Zadatak 65. Odredite eksponencijalnu funkciju izvodnicu niza (a_n), gdje je a_n broj n-permutacija multiskupa $\{\infty \cdot b_1,\ \ldots,\ \infty \cdot b_k\}$.

Rješenje.

$$\Big(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots\Big)^k = (e^x)^k = e^{kx} = \sum_{n=0}^{\infty} k^n \frac{x^n}{n!},$$

pa je $a_n = k^n$, u skladu s Propozicijom 5.4. □

Zadatak 66. Neka je a_n broj kvaternih nizova duljine n (nizova znamenki 0, 1, 2, 3) koji sadrže barem jednu dvojku i barem jednu trojku. Odredite eksponencijalnu funkciju izvodnicu niza (a_n) i a_n.

Rješenje. Znamenkama 0 i 1 odgovara faktor $1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots = e^x$, a znamenkama 2 i 3 (koje se moraju pojaviti barem jednom) faktor $x + \frac{x^2}{2!} + \cdots = e^x - 1$. Stoga je

$$A(x) = e^{2x}(e^x - 1)^2 = e^{4x} - 2e^{3x} + e^{2x} = \sum_{n=0}^{\infty} (4^n - 2 \cdot 3^n + 2^n) \frac{x^n}{n!},$$

pa je $a_n = 4^n - 2 \cdot 3^n + 2^n$. □

Zadatak 67. Neka je a_n broj ternarnih nizova duljine n koji sadrže paran broj nula i neparan broj jedinica. Odredite eksponencijalnu funkciju izvodnicu niza (a_n) i a_n.

Rješenje. Koristimo razvoje

$$\frac{e^x + e^{-x}}{2} = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots, \qquad \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \frac{x}{1!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots$$

Nulama (paran broj) odgovara prvi, jedinicama (neparan broj) drugi, a dvojkama (proizvoljan broj) faktor e^x. Stoga je

$$A(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \cdot \frac{e^x - e^{-x}}{2} \cdot e^x = \frac{1}{4}(e^{3x} - e^{-x}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n - (-1)^n}{4} \frac{x^n}{n!},$$

pa je $a_n = \frac{3^n - (-1)^n}{4}$. □

Napomena 9.11. Zadatak 67 je ekvivalentan određivanju broja rasporeda n različitih predmeta u 3 različite kutije tako da prva kutija sadrži paran, a druga neparan broj predmeta.

Zadatak 68. Neka je a_n broj načina da se n različitih objekata rasporedi u 4 različite kutije tako da kutije 1 i 2 sadrže paran broj objekata, a kutija 3 neparan broj objekata. Nađite a_n za sve $n \geq 0$.

Rješenje. Problem je ekvivalentan određivanju broja kvaternih nizova duljine n s parnim brojem nula i jedinica, neparnim brojem dvojki i proizvoljnim brojem trojki. Eksponencijalna funkcija izvodnica je

$$\begin{aligned} A(x) &= \Big(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\Big)^2 \cdot \frac{e^x - e^{-x}}{2} \cdot e^x = \frac{1}{8}(e^{2x} + 2 + e^{-2x})(e^{2x} - 1) \\ &= \frac{1}{8}(e^{4x} + e^{2x} - e^{-2x} - 1) = -\frac{1}{8} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4^n + 2^n - (-2)^n}{8} \frac{x^n}{n!}. \end{aligned}$$

Dakle, $a_0 = -\frac{1}{8} + \frac{1}{8} = 0$, a za $n \geq 1$ je

$$a_n = \frac{4^n + 2^n - (-2)^n}{8}.$$

□

Zadaci za vježbu.

1. Nađite eksponencijalnu funkciju izvodnicu niza $a_n = n^2$.

   Rješenje: Deriviranjem $\sum \frac{x^n}{n!} = e^x$ i množenjem s x dobivamo $\sum \frac{nx^n}{n!} = xe^x$; ponavljanjem postupka $\sum \frac{n^2 x^n}{n!} = x(1 + x)e^x$.

2. Za $n \in \mathbb{N}_0$ nađite broj a_n načina da se n različitih objekata rasporedi u m različitih kutija tako da nijedna kutija ne ostane prazna.

