21.1.2020.

Parcijalne diferencijalne jednadžbe 1

1. (10) Riješite sljedeći problem metodom karakteristika

$$\begin{cases} xu_x + yu_y = u + 1, \\ u(x,y) = x^2, & \text{za } y = x^2 \end{cases}$$

2. (15) Izvedite formulu za rješenje rubne zadaće

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & \text{na } \Omega \\ u = g, & \text{na } \partial\Omega \end{cases}$$

gdje je $\Omega = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_2 - x_1 > 0\}$ i $g(x_1, x_2) = \chi_{K(0,1)}(x_1, x_2)$.

3. (10) Izvedite formulu za rješenje zadaće

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = f, & \text{na } \mathbb{R}^2 \times \langle 0, \infty \rangle \\ u(\cdot, 0) = g, & \text{na } \mathbb{R}^2 \times \{t = 0\}, \end{cases}$$

gdje je $f(x_1, x_2, t) = 2t - 1$ i $g(x_1, x_2) = 2\cos^2 x_1$.

4. (10) Odredite rješenje početne zadaće

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} - 2xu_x - (1 + x^2)u = 0, & \text{na } \mathbb{R} \times \langle 0, \infty \rangle \\ u(x, 0) = e^{-\frac{1}{2}x^2}, & \text{na } \mathbb{R} \times \{t = 0\}, \end{cases}$$

Uputa: Uvedite pomoćnu funkciju $v(x,t) = \phi(x,t)u(x,t)$ (Φ odredite na prigodan način) koja će zadovoljavati jednadžbu provođenja.

5. (5+10) Neka je $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ glatko rješenje početne zadaće

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0, & \text{na } \mathbb{R} \times \langle 0, \infty \rangle \\ u(\cdot, 0) = g, & \text{na } \mathbb{R} \times \{t = 0\} \\ u_t(\cdot, 0) = h, & \text{na } \mathbb{R} \times \{t = 0\}. \end{cases}$$

Pretpostavimo dodatno da su $g, h \in C_c^\infty(\mathbb{R})$. Definiramo kinetičku energiju $k(t) := \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} u_t^2(x,t)dx$ i potencijalnu energiju $p(t) = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} u_x^2(x,t)dx$. Dokažite:

a) $k(t) + p(t)$ je konstanta.

b) $k(t) = p(t)$ za dovoljno velike t.

Rješenja

1. Iz zadatka iščitavamo: $a(x,y,z) = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$, $b(x,y,z) = z+1$, te $S = \{(s,s^2) : s \in \mathbb{R}\}$.

   Normala na S u točki (s,s^2) dana je s $n(s) = \begin{bmatrix} -2s \\ 1 \end{bmatrix}$. Prvo provjeravamo postoje li karakteristične točke:

$$\begin{aligned} a(s,s^2,u(s,s^2)) \cdot n(s) &= 0 \\ \iff \begin{bmatrix} s \\ s^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -2s \\ 1 \end{bmatrix} &= 0 \\ \iff -2s^2 + s^2 &= 0 \\ \iff s = 0. \end{aligned}$$

   Zaključujemo da je jedina karakteristična točka $(0,0)$. Za $s \neq 0$ rješavamo pripadni sustav ODJ:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x \\ \frac{dy}{dt} = y \\ \frac{dz}{dt} = z+1 \\ x(0) = s \\ y(0) = s^2 \\ z(0) = s^2 \end{cases}$$

   Rješenje ovog sustava je dano s:

$$\begin{cases} x(t;s) = se^t \\ y(t;s) = s^2e^t \\ z(t;s) = (s^2+1)e^t - 1 \end{cases}$$

   Primijetimo ovdje da za točku $(0,0)$ ne postoji karakteristika koja prolazi kroz nju osim trivijalne. Sada za $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ pokušavamo pronaći t i s takve da vrijedi

$$\begin{cases} x = se^t \\ y = s^2e^t \end{cases}$$

   Primijetimo da za točke koje se nalaze na koordinatnim osima ne postoje odgovarajuće karakteristike (uvrštavanjem 0 za x ili y automatski slijedi da i drugi mora biti jednak 0). Također, kako je izraz $s^2e^t \geq 0$, vidimo da ni za točke čija je y-koordinata manja od 0 nemamo rješenje. Za sve preostale točke, odgovarajući t i s su dani s $t = \ln \frac{x^2}{y}$ i $s = \frac{y}{x}$. Rješenje dobivamo uvrštavanjem t i s u izraz za z:

$$u(x,y) = \left(\frac{y^2}{x^2} + 1\right)e^{\ln \frac{x^2}{y}} - 1 = \frac{x^2}{y} + y - 1$$

Iz ovako dobivene formule vidimo da rješenje ima smisla i za točke kojima je y-koordinata negativna, kao i za točke za koje je $x = 0$ (osim ishodišta).

