KOMPLEKSNA ANALIZA
Rješenja zadataka za vježbu br. 2
2020./2021.

1. Odredite podskup kompleksne ravnine određen sa:

(a) $|z-1| < |z-i|$

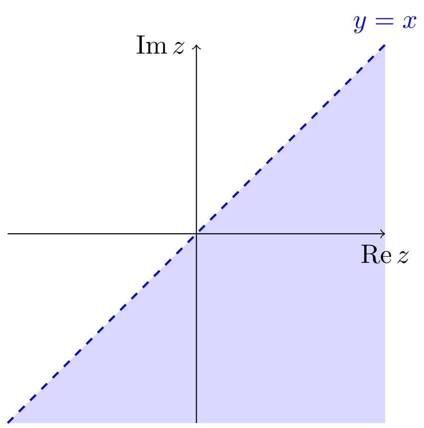
(b) $|z-3| - |z+3i| = 5$

(c) $4 < |z-1| + |z+1| < 8.$

Rješenje. (a) Uz $z = x + iy$ i iz definicije apsolutne vrijednosti kompleksnog broja dobivamo:

$$\begin{aligned} \sqrt{(x-1)^2+y^2} &< \sqrt{x^2+(y-1)^2} \quad \Big|^2 \\ (x-1)^2+y^2 &< x^2+(y-1)^2 \\ x^2-2x+1+y^2 &< x^2+y^2-2y+1 \\ 2y-2x &< 0 \\ y &< x \end{aligned}$$

Dakle, početnom jednadžbom dan je skup:



(b) Uočimo, zbog obrnute nejednakosti trokuta ($|z-w| \geq |z| - |w|$), za proizvoljni $z \in \mathbb{C}$, imamo

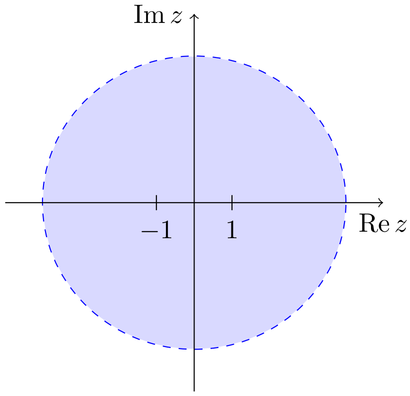
$$\begin{aligned} 3\sqrt{2} = |3+3i| = |(z+3i)-(z-3)| &= |(z-3)-(z+3i)| \\ &\geq |z-3| - |z-3i| = 5 \end{aligned}$$

Kako je $3\sqrt{2} < 5$, gornja relacija daje kontradikciju, pa zaključujemo da ne postoji $z \in \mathbb{C}$ koji zadovoljava početnu relaciju, odnosno, traženi skup je prazan.

(c) Raspisujemo dvije nejednadžbe. Uz $z = x + iy$ i iz definicije apsolutne vrijednosti kompleksnog broja dobivamo:

$$\begin{aligned}
\sqrt{(x-1)^2+y^2}+\sqrt{(x+1)^2+y^2} &< 8 \\
\sqrt{(x-1)^2+y^2} &< 8-\sqrt{(x+1)^2+y^2} \quad \Big|^2 \\
x^2-2x+1+y^2 &< 64-16\sqrt{(x+1)^2+y^2}+x^2+2x+1+y^2 \\
16\sqrt{(x+1)^2+y^2} &< 4x+64 \\
4\sqrt{(x+1)^2+y^2} &< x+16 \quad \Big|^2 \\
16(x^2+2x+1)+16y^2 &< x^2+32x+256 \\
15x^2+16y^2 &< 240 \\
\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{15} &< 1
\end{aligned}$$