   Rješenje: Eksponencijalna funkcija izvodnica je

$$\left(x + \frac{x^2}{2!} + \dots\right)^m = (e^x - 1)^m = \sum_{i=0}^{m} (-1)^{m-i} \binom{m}{i} e^{ix} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{i=0}^{m} (-1)^{m-i} \binom{m}{i} i^n \right) \frac{x^n}{n!},$$

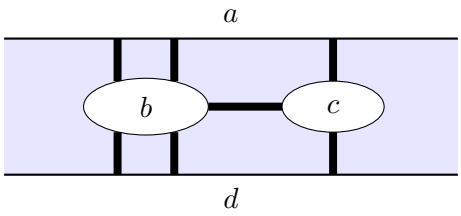
   pa je $a_n = \sum_{i=0}^{m} (-1)^{m-i} \binom{m}{i} i^n$.

Dio II

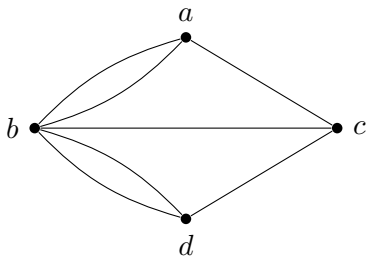
Teorija grafova

10 Osnovni pojmovi teorije grafova

Najpoznatiji problem s kojim počinje teorija grafova je problem *königsberških mostova*. Dio grada Königsberga nalazi se na dva riječna otoka, povezana s obalama i međusobno sa sedam mostova:



Pitanje je može li se prošetati gradom tako da se svakim mostom prijeđe točno jednom i vrati na početak. Euler je u 18. stoljeću pokazao da takva šetnja ne postoji. Označimo li obale i otoke točkama, a mostove linijama, dobivamo graf (točnije, multigraf):

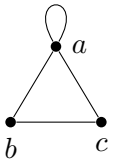


Definicija 10.1. *Graf* $G = (V, E)$ je uređeni par skupa *vrhova* V i skupa *bridova* E, pri čemu je svaki brid dvočlani podskup od V. Ako je E multiskup (tj. dopuštamo višestruke bridove), G zovemo *multigraf*. Brid oblika $\{v, v\}$, koji počinje i završava u istom vrhu, zovemo *petlja*. Graf je *jednostavan* ako nema petlji ni višestrukih bridova.

Primjer 10.2. Multigraf königsberških mostova je $G = (V, E)$, gdje je $V = \{a, b, c, d\}$ i

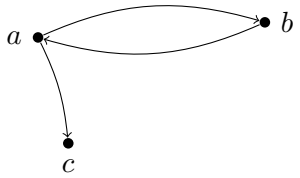
$$E = \{2 \cdot \{a, b\},\ \{a, c\},\ \{b, c\},\ 2 \cdot \{b, d\},\ \{c, d\}\}.$$

Na sljedećoj slici graf ima petlju $\{a, a\}$:



Definicija 10.3. Ako su bridovi uređeni parovi vrhova (tj. imaju orijentaciju), govorimo o *usmjerenom grafu*.

Primjer 10.4.



$V = \{a, b, c\}, \quad E = \{(a, b),\ (b, a),\ (a, c)\}$

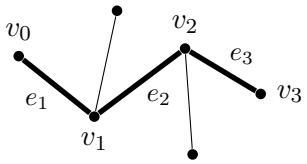
Definicija 10.5. Dva vrha su *susjedna* ako su spojena bridom. Vrh v i brid e su *incidentni* (susjedni) ako je $v \in e$. Dva brida su *susjedna* ako imaju zajednički vrh.

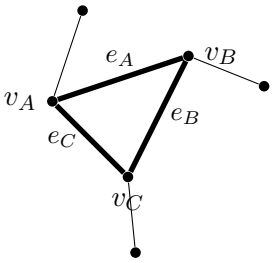
Definicija 10.6. *Potpuni graf* K_n je jednostavan graf s n vrhova u kojem je svaki par vrhova spojen bridom. *Trivijalni graf* je graf s jednim vrhom. *Prazan graf* je graf bez bridova, tj. $E(G) = \emptyset$.

Definicija 10.7. Broj vrhova $\nu(G) = |V(G)|$ zove se *red*, a broj bridova $e(G) = |E(G)|$ *veličina* grafa G. *Stupanj* $d(v)$ vrha $v \in V(G)$ je broj bridova incidentnih s v, pri čemu se petlja broji dvaput.

Definicija 10.8. *Put* u grafu G je niz $v_0\, e_1\, v_1\, e_2 \ldots e_n\, v_n$ međusobno različitih vrhova v_i i bridova e_i takav da brid e_i spaja v_{i-1} i v_i. Ako je $v_0 = v_n$ (a ostali vrhovi su međusobno različiti), govorimo o *ciklusu*.