2. Označimo s O matricu rotacije ravnine za kut $-\frac{\pi}{4}$, te uvedimo funkciju $v(x) = u(Ox)$. Prema zadatku s vježbi, v također zadovoljava Laplaceovu jednadžbu, dok početni uvjet, zbog invarijantnosti funkcije g na rotacije, ostaje isti. Dakle, transformirana zadaća je:

$$\begin{cases} \Delta v = 0, & \text{na } \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+, \\ v(x_1, 0) = \chi_{[-1,1]}(x_1), & \text{na } \mathbb{R} \times \{0\}. \end{cases}$$

Vanjska normala na rub je dana s $n(y_1, 0) = (0, -1)$, pa nam je jedino potrebno izračunati $\frac{\partial G}{\partial y_2}$. Rješenje gornjeg problema je onda dano formulom

$$v(x_1, x_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial G}{\partial y_2}(x_1, x_2, y_1, 0)\chi_{[-1,1]}(y_1) dy_1 = \int_{-1}^{1} \frac{\partial G}{\partial y_2}(x_1, x_2, y_1, 0) dy_1$$

Greenova funkcija za gornju poluravninu je dana s

$$G(x_1, x_2, y_1, y_2) = -\frac{1}{4\pi}\Big(\ln[(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2] - \ln[(y_1 - x_1)^2 + (y_2 + x_2)^2] \Big).$$

Deriviranjem po y_2 te uvrštavanjem $y_2 = 0$ dobivamo

$$\frac{\partial G}{\partial y_2}(x_1, x_2, y_1, 0) = \frac{1}{\pi} \frac{x_2}{(y_1 - x_1)^2 + x_2^2}.$$

Uvrštavanjem u formulu za rješenje slijedi

$$v(x_1, x_2) = \frac{x_2}{\pi} \int_{-1}^{1} \frac{dy_1}{(y_1 - x_1)^2 + x_2^2} = \frac{1}{\pi}\left(\arctan\left(\frac{1 - x_1}{x_2}\right) + \arctan\left(\frac{1 + x_1}{x_2}\right)\right)$$

Preostaje još iskoristiti $u(x_1, x_2) = v(O^T(x_1, x_2)) = v\big(\frac{\sqrt{2}}{2}(x_1 + x_2, -x_1 + x_2)\big)$.

Napomena: Zadatak je bilo moguće riješiti i direktno, radeći refleksiju preko pravca $x_2 = x_1$, ali na taj način zadatak postaje računski daleko kopmliciraniji.

3. Rješenje zadaće je dano s

$$u(x, t) = \int_{\mathbb{R}^2} \Phi(x - y, t) g(y) dy + \int_0^t \int_{\mathbb{R}^2} \Phi(x - y, t - s) f(y, s) dy ds$$

Računamo prvi integral:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \Phi(x - y, t) g(y) dy = \int_{\mathbb{R}^2} \Phi(x - y, t) 2\cos^2 y_1 dy_1 dy_2$$

$$= \left(\int_{\mathbb{R}} \Phi(x_1 - y_1, t) \cos(2y_1) dy_1 \right)\left(\int_{\mathbb{R}} \Phi(x_2 - y_2, t) dy_2 \right) + \int_{\mathbb{R}^2} \Phi(x - y, t) dy$$

$$= \cos(2x_1)e^{-4t} + 1,$$

gdje prvi integral računamo kao na vježbama, a drugi i treći su 1 po svojstvu elementarnog rješenja (ovdje Φ označava el. rješenje u odgovarajućoj dimenziji). Računamo drugi integral:

$$\int_0^t \int_{\mathbb{R}^2} \Phi(x-y, t-s) f(y,s) dyds = \int_0^t \int_{\mathbb{R}^2} \Phi(x-y, t-s)(2s-1) dyds$$

$$= \int_0^t (2s-1) ds = t^2 - t,$$

ponovno koristeći svojstvo elementarnog rješenja i činjenicu da f ne ovisi o y. Konačno rješenje je $u(x,t) = \cos(2x_1)e^{-4t} + t^2 - t + 1$.