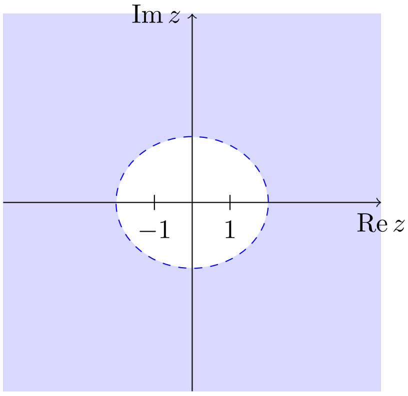
Dakle, ova nejednadžba opisuje unutrašnjost elipse sa središtem u ishodištu, poluosima $a = 4$ i $b = \sqrt{15}$, dok žarišta ispadnu točke ± 1. Drugim riječima, nejednadžba opisuje skup:



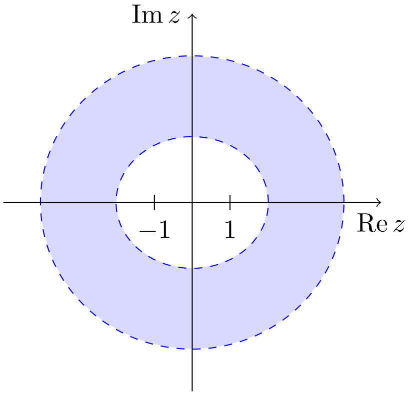
Raspišimo sada i drugu nejednadžbu:

$$\begin{aligned}
\sqrt{(x-1)^2+y^2}+\sqrt{(x+1)^2+y^2} &> 4 \quad \Big|^2 \\
(x-1)^2+(x+1)^2+2y^2+2\sqrt{((x-1)^2+y^2)((x+1)^2+y^2)} &> 16 \\
2\sqrt{((x-1)^2+y^2)((x+1)^2+y^2)} &> 14-2x^2-2y^2 \\
\sqrt{((x-1)^2+y^2)((x+1)^2+y^2)} &> 7-x^2-y^2 \quad \Big|^2 \\
((x-1)^2+y^2)((x+1)^2+y^2) &> 49+x^4+y^4-14x^2-14y^2+2x^2y^2 \\
(x-1)^2(x+1)^2+(x-1)^2y^2+(x+1)^2y^2+y^4 &> 49+x^4+y^4-14x^2-14y^2+2x^2y^2 \\
(x^2-1)^2+y^2(x^2-2x+1)+y^2(x^2+2x+1) &> 49+x^4-14x^2-14y^2+2x^2y^2 \\
x^4-2x^2+1+x^2y^2-2xy^2+y^2+x^2y^2+2xy^2+y^2 &> 49+x^4-14x^2-14y^2+2x^2y^2 \\
12x^2+16y^2 &> 48 \\
\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3} &> 1
\end{aligned}$$

Dakle, dobili smo skup izvan elipse sa središtem u 0, s poluosima $a = 2$ i $b = \sqrt{3}$, odnosno:



Konačno rješenje je presjek ova dva skupa, odnosno:



Napomena. U prvoj nejednadžbi smo prebacili jedan korijen na desnu stranu prije kvadriranja zbog jednostavnosti računa. Kako je zbroj dva korijena manji od 8, svaki od njih je manji od 8, pa je desna (naravno, i lijeva) strana pozitivna i smijemo kvadrirati. U drugoj nejednadžbi to ne možemo napraviti jer oba korijena mogu biti veća od 4, pa nakon prebacivanja možemo imati jednu stranu manju od nule.

2. Koje su krivulje u kompleksnoj ravnini određene jednadžbama:

(a) $z(t) = a + (b - a)t, \quad ,0 \leq t \leq 1, \quad a, b \in \mathbb{R}$

(b) $z(t) = z_0 + (z_1 - z_0)t, \quad 0 \leq t \leq 1, \quad z_0, z_1 \in \mathbb{C}$

