Riješeni i komentirani kratki testovi prisutnosti nastavi

Franka Miriam Brückler

31. siječnja 2025.

1 Realni brojevi. Pravokutni koordinatni sustav. Realne funkcije jedne varijable

1. Je li drugi (kvadratni) korijen od 2 ($\sqrt{2}$) jednak 1,41?

   ☐ Da. ☑ Ne. ☐ Ovisi o kontekstu.

   $\sqrt{2}$ je iracionalan broj te bilo koji konačni decimalni zapis za taj broj može biti samo njegova bolja ili lošija aproksimacija. Ovisno o kontekstu, 1,41 *je dobra ili loša aproksimacija za $\sqrt{2}$, ali ni u kojem kontekstu mu nije jednaka.*

2. Označite sve ispravne nastavke sljedeće rečenice. Ako na neku os apscisa nanosimo iznose vremena mjerena u minutama, pravilna oznaka te osi je ...

   ☑ t/min ☐ t [min] ☐ t ☐ x ☐ t [s] ☐ $t\,\mathrm{min}$ ☑ $t\,\mathrm{min}^{-1}$

   Ako se na brojevni pravac nanose iznosi neke fizikalne veličine, oznaka tog brojevnog pravca je oznaka te veličine, u ovom slučaju t, podijeljena s nekom prikladnom mjernom jedinicom za tu veličinu, u ovom slučaju dakle s min, s, h *ili nekom drugom vremenskom jedinicom. Naravno, dijeljenje s nečim je isto što i množenje s recipročnom vrijednosti tog nečeg, primjerice $t/\mathrm{min} = \dfrac{t}{\mathrm{min}} = t\,\mathrm{min}^{-1}$.*

3. U nekom eksperimentu mjeri se ovisnost množinske koncentracije jednog reaktanta o vremenu. Reakcija traje oko pola sata, a početna koncentracija reaktanta je 0,1 mol/L. Ako biste tablicu parova (vrijeme, koncentracija) crtali u pravokutnom koordinatnom sustavu, označite sve toÄŤne tvrdnje:

   ☐ os apscisa prikladno bi bilo označiti s x

   ☐ os apscisa prikladno bi bilo označiti s $c/\mathrm{mol/L}$

   ☑ os apscisa prikladno bi bilo označiti s t/min

   ☐ os ordinata prikladno bi bilo označiti s y

   ☐ os ordinata prikladno bi bilo označiti s $c/\mathrm{mol/L}$

   ☐ os ordinata prikladno bi bilo označiti s t/min

   ☑ potrebno je predviditi prostor samo unutar prvog kvadranta

   ☐ maksimalna vrijednost na osi apscisa bi bila oko iznosa 0,1

   ☑ maksimalna vrijednost na osi ordinata bi bila oko iznosa 0,1

Ako je navedeno da je se neka veličina mjeri u ovisnosti o drugoj, onda je prvospomenuta zavisna varijabla (ovdje je to c), a drugospomenuta je nezavisna varijabla (ovdje je to t). Ako se crta ovisnost zavisne o nezavisnoj varijabli u pravokutnom koordinatnom sustavu, iznosi nezavisne varijable nalaze se na osi apscisa, a iznosi zavisne na osi ordinata. Za pravilno označavanje koordinatnih osi, pogledajte komentar uz 2. zadatak. Pritom, treba paziti na pravila o redoslijedu računaskih operacija. Primjerice, $c/\mathrm{mol}/\mathrm{L}$ *je isto što i* $\frac{\frac{c}{\mathrm{mol}}}{\mathrm{L}} = \frac{c}{\mathrm{mol\,L}} \neq \frac{c}{\mathrm{mol\,L^{-1}}}$. *Ako zavisna i nezavisna varijabla ne mogu poprimiti negativne vrijednosti, prikaz ovisnosti zavisne o nezavisnoj varijabli nalazit će se u I. kvadratnu pravokutnog koordinatnog sustava. Ako zavisna varijabla, ovdje c, ne može imati iznos veći od a (ovdje* $a = 0{,}1$ *jer se radi o koncentraciji reaktanta, tijekom reakcije se troši pa će imati manje koncentracije), onda se kao maksimalna vrijednost na osi ordinata uzima iznos (blizu) a, analogno, ako nezavisna varijabla ne može imati iznos veći od b, onda se kao maksimalna vrijednost na osi apscisa uzima iznos (blizu) b.*

