KOMPLEKSNA ANALIZA
Rješenja zadataka za vježbu br. 3
2020./2021.

1. Provjerite u kojim su točkama sljedeće funkcije derivabilne:

(a) $f(z) = z^2 \cdot \overline{z}$

(b) $f(z) = z^2(z+1)$

(c) $f(z) = |z|\overline{z}$

(d) $f(z) = \overline{z}\,\mathrm{Im}\,z$

(e) $f(x+iy) = x^2y^2$

(f) $f(x+iy) = x^2 + iy^2$.

Rješenje. (a) Rastavimo najprije funkciju na realni i imaginarni dio:

$$\begin{aligned} f(z) &= z^2 \cdot \overline{z} = z \cdot |z|^2 = (x+iy)(x^2+y^2) = x^3 + xy^2 + iyx^2 + iy^3 \\ &= x^3 + xy^2 + i(y^3 + x^2y) \end{aligned}$$

Dakle,

$$u(x,y) = x^3 + xy^2, \quad v(x,y) = y^3 + x^2y$$

Sada tražimo parcijalne derivacije:

$$\partial_x u(x,y) = 3x^2 + y^2, \quad \partial_y u(x,y) = 2xy$$

$$\partial_x v(x,y) = x^2, \quad \partial_y v(x,y) = 3y^2 + x^2$$

Iz CR uvjeta dobivamo sustav:

$$\begin{cases} 3x^2 + y^2 = 3y^2 + x^2 \\ 2xy = -x^2 \end{cases}$$

Nakon jednostavnog sređivanja dobivamo:

$$\begin{cases} x^2 = y^2 \\ x(x+2y) = 0 \end{cases}$$

Iz druge jednadžbe vidimo da vrijedi $x = 0$ ili $x = -2y$. Ako je $x = 0$, zbog prve jednadžbe je nužno i $y = 0$, a ako je $x = -2y$, uvrštavanjem u prvu jednadžbu dobivamo $4y^2 = y^2$ čije jedino rješenje je $y = 0$, iz čega pak slijedi i da je $x = 0$. Dakle, funkcija je derivabilna jedino u $z = 0$ i imamo $f'(0) = \partial_x u(0,0) + i\partial_x v(0,0) = 0$.

(b) Funkcije $g(z) = z^2$ i $h(z) = z + 1$ su derivabilne na cijelom $\mathbb{C}$ pa je i funkcija f derivabilna na cijelom $\mathbb{C}$ kao produkt derivabilnih funkcija. Derivacija je dana s

$$f'(z) = 3z^2 + 2z$$

(c) Rastavljamo funkciju na realni i imaginarni dio:

$$\begin{aligned} f(z) = |z|\overline{z} &= \sqrt{x^2+y^2}(x+iy) \\ &= x\sqrt{x^2+y^2} + iy\sqrt{x^2+y^2} \end{aligned}$$

Dakle, imamo

$$u(x,y) = x\sqrt{x^2+y^2}, \quad v(x,y) = y\sqrt{x^2+y^2}$$

Parcijalnim deriviranjem dobivamo

$$\begin{aligned} \partial_x u(x,y) &= \sqrt{x^2+y^2} + x \cdot \frac{1}{2}(x^2+y^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2x = \sqrt{x^2+y^2} + \frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{2x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ \partial_y u(x,y) &= x \cdot \frac{1}{2}(x^2+y^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2y = \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ \partial_x v(x,y) &= y \cdot \frac{1}{2}(x^2+y^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2x = \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ \partial_y v(x,y) &= \sqrt{x^2+y^2} + y \cdot \frac{1}{2}(x^2+y^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2y = \sqrt{x^2+y^2} + \frac{y^2}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{x^2+2y^2}{\sqrt{x^2+y^2}} \end{aligned}$$

Iz CR uvjeta dobivamo sustav:

$$\begin{cases} \frac{2x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{x^2+2y^2}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{-xy}{\sqrt{x^2+y^2}} \end{cases}$$

Uočimo najprije da parcijalne derivacije ne postoje u točki $(0,0)$. Nadalje, vidimo da su svi nazivnici u pitanju jednaki, pa ih možemo naprosto ignorirati (naravno, uz eliminaciju slučaja $x = y = 0$). Laganim sređivanjem sada dobivamo

$$\begin{cases} x^2 = y^2 \\ xy = 0 \end{cases}$$

Druga jednadžba vrijedi ako je $x = 0$ ili $y = 0$, a u oba slučaja uvrštavanjem u prvu jednadžbu dobivamo rješenje $(0,0)$ koje smo ranije eliminirali, pa je zaključak da funkcija nije nigdje derivabilna.