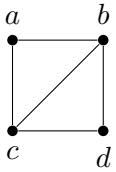
Primjer 10.9. Na lijevoj slici istaknut je put $v_0e_1v_1e_2v_2e_3v_3$, a na desnoj ciklus $v_Ae_Av_Be_Bv_Ce_Cv_A$.



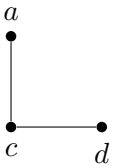


Definicija 10.10. Graf $G_1 = (V_1, E_1)$ je *podgraf* grafa $G_2 = (V_2, E_2)$ ako je $V_1 \subseteq V_2$ i $E_1 \subseteq E_2$.

Primjer 10.11.



G_2



G_1

Ovdje je $V_2 = \{a, b, c, d\}$, $E_2 = \{\{a, b\}, \{b, d\}, \{c, d\}, \{a, c\}, \{b, c\}\}$, a podgraf G_1 ima $V_1 = \{a, c, d\}$ i $E_1 = \{\{a, c\}, \{c, d\}\}$.

Propozicija 10.12. Za svaki graf $G = (V, E)$ vrijedi

$$\sum_{v \in V} d(v) = 2|E|,$$

tj. zbroj stupnjeva svih vrhova jednak je dvostrukom broju bridova.

Dokaz. Svaki brid doprinosi zbroju stupnjeva točno 2 (po jedan za svaki kraj; petlja doprinosi 2 istom vrhu). □

Lema 10.13 (o rukovanju)**.** U svakom grafu broj vrhova neparnog stupnja je paran.

Dokaz. Podijelimo vrhove na vrhove parnog i vrhove neparnog stupnja:

$$2|E| = \sum_{d(v) \text{ paran}} d(v) + \sum_{d(v) \text{ neparan}} d(v).$$

Lijeva strana i prva suma na desnoj strani su parni brojevi, pa je i druga suma paran broj. Ona je zbroj neparnih brojeva, a zbroj neparnih brojeva je paran ako i samo ako ih ima paran broj. Dakle, vrhova neparnog stupnja ima paran broj. □

Zadatak 69. Koliko najviše bridova može imati jednostavan graf s n vrhova? Koliko najmanje bridova može imati povezan graf s n vrhova?

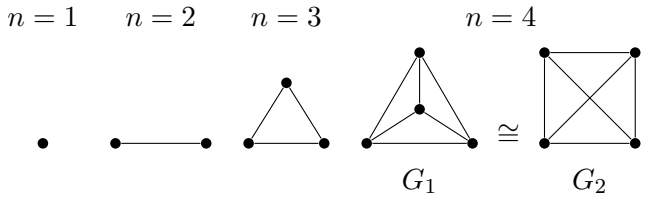
Rješenje. Jednostavan graf ima najviše bridova kada je potpun, tj. kada je svaki par vrhova spojen bridom; tada ima $\binom{n}{2}$ bridova. Povezan graf s n vrhova ima najmanje $n-1$ bridova, i taj minimum postiže stablo (npr. „zvijezda“ u kojoj je jedan vrh spojen sa svim ostalima). □

Zadatak 70. Je li moguće da u grupi od 7 osoba svaka osoba ima točno 3 poznanika?

Rješenje. Osobe shvatimo kao vrhove, a poznanstva kao bridove grafa. Tada bi graf imao 7 vrhova stupnja 3, tj. zbroj stupnjeva bio bi $7 \cdot 3 = 21$, što je neparan broj, a mora biti jednak $2|E|$. Dakle, to nije moguće. (Isti zaključak slijedi izravno iz leme o rukovanju: graf bi imao 7 vrhova neparnog stupnja.) □

11 Izomorfizam grafova

Primjer 11.1. Potpuni grafovi K_n za $n = 1, 2, 3, 4$:



Grafovi G_1 i G_2 nacrtani su različito, ali nisu „bitno različiti“: oba su K_4. Takve grafove zovemo izomorfnima.

Definicija 11.2. Grafovi $G_1 = (V_1, E_1)$ i $G_2 = (V_2, E_2)$ su *izomorfni*, oznaka $G_1 \cong G_2$, ako postoje bijekcije $\theta : V_1 \to V_2$ i $\varphi : E_1 \to E_2$ takve da je vrh v incidentan s bridom e u G_1 ako i samo ako je vrh $\theta(v)$ incidentan s bridom $\varphi(e)$ u G_2.