4. Skup svih parova $(x, f(x))$, gdje je x nezavisna varijabla funkcije f, zove se *graf funkcije f*.

   Ovdje se jednostavno radi o definiciji grafa funkcije.

5. Neka je f realna funkcija jedne varijable. Nezavisna varijabla joj je označena s x, a zavisna s y. Označite sve točne tvrdnje (tvrdnje koje su istinite za svaku takvu funkciju f):

   ☑ Graf od f može ne sjeći os apscisa.

   ☑ Graf od f može sjeći os apscisa jednom.

   ☑ Graf od f može os apscisa sjeći u više od jedne točke.

   ☑ Graf od f može ne sjeći os ordinata.

   ☑ Graf od f može sjeći os ordinata jednom.

   ☐ Graf od f može sjeći os ordinata u više od jedne toče.

   ☐ Ako nezavisna varijabla ne poprima negativne vrijednosti, graf od f se nalazi iznad osi apscisa.

   ☐ Graf od f se ne može sastojati od više odvojenih dijelova.

   ☐ Svaka horizontala (pravac paralelan s osi apscisa) siječe graf od f najviše jednom.

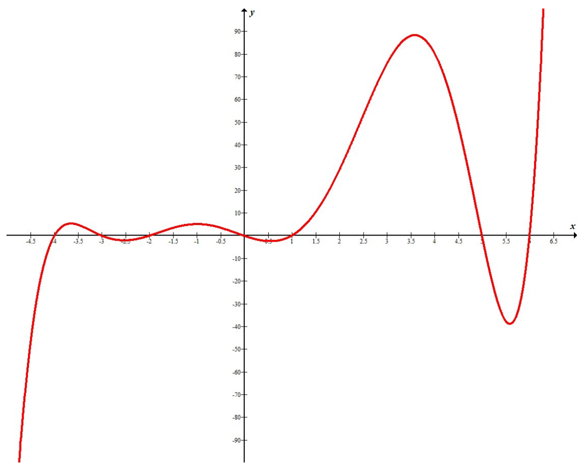
   ☑ Svaka vertikala (pravac paralelan osi ordinata) siječe graf od f najviše jednom.

   Graf realne funkcije jedne varijable može ne sječi os apscisa (ako ta funkcija nema nultočaka, tj. nigje ne postiže vrijednost 0*) ili u bilo koliko točaka, čije apscise su iznosi nultočaka funkcije. Graf realne funkcije jedne varijable siječe os ordinata u najviše jednoj točki — nijednoj ako* 0 *nije u domeni funkcije, a u jednoj s koordinatama* $(0, f(0))$ *ako* 0 *jest u domeni funkcije. Ako nezavisna varijabla x ne poprima negativne vrijednosti, graf od f nalazit će se desno od osi ordinata (i eventualno imati jednu točku na njoj), a ako zavisna varijabla* $y = f(x)$ *ne poprima negativne vrijednosti, graf od f će se nalaziti iznad osi apscisa (i eventualno imati neke točke na njoj). Budući da je funkcija po definiciji jednoznačno pridruživanje, nikojem x-u ne mogu odgovarati dva y-a pa nijedna vertikala ne može sječi graf realne funkcije jedne varijable više od jednom. Broj sjecišta horizontalâ s grafom ima veze sa svojstvom injektivnosti.*

2 Svojstva realnih funkcija jedne varijable. Transformacije grafova. Polinomi.

1. Na slici dolje je prikazan graf jednog polinoma. Vodeći koeficijent tog polinoma je pozitivan.

   Za objašnjenje pogledajte objašnjenje sljedećeg zadatka.