(d) Ponovo najprije određujemo realni i imaginarni dio:

$$f(z) = \overline{z}\,\mathrm{Im}\,z = (x-iy)y = xy - iy^2$$

Dakle, imamo

$$u(x,y) = xy, \quad v(x,y) = -y^2$$

Parcijalnim deriviranjem dobivamo

$$\partial_x u(x,y) = y, \quad \partial_y u(x,y) = x$$
$$\partial_x v(x,y) = 0, \quad \partial_y v(x,y) = -2y$$

Koristeći CR uvjete dobivamo jednostavni sustav:

$$\begin{cases} y = -2y \\ x = 0 \end{cases}$$

Jasno, jedino rješenje ovog sustava je $x = y = 0$, odnosno funkcija je derivabilna jedino u točki $z = 0$ i vrijedi $f'(0) = 0$.

(e) Iz same definicije funkcije je jasno da imamo

$$u(x,y) = x^2y^2, \quad v(x,y) = 0$$

Nadalje, parcijalnim deriviranjem dobivamo

$$\partial_x u(x,y) = 2xy^2, \quad \partial_y u(x,y) = 2x^2y$$
$$\partial_x v(x,y) = \partial_y v(x,y) = 0$$

CR uvjeti daju sustav

$$\begin{cases} 2xy^2 = 0 \\ 2x^2y = 0 \end{cases}$$

Iz prve (ili druge) jednadžbe dobivamo $x = 0$ ili $y = 0$, i uvrštavanjem u drugu jednadžbu dobivamo da ona vrijedi neovisno o x (ako smo uvrstili $y = 0$) ili y (ako smo uvrstili $x = 0$). Zaključujemo da je funkcija derivabilna na svim točkama oblika $(x, 0)$ i $(0, y)$, $x, y \in \mathbb{R}$, odnosno, funkcija je derivabilna na skupu

$$\{x : x \in \mathbb{R}\} \cup \{iy : y \in \mathbb{R}\}$$

(dakle, na koordinatnim osima).
Lako se vidi da je u svim tim točkama derivacija jednaka nuli.

(f) Odmah možemo iščitati realni i imaginarni dio:

$$u(x,y) = x^2, \quad v(x,y) = y^2$$

Parcijalnim deriviranjem dobivamo

$$\partial_x u(x,y) = 2x, \quad \partial_y u(x,y) = 0$$

$$\partial_x v(x,y) = 0, \quad \partial_y v(x,y) = 2y$$

Odavde se vrlo lako vidi da je CR uvjet $\partial_y u(x,y) = -\partial_x v(x,y)$ trivijalno zadovoljen, dok prvi CR uvjet vrijedi samo ako je $x = y = 0$. Dakle, f je derivabilna samo u $z = 0$ i $f'(0) = 0$.

2. Može li funkcija $u(x,y) = \ln(x^2 + y^2)$ biti realni dio neke derivabilne funkcije? Ako može, odredite tu funkciju.

Rješenje. Uočimo, realni dio funkcije $f(z) = 2\ln z$ je upravo funkcija u.

3. Može li funkcija $v(x,y) = e^x \sin y + y^2$ biti imaginarni dio neke derivabilne funkcije? Ako može, odredite tu funkciju.

Rješenje. Primijetimo da v nije harmonijska jer imamo:

$$\frac{\partial v}{\partial x}(x,y) = e^x \sin y, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(x,y) = e^x \sin y$$

$$\frac{\partial v}{\partial y}(x,y) = e^x \cos y + 2y, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}(x,y) = -e^x \sin y + 2$$

Odavde vidimo

$$\Delta v = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(x,y) + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}(x,y) = 2 \neq 0$$

Dakle, v nije harmonijska pa ne može ni biti imaginarni dio neke derivabilne funkcije.

4. Odredite (ako postoji) derivabilnu funkciju f kojoj je imaginarni dio $v(x,y) = 2x^2 - 2y^2 + x$.

Rješenje. Lako se vidi da funkcija v jest harmonijska i ovdje izostavljamo detalje. Odredimo parcijalne derivacije funkcije v.

$$\partial_x v(x,y) = 4x - 1$$

$$\partial_y v(x,y) = -4y$$

Iz CR uvjeta dobivamo parcijalne derivacije funkcije u:

$$\partial_x u(x,y) = -4y$$

$$\partial_y u(x,y) = -4x + 1$$

Možemo integrirati npr. prvu jednadžbu i dobivamo:

$$u(x,y) = \int \partial_x u(x,y)dx = \int -4ydx = -4xy + h(y)$$

pri čemu je h (derivabilna) funkcija koja ovisi samo o varijabli y.