(c) $z(t) = Re^{it}, \quad 0 \leq t \leq \pi, \quad R > 0$

(d) $z(t) = t + it^2, \quad 0 \leq t \leq \infty$

(e) $z(t) = t + \frac{i}{t}, \quad 1 \leq t \leq \infty.$

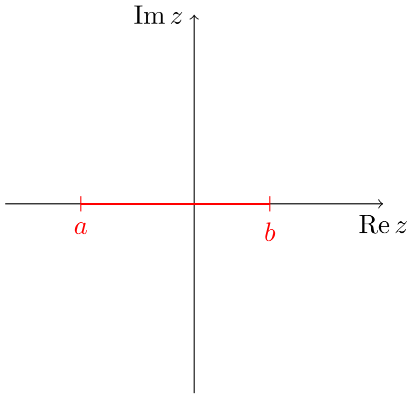
Rješenje. (a) Prisjetimo se, najjednostavnija parametrizacija dužine koja spaja točke a i b u ravnini glasi

$$z(t) = (1 - t)a + tb, \quad 0 \leq t \leq 1$$

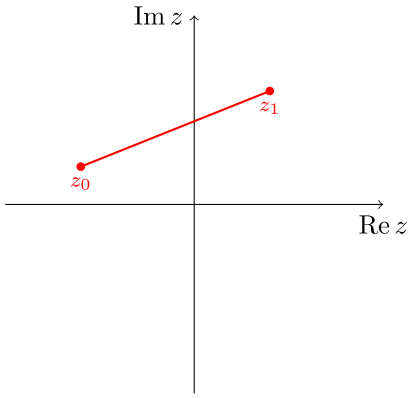
Ako ovaj izraz malo preformuliramo, dobivamo

$$z(t) = a + (b - a)t, \quad 0 \leq t \leq 1$$

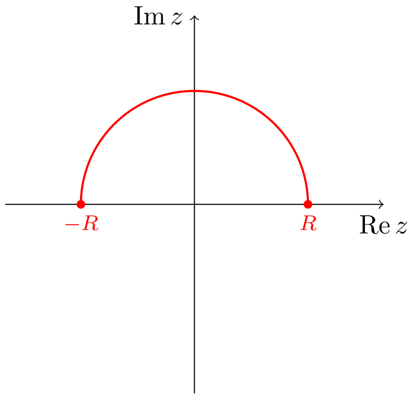
Dakle, zaključujemo da je riječ o dužini koja spaja točke a i b. Kako su $a, b \in \mathbb{R}$, ta dužina nalazi se na realnoj osi. Skica izgleda otprilike ovako:



(b) Potpuno analogno kao u prethodnom podzadatku,riječ je o dužini koja spaja toče z_0 i z_1, jedino što u ovom slučaju su te točke proizvoljni kompleksni brojevi, ne nužno na realnoj osi.



(c) Prisjetimo se, $e^{it} = \cos t + i \sin t$. U ambijentu realne ravnine, imamo, $e^{it} = (\cos t, \sin t)$ što je parametrizacija jedinične kružnice sa središtem u ishodištu.
Odavde lako zaključujemo da je $z(t) = (R\cos t, R\sin t)$ parametrizacija kružnice sa središtem u ishodištu radijusa R.
Preostaje samo uzeti u obzir zadani interval koji ide od 0 do π, pa se lako vidi da je riječ o gornjoj polukružnici, odnosno:



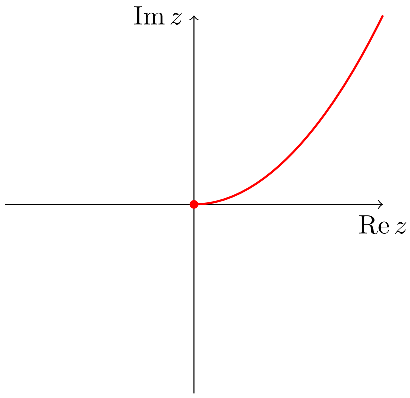
(d) Prevođenjem zapisa iz $\mathbb{C}$ u $\mathbb{R}^2$ dobivamo

$$z(t) = t + it^2 = (t, t^2), \quad 0 \leq t \leq \infty$$

Uočimo, prva koordinata je obični izraz t, dok drugu koordinatu možemo interpretirati kao funkciju od t, konkretno, možemo pisati