2. Na slici gore je prikazan graf jednog polinoma. Označite sve točne tvrdnje o tom polinomu.

   ☐ Taj polinom je parnog stupnja.

   ☑ Taj polinom je neparnog stupnja.

   ☑ Taj polinom sigurno nema stupanj manji od 7.

   ☐ Taj polinom sigurno nema stupanj veći od 7.

   ☑ Taj polinom je djeljiv s polinomom $p(x) = x^2 - x$.

   ☐ Taj polinom je djeljiv s polinomom $q(x) = x^2 + x$.

   ☑ Taj polinom nema višestrukih nultočaka.

   ☐ Taj polinom ima jednu ili više višestrukih nultočaka.

   ☐ Taj polinom je neparna funkcija.

   ☐ Taj polinom je parna funkcija.

   ☑ Taj polinom je surjekcija.

   ☐ Taj polinom je injekcija.

   Budući da se s grafa vidi da i za jako male i za jako velike vrijednosti nezavisne varijable polinom raste, slijedi da je neparnog stupnja s pozitivnim vodećim koeficijentom. Polinom čiji graf je na slici očito ima 7 realnih nultočaka, a svaki polinom ima najviše onoliko nultočaka koliki mu je stupanj, dakle mu stupanje mora biti bar 7. Brojevi 0 i 1 su nultočke našeg polinoma, dakle on mora biti djeljiv s x i s $x - 1$, odnosno s $x \cdot (x - 1) = p(x)$. S druge strane, -1 nije nultočka našeg polinoma te on nije djeljiv s $x + 1$ i stoga nije djeljiv s $q(x) = x \cdot (x + 1)$. Budući da ni u kojoj nultočki os apscisa nije tangenta na graf, vidimo da taj polinom nema višestrukih nultočaka. To nije u kontradikciji s time da je možda stupnja većeg od 7, jer je *moguće (iz grafa se to ne može jednoznačno odrediti) da u faktoriziranom obliku sadrži kvadratne faktore bez realnih nultočaka. Sa slike je očito da se radi o nekom polinomu zadanom na prirodnoj domeni $\mathbb{R}$ kojemu je slika cijeli skup $\mathbb{R}$. Budući da kodomena mora sadržavati sliku funkcije, taj polinom je funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Ona nije ni parna ni neparna, iako je domena simetrična s obzirom na 0; jedan mogući argument da nije ni parna ni neparna je to što $f(-1)$ nije jednako ni $f(1) = 0$ ni $-f(1) = 0$. Budući da je kodomena ovdje jednaka slici funkcije, radi se o surjekciji. S druge strane taj polinom nije injekcija, jedan mogući argument je da ima više od jedne nultočke, tj. više od jedne nezavisne varijable preslikava u 0.*

3. Transformacijama grafova se iz grafa funkcije zadane formulom $f(x) = x^3$ može dobiti graf funkcije zadane formulom $g(x) =\ldots$

   ☑ $-x^3$

   ☑ $(7-5x)^3$

   ☐ $x\,(x-1)^3$

   ☐ $1/x^3$

   ☑ $3+2x^3$

   ☐ $x^3\,(x-1)^3$

   Transformacijama grafova se iz grafa funkcije zadane formulom $f(x)$ mogu dobiti grafovi svih onih funkcija čija formula se iz $f(x)$ može dobiti s konačno mnogo promjena predznaka u domeni ili kodomeni, pribrajanja konstanti u domeni ili kodomeni te množenja s konstantom u domeni ili kodomeni.

4. Ako je funkcija f neparna, onda je funkcija zadana pravilom $g(x) = f(-x^2)$ ...

   ☑ parna.

   ☐ neparna.

   ☐ ni parna ni neparna.

   ☐ ovisi o funkciji f.

   Ako je $g(x) = f(-x^2)$, onda je $g(-x) = f\left(-(-x)^2\right) = f(-x^2) = g(x)$, dakle je g parna.