Ako sada dobivenu funkciju u parcijalno deriviramo po varijabli y i usporedimo s drugim izrazom u gornjim uvjetima dobivamo:

$$-4x + h'(y) = -4x + 1$$

Odavde zaključujemo

$$h'(y) = 1 \quad \Longrightarrow \quad h(y) = \int 1dy = y + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

Dakle, dobili smo

$$u(x,y) = -4xy + y + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

Zaključujemo, derivabilne funkcije kojima je početna funkcija v imaginarni dio su oblika:

$$\begin{aligned} f(x+iy) &= -4xy + y + C + i(2x^2 - 2y^2 + x) \\ &= 2ix^2 - 2iy^2 + 4i^2xy + ix - i^2y + C \\ &= 2i(x^2 - y^2 + 2ixy) + i(x - iy) + C \\ &= 2i(x+iy)^2 + i(x-iy) + C \\ f(z) &= 2iz^2 + i\overline{z} + C \end{aligned}$$

5.* Neka je u harmonijska funkcija.

(a) Je li u^2 harmonijska funkcija?

(b) Za koje funkcije ψ je $\psi(u)$ harmonijska funkcija?

Rješenje. (a) Tvrdnja ne vrijedi. Uzmimo $u(x,y) = x$ što je očito harmonijska funkcija, dok funkcija $u^2(x,y) = x^2$ to očito nije.

(b) Trebamo naći funkcije $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takve da je za **proizvoljnu** harmonijsku funkciju u, funkcija $\psi(u)$ harmonijska. Odmah možemo uočiti, da bi imalo smisla promatrati druge derivacije funkcije $\psi(u)$, funkcija ψ sigurno mora biti barem dva puta derivabilna, tj. mora postojati ψ''. Promotrimo tražene parcijalne derivacije

$$\frac{\partial \psi(u)}{\partial x}(x,y) = \psi'(u(x,y)) \cdot \frac{\partial u}{\partial x}(x,y)$$

$$\frac{\partial^2 \psi(u)}{\partial x^2}(x,y) = \psi''(u(x,y)) \cdot \left(\frac{\partial u}{\partial x}(x,y)\right)^2 + \psi'(u(x,y)) \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,y)$$

Potpuno analogno, dobivamo

$$\frac{\partial^2 \psi(u)}{\partial y^2}(x,y) = \psi''(u(x,y)) \cdot \left(\frac{\partial u}{\partial y}(x,y)\right)^2 + \psi'(u(x,y)) \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,y)$$

Odavde, kako imamo zahtjev da je $\psi(u)$ harmonijska, imamo

$$\begin{aligned} 0 = \Delta\psi(u) &= \frac{\partial^2 \psi(u)}{\partial x^2}(x,y) + \frac{\partial^2 \psi(u)}{\partial y^2}(x,y) \\ &= \psi''(u)\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \psi'(u) \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \psi''(u)\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \psi'(u) \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \\ &= \psi''(u)\left(\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right) + \psi'(u)\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) \\ &= \psi''(u)\left(\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right) + \psi'(u) \cdot \Delta u \\ &= \psi''(u)\left(\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right), \end{aligned}$$

jer je u harmonijska pa je $\Delta u = 0$.

Dakle, imamo uvjet

$$\psi''(u(x,y))\left(\left(\frac{\partial u}{\partial x}(x,y)\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}(x,y)\right)^2\right) = 0, \quad x, y \in \mathbb{R}.$$

Općenito, ako imamo da je produkt dvije funkcije jednak nuli, ne možemo zaključiti da je barem jedna od tih funkcija identički jednaka nuli (npr. uzmemo dvije funkcije koje su različite od nule na disjunktnim skupovima). Međutim, jer zahtijevamo da ova relacija vrijedi za proizvoljnu harmonijsku funkciju u, za koju suma kvadrata prvih parcijalnih derivacija ne mora biti nula ni u jednoj točki (npr. ranije spomenuta funkcija $u(x,y) = x$), zaključujemo da vrijedi

$$\psi''(u(x,y)) = 0, \quad x, y \in \mathbb{R}$$

za bilo koju harmonijsku funkciju u.

Nadalje, ponovnim uvrštavanjem funkcije $u(x,y) = x$ dobivamo da nužno vrijedi

$$\psi''(x) = 0, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Odavde, ako dva puta integriramo, dobivamo da je funkcija ψ nužno linearna, tj. da je oblika

$$\psi(x) = ax + b, \quad a, b \in \mathbb{R}.$$

Obratno, lako se vidi, ako je funkcija u harmonijska, da je onda i funkcija $au + b$ također harmonijska, za bilo koje $a, b \in \mathbb{R}$.