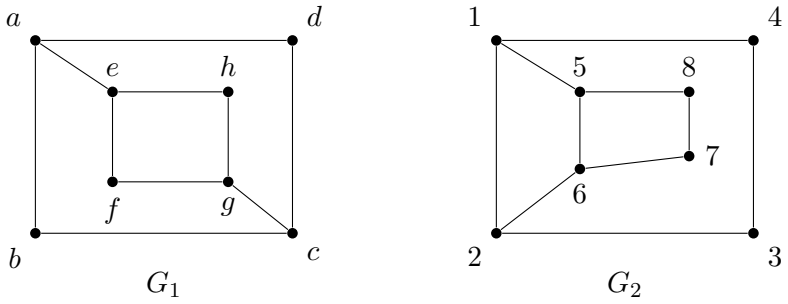
Propozicija 11.3. Ako su G_1 i G_2 izomorfni, onda

1. imaju jednak broj vrhova i jednak broj bridova;
2. imaju jednak broj vrhova svakog stupnja; preciznije, $d(\theta(v)) = d(v)$;
3. izomorfizam preslikava susjedne vrhove u susjedne vrhove, petlje u petlje, puteve u puteve i cikluse u cikluse iste duljine;

4. izomorfizam preslikava podgraf H od G_1 u izomorfan podgraf $(\theta(V(H)), \varphi(E(H)))$ od G_2.

Svojstva iz Propozicije 11.3 su *nužni* uvjeti za izomorfizam: ako neko od njih nije ispunjeno, grafovi nisu izomorfni. Da bismo pokazali da grafovi jesu izomorfni, moramo konstruirati izomorfizam i provjeriti da čuva sve bridove.

Zadatak 71. Jesu li grafovi G_1 i G_2 izomorfni?

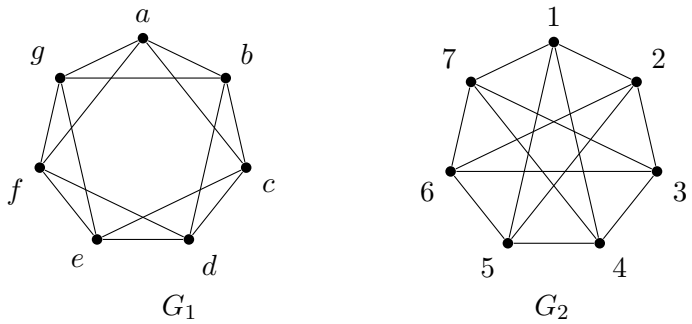


Rješenje. Oba grafa imaju 8 vrhova i 10 bridova. U G_1 su vrhovi a, c, e, g stupnja 3, a b, d, f, h stupnja 2; u G_2 su vrhovi $1, 2, 5, 6$ stupnja 3, a $3, 4, 7, 8$ stupnja 2. Dakle, osnovne invarijante se podudaraju. Ipak, grafovi nisu izomorfni, što možemo pokazati na više načina.

1. U G_2 postoji ciklus $1\,5\,6\,2$ čiji su svi vrhovi stupnja 3. Izomorfizam bi ga preslikao u ciklus u G_1 čiji su svi vrhovi stupnja 3, tj. na vrhovima a, c, e, g. Takvog ciklusa u G_1 nema.
2. Podgraf grafa G_1 induciran vrhovima stupnja 2 (b, d, f, h) nema bridova, dok podgraf grafa G_2 induciran vrhovima stupnja 2 $(3, 4, 7, 8)$ ima bridove $\{3, 4\}$ i $\{7, 8\}$.
3. Vrh a stupnja 3 ima susjede stupnjeva 3, 2, 2 (e, d, b), a svaki vrh stupnja 3 u G_2 ima susjede stupnjeva 2, 3, 3. Zato se a ne može preslikati ni u jedan vrh grafa G_2.

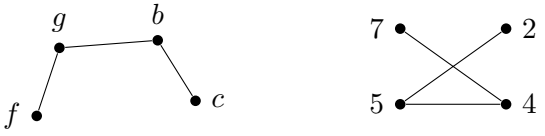
□

Zadatak 72. Jesu li grafovi G_1 i G_2 izomorfni?



Rješenje. Oba grafa imaju 7 vrhova, 14 bridova i svi su im vrhovi stupnja 4, pa izgledaju kao da bi mogli biti izomorfni. Pokušajmo konstruirati izomorfizam θ.