5. Ako je $y = a\,x + b$, onda ...

   ☐ ...su x i y proporcionalni.

   ☐ ...su x i y proporcionalni ako je $a > 0$.

   ☑ ...su x i y proporcionalni ako je $b = 0$.

   ☐ ...su x i y proporcionalni samo ako je i $a > 0$ i $b = 0$.

   ☐ ...ništa od ostalog ponuđenog nije točno.

   Ako je $b = 0$, onda je — osim kad je x ili y jednak 0 — kvocijent $y : x$ konstantan iznosa a, dakle su x i y proporcionalni. Uvjet $a > 0$ nema veze s proporcionalnosti, nego ako je on zadovoljen, onda je y rastuća funkcija od x-a.

3 Racionalne funkcije i korijeni. Eksponencijalne funkcije

1. Ako je $f(x) = \sqrt{2x - 1 - 5x^2}$, prirodna domena te funkcije je <u>*prazan skup*</u>.

   Prirodna domena svih parnih korijena (kao realnih funkcija jedne varijable, a samo s njima se trenutno bavimo) je interval $[0, +\infty\rangle$. Stoga izraz pod korijenom ne smije biti negativan. No, kvadratna funkcija $y = 2x - 1 - 5x^2$ nema realnih nultočaka, pa zbog negativnog vodećeg koeficijenta slijedi da joj se graf cijeli nalazi ispod osi apscisa, tj. da y postiže samo negativne vrijednosti. Stoga ni za koji realan broj x ne možemo izračunati $f(x)$, odnosno domena od f je $\emptyset$. Napominjemo ovdje da je prazan skup jednako postojeći kao i svi drugi skupovi (štoviše, strogo matematički se svi skupovi konstruiraju iz praznog skupa i on je jedini skup čije postojanje se zahtijeva aksiomom), tako da je nepravilno reći da domena ove funkcije ili da ta funkcije ne postoji.

2. Racionalne funkcije …

   ☐ kao domenu ne mogu imati cijeli skup $\mathbb{R}$.

   ☐ mogu imati dvije različite horizontalne asimptote.

   ☑ mogu imati dvije različite vertikalne asimptote.

   ☐ ne mogu biti bijekcije.

   ☑ mogu biti parne.

   ☐ ne mogu imati više nultočaka nego što je stupanj nazivnika.

   Prva opcija nije točna jer ako nazivnik racionalne funkcije, primjerice kao kod $f(x) = \frac{x-5}{2x-1-5x^2}$, nema realnih nultočaka, racionalna funkcija će biti definirana za svaki x. Racionalne funkcije mogu imati više različitih vertikalnih asimptota, no ako imaju horizontalnu asimptotu, onda je ona samo jedna — ista i na lijevoj i na desnoj strani. Neke racionalne funkcije, primjerice $f(x) = \frac{1}{x}$ kao $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R} \setminus \{0\}$, su bijekcije. Neke racionalne funkcije, primjerice funkcija iz prethodne rečenice, su neparne, neke su parne (primjerice, $g(x) = \frac{1}{x^2}$), a neke nisu ni jedno ni drugo. Stupanj nazivnika je maksimalni broj nultočaka nazivnika, dakle maksimalni broj realnih brojeva koji nisu u prirodnoj domeni racionalne funkcije, ali nemaju veze s brojem nultočaka racionalne funkcije — one su isto što i nultočke njezina brojnika.

3. Prirodna domena svih eksponenicijalnih funkcija …

   ☐ je skup svih realnih brojeva većih od 1.

   ☐ je skup svih pozitivnih realnih brojeva različitih od 1.

   ☑ je skup svih realnih brojeva.

   ☐ je skup svih prirodnih brojeva.

   ☐ je skup svih pozitivnih brojeva.

   ☐ ovisi o bazi konkretne eksponencijalne funkcije koju razmatramo.