$$z(t) = (t, t^2) = (t, f(t))$$

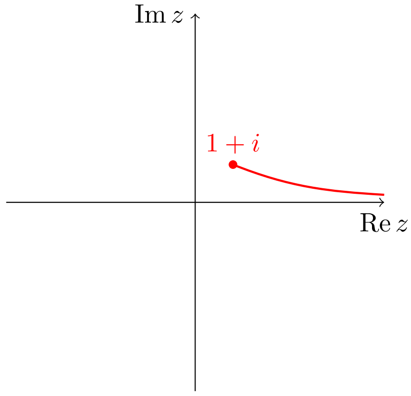
pri čemu je $f(t) = t^2$.
No, ovo je ništa drugo nego graf funkcije $f(x) = x^2$ (odnosno, u našem slučaju umjesto x varijablu označavamo s t). Uzevši u obzir interval u kojem se t nalazi, zapravo dobivamo jedan krak parabole, odnosno:



(e) Potpuno analogno kao u prethodnom zadatku, zadana krivulja se može zapisati kao

$$z(t) = (t, \frac{1}{t}) = (t, f(t)), \quad f(t) = \frac{1}{t}, \quad 1 \leq t \leq \infty$$

Dakle, riječ je o dijelu grafa funkcije $f(x) = \frac{1}{x}$.



3.* Neka su $z_1, z_2, ..., z_n$, vrhovi pravilnog n-terokuta upisanog u kružnicu $\{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ te z bilo koja točka te kružnice. Dokažite da vrijedi

$$\sum_{k=1}^{n} |z - z_k|^2 = 2n.$$

Rješenje. Uvedimo oznake: $z = x + iy$, $z_k = x_k + iy_k$, $k \in \{1, 2, ..., n\}$. Po uvjetu zadatka imamo $x^2 + y^2 = x_k^2 + y_k^2 = 1$, za sve k. Također, bez smanjenja općenitosti možemo uzeti da je z_1 točka s najmanjim argumentom i označimo s $\varphi = \arg z_1$. Imamo

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} |z - z_k|^2 &= \sum_{k=1}^{n} \left((x - x_k)^2 + (y - y_k)^2\right) = \sum_{k=1}^{n} \left(x^2 - 2xx_k + x_k^2 + y^2 - 2yy_k + y_k^2\right) \\ &= \sum_{k=1}^{n} (x^2 + y^2) + \sum_{k=1}^{n} (x_k^2 + y_k^2) - 2x \sum_{k=1}^{n} x_k - 2y \sum_{k=1}^{n} y_k \\ &= 2n - 2x \sum_{k=1}^{n} x_k - 2y \sum_{k=1}^{n} y_k\end{aligned}$$

Dakle, dovoljno je pokazati

$$\sum_{k=1}^{n} x_k = \sum_{k=1}^{n} y_k = 0$$

Naravno, za to je dovoljno pokazati da je

$$\sum_{k=1}^{n} z_k = 0.$$

Primijetimo, kako smo uzeli da je $\arg z_1 = \varphi$ i kako smo (bez smanjena općenitosti) uzeli da je z_1 točka s najmanjim argumentom, dok ostali vrhovi mnogokuta slijede redom u smjeru obrnutom od kazaljke na satu, zaključujemo

$$\arg z_k = \varphi + \frac{2(k-1)\pi}{n}, \quad k \in \{1, ..., n\}$$

Kako su točke z_k na jediničnoj kružnici, možemo pisati

$$z_k = e^{i\left(\varphi + \frac{2(k-1)\pi}{n}\right)} = e^{i\varphi} \cdot e^{\frac{2(k-1)\pi i}{n}}, \quad k \in \{1, ..., n\}$$

