

KOMPLEKSNA ANALIZA

Zadaci za vježbu br. 3

2020./2021.

1. Provjerite u kojim su točkama sljedeće funkcije derivabilne:

(a) $f(z) = z^2 \cdot \bar{z}$

(b) $f(z) = z^2(z + 1)$

(c) $f(z) = |z|\bar{z}$

(d) $f(z) = \bar{z} \operatorname{Im} z$

(e) $f(x + iy) = x^2 y^2$

(f) $f(x + iy) = x^2 + iy^2$.

2. Može li funkcija $u(x, y) = \ln(x^2 + y^2)$ biti realni dio neke derivabilne funkcije? Ako može, odredite tu funkciju.

3. Može li funkcija $v(x, y) = e^x \sin y + y^2$ biti imaginarni dio neke derivabilne funkcije? Ako može, odredite tu funkciju.

4. Odredite (ako postoji) derivabilnu funkciju f kojoj je imaginarni dio $v(x, y) = 2x^2 - 2y^2 + x$.

5.* Neka je u harmonijska funkcija.

(a) Je li u^2 harmonijska funkcija?

(b) Za koje funkcije ψ je $\psi(u)$ harmonijska funkcija?

6.* Neka je $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ područje i f derivabilna funkcija s Ω u \mathbb{C} . Dokažite:

(a) Ako je slika od f sadržana u \mathbb{R} , tada je f konstanta

(b) Ako je fja $g : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ definirana s $g(z) = f(\bar{z})$, $z \in \Omega$, derivabilna na Ω , onda je f konstanta.

(c) Ako je $|f(z)| = \text{const.}$, tada je f konstanta