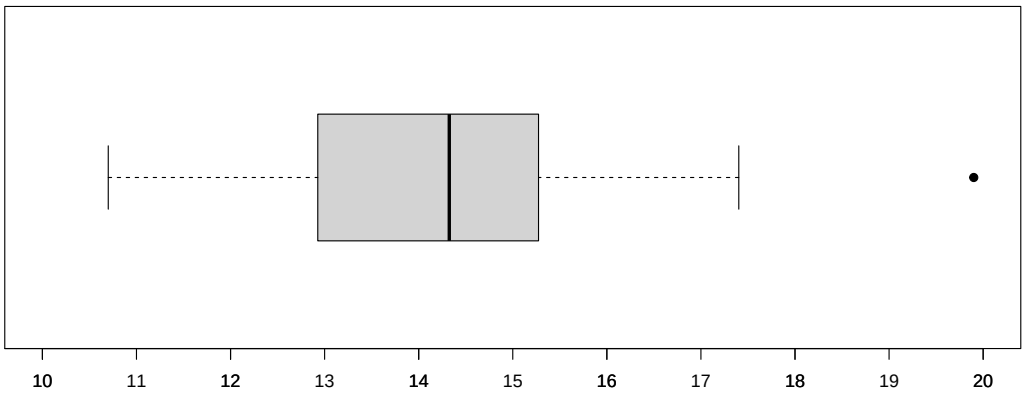
JMBAG IME I PREZIME BROJ BODOVA

STATISTIKA

Prvi kolokvij – 19. studenog 2025.

- Dozvoljeno je koristiti samo pribor za pisanje i brisanje, te kalkulator.

Zadatak 1. Morski biolog proučava vrstu mladih riba. Skupio je uzorak od 100 riba i izmjerio duljinu (u mm) njihove glavne leđne peraje. Podaci su sažeti u sljedećem dijagramu pravokutnika (boxplotu):



Odgovorite na sljedeća pitanja te **obrazložite svoj odgovor**. Oznaka **T** je za **točnu** tvrdnju, **N** je za **netočnu** tvrdnju, a **X** je za tvrdnju koju čiju točnost ne možemo provjeriti na temelju dijagramaj (tj., koja može i ne mora vrijediti za ove podatke).

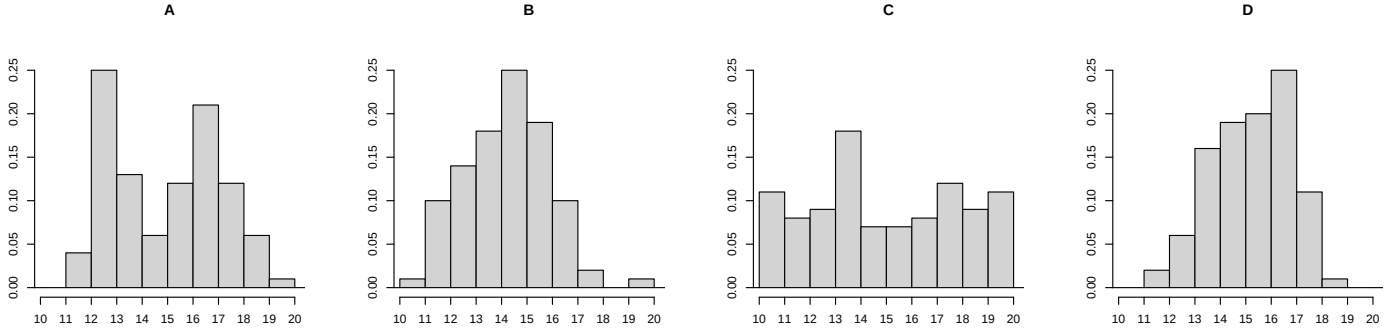
(a) (2 boda) Mod podataka je između 14 i 15. **T** **N** **X**

(b) (2 boda) Barem 50 riba ima leđnu peraju dulju od 13 mm, a kraću od 15 mm. **T** **N** **X**

(c) (2 boda) Najviše 50 riba ima leđnu peraju kraću od 14 mm. **T** **N** **X**

(d) (2 boda) Postoje više od dva outliera. **T** **N** **X**

(2 boda) Koji od histograma odgovara distribuciji sa slike? Zaokružite slovo i **obrazložite**!



JMBAG IME I PREZIME BROJ BODOVA

STATISTIKA

Prvi kolokvij – 19. studenog 2025.

Zadatak 2. U laboratoriju se istražuje otpornost četiriju različitih sojeva bakterija na novu vrstu antibiotika. Nakon izlaganja standardiziranoj dozi antibiotika, znanstvenici broje novonastale rezistentne kolonije u svakom uzorku. Zajednička distribucija vjerojatnosti za soj bakterije (X) i broj novih rezistentnih kolonija (Y) prikazana je u tablici.

$X \setminus Y$	0	1	2
E. coli	0.11	0.15	0.04
Salmonela	0.08	p	0.06
Listerija	0.10	0.12	0.03
Zlatni stafilokok	0.07	0.09	0.05

(a) (2 boda) Varijabla X je tipa:
(i) kategorijska ordinalna; (ii) kategorijska nominalna;
(iii) numerička diskretna; (iv) numerička neprekidna.

Varijabla Y je tipa:
(i) kategorijska ordinalna; (ii) kategorijska nominalna;
(iii) numerička diskretna; (iv) numerička neprekidna.

(b) (2 boda) Vrijednost nepoznatog parametra p iz tablice je _____.

(c) (2 boda) Kolika je vjerojatnost da nasumično odabrani uzorak pripada soju **Listerija** i ima **barem jednu** rezistentnu koloniju? _____.

(d) (2 boda) Koliki je očekivani broj rezistentnih kolonija po uzorku? _____.