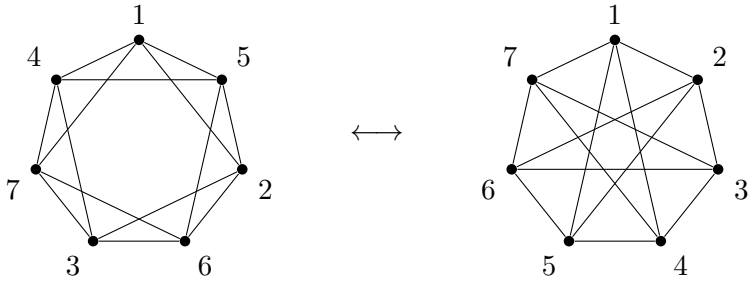
Neka je $\theta(a) = 1$. Tada se susjedi g, f, c, b vrha a moraju preslikati u susjede $7, 5, 4, 2$ vrha 1. Podgrafovi inducirani tim susjedima su putevi:



Krajevi puta moraju prijeći u krajeve puta: $\{f, c\} \to \{7, 2\}$ i $\{g, b\} \to \{4, 5\}$. Zbog simetrije možemo uzeti $\theta(f) = 7$, $\theta(c) = 2$; tada je $\theta(g) = 4$ (jer su f i g susjedni, kao i 7 i 4) i $\theta(b) = 5$.

Preostali su vrhovi d, e i $3, 6$. Vrh d je susjedan s f, b, c, tj. $\theta(d)$ mora biti susjedan sa $7, 5, 2$. Vrh 3 susjedan je s $2, 4, 6, 7$, a vrh 6 sa $2, 3, 5, 7$, pa je $\theta(d) = 6$ i $\theta(e) = 3$.

Još treba provjeriti da θ preslikava sve bridove u bridove. Označimo vrhove grafa G_1 njihovim slikama:



Svih 14 bridova se podudara, pa je $G_1 \cong G_2$, uz izomorfizam

$$a \mapsto 1,\ b \mapsto 5,\ c \mapsto 2,\ d \mapsto 6,\ e \mapsto 3,\ f \mapsto 7,\ g \mapsto 4.$$

□

Zadatak 73. Odredite sve klase izomorfizma jednostavnih grafova s 4 vrha.

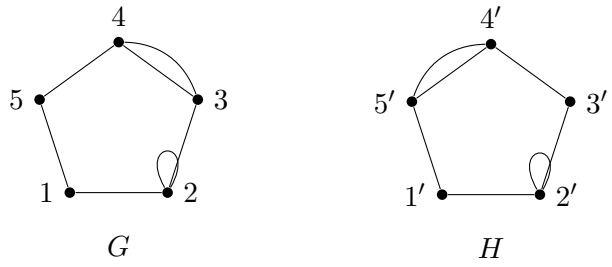
Rješenje. Grafove razvrstavamo prema broju bridova i, unutar toga, prema stupnjevima vrhova:

$\lvert E\rvert$	predstavnici klasa	broj klasa
0	 prazan graf	1
1		1
2	 (stupnjevi 1,1,1,1)  (stupnjevi 2,1,1,0)	2
3	 (2,2,1,1)  (3,1,1,1)  (2,2,2,0)	3
4	 (2,2,2,2)  (3,2,2,1)	2
5		1
6	 K_4	1

Ukupno postoji $1+1+2+3+2+1+1 = 11$ klasa izomorfizma jednostavnih grafova s 4 vrha. □

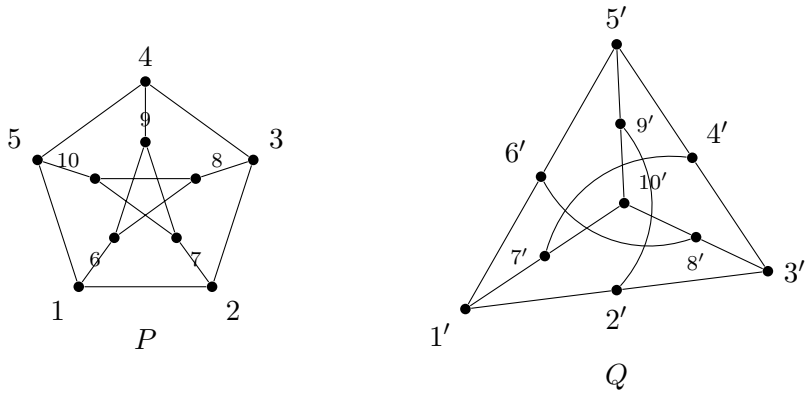
Zadaci za vježbu.

1. Jesu li grafovi G i H izomorfni?



Rješenje: Nisu. Stupnjevi vrhova $1, \ldots, 5$ u G su $2, 4, 3, 3, 2$, a vrhova $1', \ldots, 5'$ u H su $2, 4, 2, 3, 3$. Izomorfizam bi morao preslikati $2 \mapsto 2'$ (jedini vrhovi stupnja 4), a onda $1 \mapsto 1'$ ili $1 \mapsto 3'$. U prvom slučaju bi bilo $5 \mapsto 5'$, a u drugom $5 \mapsto 4'$, što je nemoguće jer je $d(5) = 2$, a $d(5') = d(4') = 3$.