Napokon, ključno je primijetiti da vrijedi

$$\arg z_{k+1} = \arg z_k + \frac{2\pi}{n}, \quad k \in \{1, ..., n-1\}$$

iz čega zaključujemo da je

$$z_{k+1} = z_k \cdot e^{\frac{2\pi i}{n}}, \quad k \in \{1, ..., n-1\}.$$

Drugim riječima, niz $z_1, ..., z_n$ je geometrijski pa ga možemo zapisati kao

$$e^{i\varphi}, \quad e^{i\varphi} \cdot e^{\frac{2\pi i}{n}}, \quad e^{i\varphi} \cdot \left(e^{\frac{2\pi i}{n}}\right)^2, ..., \quad e^{i\varphi} \cdot \left(e^{\frac{2\pi i}{n}}\right)^{n-1}$$

Koristeći formulu za sumu geometrijskog niza $\left(1 + q + q^2 + ... + q^n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}\right)$, dobivamo

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} z_k &= e^{i\varphi}\left(1 + e^{\frac{2\pi i}{n}} + \left(e^{\frac{2\pi i}{n}}\right)^2 + ... + \left(e^{\frac{2\pi i}{n}}\right)^{n-1}\right) \\
&= e^{i\varphi} \cdot \frac{1 - \left(e^{\frac{2\pi i}{n}}\right)^n}{1 - e^{\frac{2\pi i}{n}}} = e^{i\varphi} \cdot \frac{1 - e^{2\pi i}}{1 - e^{\frac{2\pi i}{n}}} \\
&= 0
\end{aligned}$$

jer je $e^{2\pi i} = 1$.

4.* Ako vrijedi $z_1 + z_2 + z_3 = 0$, $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$, pokažite da su točke z_1, z_2, z_3 vrhovi jednakostraničnog trokuta upisanog u jediničnu kružnicu.

Rješenje. Uočimo da z_1, z_2 i z_3 čine vrhove nekog trokuta upisanog u jediničnu kružnicu. Naime, eventualni problem bi bio da su te točke kolinearne, ali to je nemoguće ako su te točke različite jer pravac siječe kružnicu u najviše dvije točke. Preostaje eliminirati slučaj jednakosti barem dvije od točaka. Kad bi npr. bilo $z_1 = z_2$, imali bismo $2z_1 = -z_3$ iz čega slijedi $2|z_1| = |z_3|$, ali tada ne može biti zadovoljen uvjet na module točaka. Napokon, kad bi sve tri točke bile jednake, iz prvog uvjeta nužno bi sve bile jednake nuli, ali tada ne štima uvjet s modulima.

Dakle, točke su različite i nekolinearne, pa čine vrhove trokuta koji je dodatno upisan u jediničnu kružnicu. Preostaje pokazati da je taj trokut jednakostraničan. Koristit ćemo zapis u ravnini $\mathbb{R}^2$ zbog jednostavnosti.

Prisjetimo se, za trokut kojem su vrhovi u točkama $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ i (x_3, y_3), njegovo težište $T(x_T, y_T)$ je dano s

$$x_T = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3} \quad \text{i} \quad y_T = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}$$

Imajući to na umu, iz uvjeta $z_1 + z_2 + z_3 = 0$ zaključujemo da je težište trokuta točka $(0, 0)$, ali ta točka se poklapa sa središtem trokutu opisane kružnice. Kako je središte opisane kružnice sjecište simetrala stranica, a težište sjecište dužina koje spajaju vrhove s polovištima nasuprotnih stranica, zaključujemo da se te dužine poklapaju (pravci koji sadrže te dužine prolaze kroz polovišta stranica i ishodište, a svaki pravac je jedinstveno određen s dvije točke), odnosno, konkretno, točka z_1 leži na simetrali stranice $\overline{z_2 z_3}$. Kako su sve točke na simetrali stranice jednako udaljene od pripadnih vrhova, zaključujemo da vrijedi $|z_1 z_2| = |z_1 z_3|$. No, isto rezoniranje vrijedi i za simetrale ostalih stranica i nasuprotne vrhove (zapravo, dovoljno je promotriti samo još jednu stranicu i vrh), pa je i npr. $|z_2 z_1| = |z_2 z_3|$. Drugim riječima, trokut je jednakostraničan.