4. Stavimo $v(x,t) = e^{cx^2}u(x,t)$ (razlog za ovakav odabir je izgled naše jednadžbe; x uz derivacije nižeg reda možemo dobiti deriviranjem ovakve funkcije). Cilj je odrediti c takav da v zadovoljava jednadžbu provođenja. Imamo da je $v_t = e^{cx^2}u_t$ te $v_{xx} = e^{cx^2}(u_{xx} + 2cxu_x + (2c + 4c^2x^2)u)$. Usporedbom s jednadžbom vidimo da treba uzeti $c = \frac{1}{2}$. Funkcija v sada rješava sljedeću zadaću:

$$\begin{cases} v_t - v_{xx} = 0, & \text{na } \mathbb{R} \times \langle 0, \infty \rangle, \\ v(\cdot, 0) = 1 & \text{na } \mathbb{R} \times \{0\}. \end{cases}$$

Uvrštavanjem u formulu za rješenje dobivamo

$$v(x,t) = \int_{\mathbb{R}} \Phi(x-y, t) dy = 1.$$

Rješenje početnog problema u je onda

$$u(x,t) = e^{-\frac{1}{2}x^2} v(x,t) = e^{-\frac{1}{2}x^2}.$$

5. Prema D'Alembertovoj formuli, rješenje u je dano s $u(x,t) = \frac{g(x+t)+g(x-t)}{2} + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} h(y)dy$. Primijetimo prvo kako je za fiksno $t > 0$ funkcija $x \mapsto u(x,t)$ ima kompaktan nosač (treba biti oprezan, u kao funkcija na $\mathbb{R} \times \langle 0, \infty \rangle$ ne mora imati). To slijedi direktno iz gornje formule; za dovoljno velike x je $[x-t, x+t] \cap (supp\ g \cup supp\ h)) = \emptyset$ (uz fiksno t). Zbog ovoga i funkcije $x \mapsto u_t(x,t)$ i $x \mapsto u_x(x,t)$ imaju također kompaktan nosač. Posebno, opravdano je deriviranje pod integralom i parcijalna integracija nema rubni član pa imamo:

$$(k+p)'(t) = \int_{\mathbb{R}} u_t u_{tt} dx + \int_{\mathbb{R}} u_x u_{xt} dx \overset{\text{P.I.}}{=} \int_{\mathbb{R}} u_t(u_{tt} - u_{xx}) dx \overset{valna}{=} 0.$$

Ovime je a) pokazano. Za b) dio zadatka koristimo ponovno D'Alembertovu formulu. Deriviranjem po x, odnosno po t, dobijemo sljedeće izraze:

$$u_x(x,t) = \frac{1}{2}[g'(x+t) + g'(x-t)] + \frac{1}{2}[h(x+t) - h(x-t)],$$

$$u_t(x,t) = \frac{1}{2}[g'(x+t) - g'(x-t)] + \frac{1}{2}[h(x+t) + h(x-t)].$$

Računamo:

$$p(t) - k(t) = \int_{\mathbb{R}} (u_x^2 - u_t^2) dx = \int_{\mathbb{R}} (u_x - u_t)(u_x + u_t) dx$$

$$= \int_{\mathbb{R}} [g'(x-t) - h(x-t)][g'(x+t) + h(x+t)] dx.$$

Ponovno, zbog kompaktnosti nosača od g i h, za dovoljno veliki t je za svaki x jedna od točaka $x-t$ i $x+t$ izvan nosača i od g i od h, pa je za takve t uvijek jedan od faktora jednak 0. Za vidjeti ovo uzmimo da je $(supp\ g \cup supp\ h) \subseteq [-a, a]$ za neki $a > 0$, te stavimo $t_0 = 3a$ (korisno je i nacrtati si sliku). Za $t \geq t_0$ onda vrijedi $k(t) = p(t)$.