(e) (2 boda) Koji je najčešći broj rezistentnih kolonija u promatranim uzorcima? _____.

Napomena: Sve odgovore osim (a) morate obrazložiti, samo rješenje bez postupka neće se bodovati.

JMBAG | IME I PREZIME | BROJ BODOVA

STATISTIKA

Prvi kolokvij – 19. studenog 2025.

Zadatak 3. Misteriozni virus `X` napada populaciju pasa, te je poznato da 7% pasa koji imaju gen `Z` zaraženo, dok je 4% pasa koji nemaju gen `Z` zaraženo. Gen `Z` ima 25% pasa.

(a) Koja je vjerojatnost da je slučajno odabrani pas zaražen virusom `X`?

(b) Ako znamo da je slučajno odabrani pas zaražen, koja je vjerojatnost da ima gen `Z`?

(c) Zbog masovne histerije, u veterinarsku postaju došlo je 15 pasa. Koju distribuciju ima slučajna varijabla koja promatra ukupan broj zaraženih pasa među tih 15 pasa?

(d) Koja je vjerojatnost da među 15 pasa iz podzadatka (c) ima više od 2 zaražena?

(e) Nakon što je histerije nestalo, nije bilo masovnih dolazaka pasa u veterinarsku postaju, te su psi dolazili jedan po jedan. Pretpostavljamo da su svi dolasci međusobno nezavisni. Od početka radnog vremena, koliko će pasa u prosjeku u postaji pregledati prije nego im dođe jedan pas koji je zaražen virusom `X` (računajući i tog zaraženog psa)?

JMBAG IME I PREZIME BROJ BODOVA

STATISTIKA

Prvi kolokvij – 19. studenog 2025.

Zadatak 4. U jezeru *Guntek* se sumnja na prisutnost kožnog parazita kod lokalne vrste žaba. Prema ranijim istraživanjima, vjerojatnost da jedna slučajno odabrana žaba nosi parazita je 8%. Pretpostavimo da su žabe zaražene nezavisno jedna od druge.

(a) Izračunajte očekivani broj i varijancu broja zaraženih žaba u slučajnom uzorku duljine 200.

(b) Koji je očekivani udio zaraženih žaba u slučajnom uzorku duljine 200?

(c) Aproksimirajte vjerojatnost da će u uzorku duljine 200 biti između 65 i 90 zaraženih žaba.

U svrhu liječenja kolonije žaba u jezero je uvedena probiotička bakterija *Janthinobacterium*. Nakon liječenja kolonije znanstvenici su zaključili da se u cijelom jezeru nalazi još samo 15 zaraženih žaba. Za potrebe našeg istraživanja ogradili smo dio jezera u kojem živi 10% populacije žaba.

(d) Koja je distribucija slučajne varijable koja mjeri broj zaraženih žaba u ograđenom dijelu jezera?

(e) Kolika je vjerojatnost da se u ograđenom dijelu jezera ne nalazi niti jedna zaražena žaba?

JMBAG IME I PREZIME BROJ BODOVA

STATISTIKA

Prvi kolokvij – 19. studenog 2025.

Zadatak 5. Masa odraslog hrasta kitnjaka normalno je distribuirana s očekivanom masom od 15 tona, i standardnom devijacijom od 2 tone.

(a) Skicirajte graf gustoće masa hrasta. Na njemu jasno označite očekivanu vrijednost i maksimalnu vrijednost koju gustoća postiže.



(b) Koja je vjerojatnost da slučajno odabrani hrast ima masu između 13 i 17 tona?

(c) Naišli smo na fascinantan primjerak hrasta te smo sigurni da mu je masa veća od 15 tona. Ako to znamo, koja je vjerojatnost da je masa veća čak od 20 tona?

(d) Lopov je ukrao 5 slučajno odabranih drveta hrasta. Kolika je ukupna očekivana masa tih ukradenih drva? A standardna devijacija?

Formule iz Statistike

Neke razdiobe i njihova svojstva

1. $X \sim B(p)$: $\mathbf{E}(X) = p$, $\mathrm{Var}(X) = p(1-p)$

2. $X \sim B(n,p)$: $\mathbf{E}(X) = np$, $\mathrm{Var}(X) = np(1-p)$

3. $X \sim G(p)$: $\mathbf{E}(X) = \frac{1}{p}$, $\mathrm{Var}(X) = \frac{1-p}{p^2}$

4. $X \sim P(\lambda)$: $\mathbf{E}(X) = \lambda$, $\mathrm{Var}(X) = \lambda$

$$P(X = k) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

5. $X \sim N(\mu, \sigma^2)$: $\mathbf{E}(X) = \mu$, $\mathrm{Var}(X) = \sigma^2$
- funkcija gustoće:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Očekivanje i varijanca

Očekivanje diskretne slučajne variable X:

$$\mu = \mathbf{E}(X) = \sum_i x_i P(X = x_i)$$

Varijanca diskretne slučajne variable X:

$$\sigma^2 = \mathrm{Var}(X) = \sum_i (x_i - \mu)^2 P(X = x_i)$$

Svojstva očekivanja i varijance

$$\mathbf{E}(aX + bY) = a\mathbf{E}(X) + b\mathbf{E}(Y)$$
$$\mathrm{Var}(X) = \mathbf{E}(X^2) - [\mathbf{E}(X)]^2$$
$$\mathrm{Var}(aX + b) = a^2 \mathrm{Var}(X)$$
$$X \text{ i } Y \text{ su nezavisne } \implies \mathbf{E}(XY) = \mathbf{E}(X)\mathbf{E}(Y)$$
$$X \text{ i } Y \text{ su nezavisne } \implies \mathrm{Var}(X + Y) = \mathrm{Var}(X) + \mathrm{Var}(Y)$$