6.* Neka je $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ područje i f derivabilna funkcija s Ω u $\mathbb{C}$. Dokažite:

(a) Ako je slika od f sadržana u $\mathbb{R}$, tada je f konstanta

(b) Ako je fja $g : \Omega \to \mathbb{C}$ definirana s $g(z) = f(\overline{z})$, $z \in \Omega$, derivabilna na Ω, onda je f konstanta.

(c) Ako je $|f(z)| =$ const., tada je f konstanta

Rješenje. (a) Ako je slika sadržana u $\mathbb{R}$, iz rastava funkcije f na realni i imaginarni dio dobivamo

$$u(x,y) = f(x+iy), \quad v(x,y) = 0$$

Odavde, iz CR uvjeta dobivamo

$$\partial_x u(x,y) = 0, \quad \partial_y u(x,y) = 0.$$

Integriranjem prve jednakosti po varijabli x dobivamo

$$u(x,y) = h(y)$$

pri čemu funkcija h ovisi samo o varijabli y. Nadalje, ako dobivenu relaciju parcijalno deriviramo po y, dobivamo

$$h'(y) = 0,$$

iz čega slijedi

$$h(y) = C \qquad \Longrightarrow \qquad f(x+iy) = u(x,y) = h(y) = C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Dakle, funkcija f je (realna) konstanta.

(b) Neka su $f = u + iv$ i $g = \tilde{u} + i\tilde{v}$. Tada je, zbog uvjeta $f(\overline{z}) = g(z)$,

$$\tilde{u}(x,y) = u(x,-y) \quad \text{i} \quad \tilde{v}(x,y) = v(x,-y)$$

Zato je, kad parcijalno deriviramo po varijabli y:

$$\partial_y \tilde{u}(x,y) = -\partial_y u(x,-y) = -\partial_y \tilde{u}(x,y)$$

pa je

$$\partial_y \tilde{u}(x,y) = 0, \quad x, y \in \mathbb{R}$$

Analogno dobivamo da je i

$$\partial_y \tilde{v}(x,y) = 0, \quad x, y \in \mathbb{R}$$

Nadalje, iz CR uvjeta dobivamo i da su

$$\partial_x \tilde{u}(x,y) = 0 \quad \text{i} \quad \partial_x \tilde{v}(x,y) = 0, \quad x, y \in \mathbb{R}.$$

Odavde, istim argumentom kao i u (a) zadatku, zaključujemo da su funkcije $\tilde{u}$ i $\tilde{v}$ konstante, pa su onda i funkcije u i v konstante, odnosno, funkcija f (i funkcija g) je konstanta.

(c) Uz $f = u + iv$, ako je funkcija $|f|$ konstanta, onda je naravno i funkcija $|f|^2$ konstanta pa imamo

$$u^2 + v^2 = C, \quad C > 0.$$

(naravno, ako je $|f|^2 = 0$, onda je i f=0, pa nemamo što dokazivati). Odnosno, imamo

$$u^2(x,y) = C - v^2(x,y)$$

pa nakon parcijalnog deriviranja dobivamo

$$2u(x,y)\partial_x u(x,y) = -2v(x,y)\partial_x v(x,y)$$

$$2u(x,y)\partial_y u(x,y) = -2v(x,y)\partial_y v(x,y)$$

Sada možemo iskoristiti CR uvjete i dobiti:

$$u(x,y)\partial_x u(x,y) = v(x,y)\partial_y u(x,y)$$

$$u(x,y)\partial_y u(x,y) = -v(x,y)\partial_x u(x,y)$$

odnosno, imamo

$$u(x,y)\partial_x u(x,y) - v(x,y)\partial_y u(x,y) = 0$$

$$u(x,y)\partial_y u(x,y) + v(x,y)\partial_x u(x,y) = 0$$

Ako pomnožimo prvu jednadžbu s u i drugu s v i zbrojimo ih, dobivamo

$$\left(u^2(x,y) + v^2(x,y)\right)\partial_x u(x,y) = 0$$

odnosno

$$C\partial_x u(x,y) = 0, \quad x, y \in \mathbb{R}$$

Kako smo pretpostavili da je $C > 0$, zaključujemo da vrijedi $\partial_x u(x,y) = 0$ za sve x i y.

Ako pak gore pomnožimo prvu jednadžbu s $-v$, a drugu s u i zbrojimo ih, analogno dobivamo da je i $\partial_y u(x,y) = 0$ za sve x i y, pa je zbog istog argumenta kao i u (a) i (b) dijelu funkcija u konstanta. Nadalje, po CR uvjetima je i $\partial_x v(x,y) = \partial_y v(x,y) = 0$ za sve x, y, pa je i funkcija v, odnosno, funkcija f konstanta.