   Po definiciji je prirodna domena svake eskponencijalne funkcije cijeli skup realni brojeva. Skup svih pozitivnih realnih brojeva različitih od 1 je skup svih dopuštenih baza eksponenicijalnih funkcija.

4. Funkcija je zadana formulom $f(x) = \exp(-7x)$. Označite sve točne tvrdnje o funkciji f:

   ☐ To je eksponencijalna funkcija s bazom e.

   ☑ To je eksponencijalna funkcija s bazom različitom od e.

   ☐ To je rastuća funkcija.

   ☑ To je padajuća funkcija.

   ☐ Graf te funkcije os apscisa siječe u $-\frac{1}{7}$.

   ☐ Graf te funkcije os ordinata siječe u -7.

   ☑ Graf te funkcije ne siječe os apscisa.

   ☐ Graf te funkcije ne siječe os ordinata.

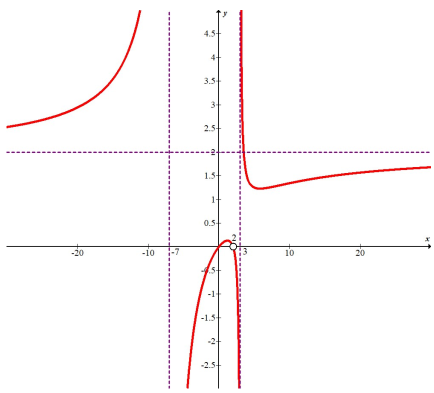
   ☑ Ta funkcija poprima samo pozitivne vrijednosti.

   ☐ Ta funkcija poprima samo negativne vrijednosti.

   ☐ Prirodna domena te funkcije je skup svih negativnih realnih brojeva.

   ☐ Prirodna domena te funkcije je skup svih pozitivnih realnih brojeva.

   Budući da je $\exp(-7x) = e^{-7x} = (e^{-7})^x \neq e^x$, *vidimo da se radi o eksponencijalnoj funkciji s bazom* e^{-7}. *Ta je baza manja od* 1 *pa se radi o padajućoj eksponencijalnoj funkciji. Kao i svaka druga eskponencijalna funkcija, ona nema nultočaka (štoviše, poprima samo pozitivne vrijednosti), dakle joj graf ne siječe os apscisa (točnije, nalazi se iznad nje). Kao i svaka druga eskponencijalna funkcija u nuli postiže vrijednost* 1, *tj. os ordinata joj graf siječe u* 1. *Također, kao i svakoj drugoj eksponencijalnoj funkciji, prirodna domena joj je* $\mathbb{R}$.



5. Na slici gore je prikazan graf jedne racionalne funkcije (na prirodnoj domeni). Označite sve točne tvrdnje o toj funkciji.

   ☐ Stupanj brojnika joj je manji od stupnja nazivnika.

   ☑ Stupanj brojnika joj je jednak stupnju nazivnika.

   ☐ Stupanj brojnika joj je veći od stupnja nazivnika.

   ☐ Nazivnik joj nema nultočaka.

   ☑ Jedna od nultočaka nazivnika je -7.

   ☑ Jedna od nultočaka nazivnika je 2.

☐ Brojnik joj nema nultočaka.

☐ Jedna od nultočaka brojnika je -7.

☑ Jedna od nultočaka brojnika je 2.

☐ Ako je 3 nultočka brojnika te funkcije, onda je njena kratnost manja nego njezina kratnost kao nultočka nazivnika.

☑ Stupanj brojnika je najmanje 2.

☐ Stupanj nazivnika je najviše 2.

Budući da graf ove racionalne funkcije ima horizontalnu asimptotu, ali ona nije x-os, zaključujemo da su joj stupanj brojnika i nazivnika jednaki. Budući da funkcija nije definirana u -7, 2 i 3, a znamo da se graf odnosi na prirodnu domenu, zaključujemo da su ta tri broja (sve) nultočke nazivnika. Budući da joj je nultočka 0, a uz to u 2, koji je nultočka nazivnika, nema vertikalnu asimptotu, zaključujemo da su joj (bar) 0 i 2 nultočke brojnika. Budući da brojnik ima (bar) dvije nultočke, stupanj mu ne može biti manji od 2. Budući da u 3 imamo vertikalnu asimptotu, ako je 3 nultočka i brojnika i nazivnika, kratnost kao nultočke brojnika joj mora biti manja od kratnosti kao nultočke nazivnika.