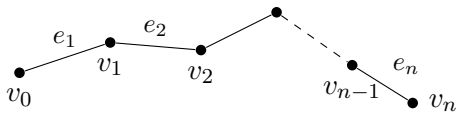
2. Jesu li Petersenov graf P i graf Q izomorfni? Vrhovi grafa Q su vrhovi i polovišta bridova tetraedra, a bridovi su bridovi tetraedra (podijeljeni polovištima) te spojnice polovišta nasuprotnih bridova tetraedra.



Rješenje: Jesu. Jedan izomorfizam je $1 \mapsto 1'$, $2 \mapsto 2'$, $3 \mapsto 3'$, $4 \mapsto 8'$, $5 \mapsto 6'$, $6 \mapsto 7'$, $7 \mapsto 9'$, $8 \mapsto 4'$, $9 \mapsto 10'$, $10 \mapsto 5'$.

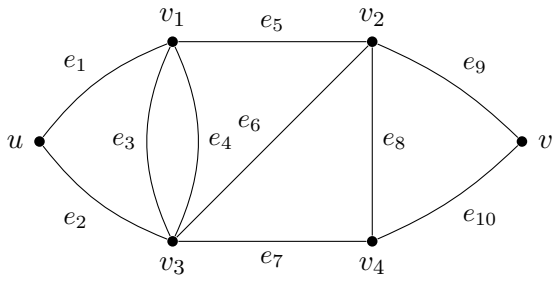
12 Povezanost grafova i Eulerovi grafovi

Definicija 12.1. *Šetnja* u grafu je niz $v_0\, e_1\, v_1\, e_2 \ldots e_n\, v_n$, gdje su v_i vrhovi, a $e_i = \{v_{i-1}, v_i\}$ bridovi. Broj bridova n je *duljina* šetnje. Šetnja u kojoj su svi bridovi različiti je *staza*, a šetnja u kojoj su svi vrhovi različiti je *put*. *Ciklus* je zatvoren put.



Napomena 12.2. Ako između vrhova u i v postoji šetnja, onda postoji i put između u i v.

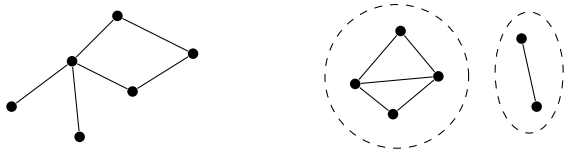
Primjer 12.3. U grafu



- $u\, e_1\, v_1\, e_3\, v_3\, e_7\, v_4\, e_7\, v_3\, e_6\, v_2\, e_9\, v$ je šetnja od u do v (ponavljaju se i bridovi i vrhovi);
- $u\, e_2\, v_3\, e_3\, v_1\, e_4\, v_3\, e_7\, v_4\, e_{10}\, v$ je staza (bridovi se ne ponavljaju, ali vrh v_3 se ponavlja);
- $u\, e_2\, v_3\, e_4\, v_1\, e_5\, v_2\, e_9\, v$ je put (ne ponavljaju se vrhovi, pa ni bridovi).

Definicija 12.4. Graf je *povezan* ako za svaka dva vrha $x, y \in V$ postoji put između x i y. Maksimalni povezani podgrafovi grafa zovu se *komponente povezanosti*.

Primjer 12.5. Lijevi graf je povezan, a desni nije; on ima dvije komponente povezanosti.

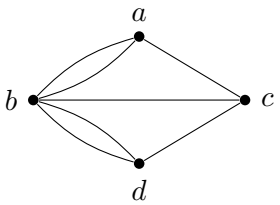


Definicija 12.6. *Eulerova šetnja* je šetnja koja prolazi svakim bridom grafa točno jednom (dakle, ona je staza). *Eulerova tura* je zatvorena Eulerova šetnja.

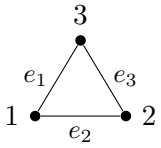
Teorem 12.7. Povezan graf ima Eulerovu šetnju ako i samo ako ima najviše dva vrha neparnog stupnja.

Teorem 12.8. Povezan graf ima Eulerovu turu ako i samo ako su svi njegovi vrhovi parnog stupnja.