4 Logaritamske, trigonometrijske i ciklometrijske funkcije

1. Prva otopina neke tvari ima dvostruko veći p[H] nego druga otopina iste tvari. Koncentracija H^+ iona u prvoj otpini je u odnosu na koncentraciju H^+ iona u drugoj otopini <u>*po iznosu njezin kvadrat*</u>.

   Označimo $x_1 = \frac{c_1(H^+)}{\text{mol/L}}$ *i* $x_2 = \frac{c_2(H^+)}{\text{mol/L}}$*. Imamo* $\mathrm{p[H]}_1 = -\log x_1$ *i* $\mathrm{p[H]}_2 = -\log x_2$ *te znamo* $\mathrm{p[H]}_2 = 2\mathrm{p[H]}_1$*. Stoga je* $\log x_1 = 2\log x_2 = \log x_2^2$*, dakle je* $x_1 = x_2^2$*. Posebno, prva će koncentracija biti manja od druge ako su one ispod* $1\,\text{mol/L}$*, a ako su veće, onda će prva biti veća od druge. Budući da je zadan kvocijent logaritama, a kvocijent logaritama nije povezan s logaritmom kvocijenta, bilo kakva izjava o proporcionalnosti (bilo direktnoj bilo obrnutoj) među koncentracijama je sigurno besmislena.*

2. Zadana je funkcija $f(x) = \ln(-\log(-x))$. Označite sve točne tvrdnje za tu funkciju.

   ☐ Funkcija f je inverzna funkcija funkcije $g(x) = -10^{\exp(-x)}$.

   ☐ Prirodna domena funkcije f je skup svih negativnih realnih brojeva.

   ☑ Funkcija f je rastuća funkcija.

   ☐ Točka $(10, 0)$ je na grafu funkcije f.

   ☐ To je ista funkcija kao $g(x) = \ln\log x$.

   ☐ Ta funkcija poprima samo pozitivne iznose.

   ☐ Ta funkcija nema nultočaka.

   Inverzna funkcija od $g(x) = -10^{\exp(-x)}$ *je* $g^{-1}(x) = -\ln\log(-x) \neq f(x)$*. Da bi* f *bila definirana mora — da bi se* $-x$ *mogao uvrstiti u* $\log$ *— biti* $-x > 0$*, tj.* x *negativan, ali i dodatno mora biti* $-\log(-x) > 0$*, da bi se* $-\log(-x)$ *mogao uvrstiti u* $\ln$*. Dakle, mora biti* $\log(-x) < 0$ *odnosno* $-x < 1$ *odnosno* $x > -1$ *te je prirodna domena funkcije* f *interval* $\langle -1, 0\rangle$*. Što je* x *veći, to je* $-x$ *manji pa je* $\log(-x)$ *manji, te je* $-\log(-x)$ *veći i naposlijetku* $f(x)$ *veći; dakle,* f *je rastuća. Budući da* 10 *nije u prirodnoj domeni od* f*, nikoja točka s apscisom* 10 *nije na grafu te funkcije; s druge strane, rješavanjem jednadžbe* $f(x) = 0$ *vidimo da je točka* $\left(-\frac{1}{10}, 0\right)$ *na grafu te funkcije, odnosno funkcija* f *ima jednu nultočku i to je* $-\frac{1}{10}$*. Funkcija* f *i funkcija zadana s* $g(x) = \ln\log x$ *nisu iste, što najlakše argumentiramo time da imaju različite prirodne domene (prirodna domena za* $g(x)$ *je* $\langle 1, +\infty\rangle$*). Funkcija* f *poprima i pozitivne i negativne iznose (pozitivne za* $x > -\frac{1}{10}$*, a negativne za* $x < -\frac{1}{10}$*).*

3. Brojevi $a = \ln\sin\arccos 0$, $b = \log 2024$, $c = \mathrm{ctg}6$ poredani po veličini od najmanjeg do najvećeg su cab.