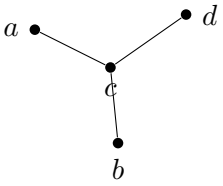
Zadatak 74. Koji od sljedećih grafova imaju Eulerovu šetnju, a koji Eulerovu turu?



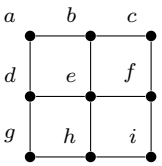
a) mostovi Königsberga



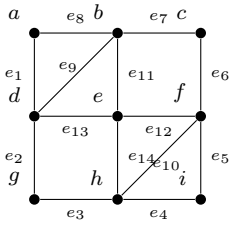
b) K_3



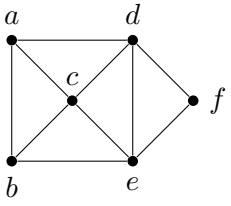
c)



d)



e)



f)

Rješenje. Svi grafovi su povezani, pa koristimo Teoreme 12.7 i 12.8.

a) $d(a) = 3$, $d(b) = 5$, $d(c) = 3$, $d(d) = 3$. Sva četiri vrha su neparnog stupnja, pa graf nema ni Eulerovu šetnju ni Eulerovu turu. Time je riješen problem königsberških mostova.

b) Svi vrhovi su stupnja 2, pa graf ima Eulerovu turu (npr. $1\, e_2\, 2\, e_3\, 3\, e_1\, 1$), a time i Eulerovu šetnju.

c) $d(a) = d(b) = d(d) = 1$, $d(c) = 3$. Četiri vrha su neparnog stupnja, pa graf nema ni Eulerovu šetnju ni Eulerovu turu.

d) $d(a) = d(c) = d(g) = d(i) = 2$, $d(b) = d(d) = d(f) = d(h) = 3$, $d(e) = 4$. Četiri vrha su neparnog stupnja, pa graf nema ni Eulerovu šetnju ni Eulerovu turu.

e) $d(a) = d(c) = d(g) = d(i) = 2$, a $d(b) = d(d) = d(e) = d(f) = d(h) = 4$. Svi vrhovi su parnog stupnja, pa graf ima Eulerovu turu, npr.

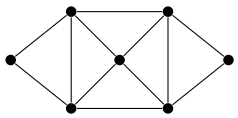
$$d\, e_1\, a\, e_8\, b\, e_{11}\, e\, e_{13}\, d\, e_2\, g\, e_3\, h\, e_{14}\, e\, e_{12}\, f\, e_{10}\, h\, e_4\, i\, e_5\, f\, e_6\, c\, e_7\, b\, e_9\, d.$$

f) $d(a) = d(b) = 3$, $d(c) = d(d) = d(e) = 4$, $d(f) = 2$. Točno dva vrha su neparnog stupnja, pa graf ima Eulerovu šetnju (od a do b), ali nema Eulerovu turu.

□

Zadaci za vježbu.

1. Ima li sljedeći graf Eulerovu šetnju, odnosno Eulerovu turu?



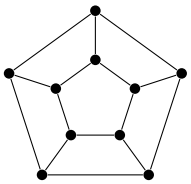
Rješenje: Svi vrhovi su parnog stupnja, pa graf ima i Eulerovu turu i Eulerovu šetnju.

13 Planarni grafovi

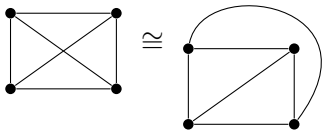
Definicija 13.1. Graf je *planaran* ako se može nacrtati u ravnini tako da se bridovi sijeku samo u vrhovima. Takav crtež planarnog grafa zovemo *ravninski graf*. Ravninski graf dijeli ravninu na područja koja zovemo *strane*; jedna od njih je neograničena (*vanjska strana*).

Planarni grafovi imaju primjene npr. u popločavanju ravnine i dizajnu elektroničkih čipova.

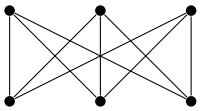
Primjer 13.2. a) Sljedeći graf je planaran, jer je nacrtan tako da se bridovi sijeku samo u vrhovima:



b) Graf K_4 je planaran: iako se na lijevom crtežu dva brida sijeku, možemo ga nacrtati bez presijecanja.



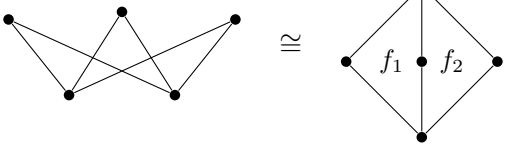
c) Graf $K_{3,3}$ nije planaran (vidi Zadatak 76).



Ne postoji jednostavan kriterij planarnosti: ako graf uspijemo nacrtati bez presijecanja bridova, on je planaran, a ako ne zadovoljava Eulerovu formulu (i njezine posljedice), nije planaran.

Teorem 13.3 (Eulerova formula)**.** Za povezan ravninski graf s v vrhova, e bridova i f strana vrijedi

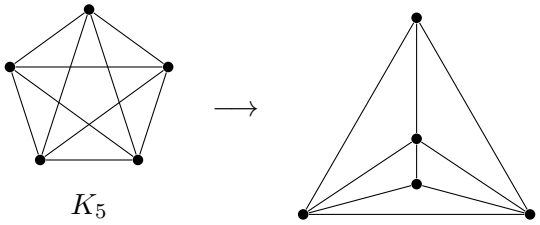
$$v - e + f = 2.$$

Primjer 13.4. 

Ovaj graf je planaran; na desnom crtežu ima $v = 5$ vrhova, $e = 6$ bridova i $f = 3$ strane (f_3 je vanjska strana), pa je $v - e + f = 5 - 6 + 3 = 2$.

Zadatak 75. Je li graf koji dobivamo uklanjanjem jednog brida iz K_5 planaran?

Rješenje. Jest. Na sljedećoj slici je K_5 i ravninski crtež grafa koji dobivamo uklanjanjem jednog brida:



Provjera Eulerovom formulom: $v = 5$, $e = 9$, $f = 6$, pa je $5 - 9 + 6 = 2$. □

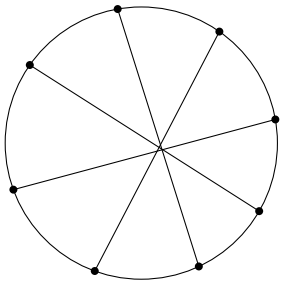
Zadatak 76. Tri kuće treba povezati stazama s tri bunara, tako da svaka kuća bude povezana sa svakim bunarom. Mogu li se staze izgraditi tako da se ne sijeku?

Rješenje. Pitamo je li graf $K_{3,3}$ planaran. Pretpostavimo da jest. Tada za njegov ravninski crtež vrijedi Eulerova formula; kako je $v = 6$ i $e = 9$, broj strana je $f = 5$.

Svaki brid spaja kuću s bunarom, pa graf nema ciklusa duljine 3. Zato je svaka strana omeđena s barem 4 brida. Svaki brid omeđuje najviše dvije strane, pa je $4f \leq 2e$, tj. $e \geq 2f = 10$. To je u suprotnosti s $e = 9$. Dakle, $K_{3,3}$ nije planaran i staze se ne mogu izgraditi bez presijecanja. □

Zadatak 77. Na okruglom otoku izgrađeno je n ravnih kanala koji vode od mora do mora, tako da se svaka dva kanala sijeku, ali nikoja tri ne prolaze istom točkom. Na koliko je dijelova otok podijeljen kanalima?

Rješenje. Za $n = 4$ situacija izgleda ovako:



Promatramo ravninski graf čiji su vrhovi sjecišta kanala međusobno i sjecišta kanala s obalom, a bridovi dijelovi kanala i obale između njih. Broj dijelova otoka je $x = f - 1$ (vanjska strana je more).

Na obali svaki kanal ima dva kraja, a svaka dva kanala sijeku se u jednoj točki u unutrašnjosti, pa je

$$v = 2n + \binom{n}{2}.$$

Vrhovi na obali su stupnja 3, a unutarnja sjecišta stupnja 4, pa je

$$2e = 2n \cdot 3 + \binom{n}{2} \cdot 4, \qquad \text{tj.} \qquad e = 3n + 2\binom{n}{2}.$$

Iz Eulerove formule slijedi

$$f = e - v + 2 = 3n + 2\binom{n}{2} - 2n - \binom{n}{2} + 2 = n + 2 + \binom{n}{2},$$

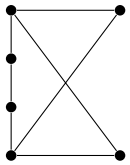
pa je traženi broj dijelova

$$x = f - 1 = 1 + n + \binom{n}{2}.$$

(Za $n = 4$ dobivamo $1 + 4 + 6 = 11$.) □

Zadaci za vježbu.

1. Je li sljedeći graf planaran?



   Rješenje: Jest.

2. Je li graf K_6 planaran?

   Rješenje: Nije. Kad bi bio, iz $v = 6$ i $e = 15$ slijedilo bi $f = 11$. Svaka strana je omeđena s barem 3 brida, a svaki brid omeđuje najviše dvije strane, pa bi moralo biti $3f \leq 2e$, tj. $33 \leq 30$, što nije istina.