   Budući da je $\cos\frac{\pi}{2} = 0$*, znamo da je* $\arccos 0 = \frac{\pi}{2}$*. Slijedi da je* $\sin\arccos 0 = 1$*, te je stoga* $a = 0$*. Budući da je* $2024 = 2{,}024 \cdot 10^3$*, slijedi da je* b *između* 3 *i* 4*. Budući da je* 6 *između* $3\pi/2$ *i* 2π*, slijedi da je* $\cos 6 > 0$*,* $\sin 6 < 0$*, dakle je* $c < 0$*.*

4. Ako znamo da je realna funkcija f jedne varijable periodična s temeljnim periodom $\ln 10$, onda sigurno vrijedi:

   ☐ Domena te funkcije je cijeli skup $\mathbb{R}$.

☑ Ta funkcija nije injekcija.

☐ Ta funkcija nije surjekcija.

☑ Ta funkcija nema horizontalnih asimptota.

☐ Ta funkcija nema vertikalnih asimptota.

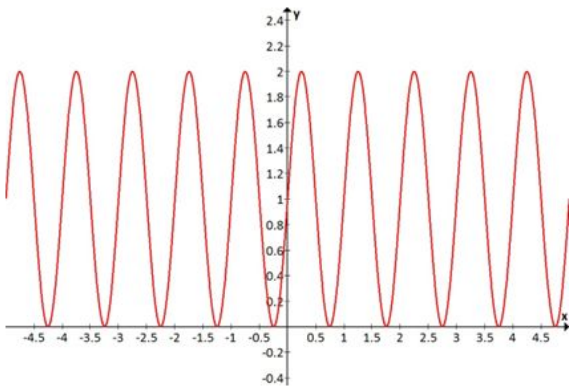
☑ $f(\ln 100) - f(0) = 0$.

☐ $f(1) = f(11)$.

☑ $\ln 100000000000$ je period te funkcije.

☐ e je također period te funkcije.

Domena ne mora biti $\mathbb{R}$*, nego bi mogla biti primjerice* $\mathbb{R}$ *bez svih višekratnika od* $\ln 10$ *(usporedite s kotangensom kojem je temeljni period* π*). Nikoja periodična funkcija nije injekcija niti ima horizontalnih asimptota, pa tako ni ova. No, surjekcija može i ne mora biti, kao što može i ne mora imati vertikalne asimptote. Budući da je* $\ln 100 = \ln 10^2 = 2\ln 10$*, slijedi da je i* $\ln 100$ *period naše funkcije te je* $f(\ln 100) - f(0) = 0$*. Slično,* $\ln 100000000000 = \ln 10^{1}1 = 11\ln 10$ *pa je i to period naše funkcije. Je li* $f(1) = f(11)$ *ne možemo znati (da je* 10 *bio period od* f*, to bi vrijedilo, ali* 10 *sigurno nije period od* f *je nije višekratnik od* $\ln 10$*; s druge strane, to ne znači da nije* $f(1) = f(11)$*, jer kod periodične funkcije može biti i drugih višestrukih vrijednosti osim onih uzrokovanih periodom. Budući da* e *nije višekratnik od* $\ln 10$*, onda nije ni period.*



5. Na slici gore je prikazan graf jedne realne funkcije f jedne varijable. Koja od predloženih formula za $f(x)$ bi dala graf kao na slici?

- f(x) = 1 + sin x
- f(x) = 1 + cos x
- f(x) = sin(x + 1/4)
- f(x) = cos(x + 1/4)
- f(x) = 1 + sin(x + 1/4)
- f(x) = 1 + cos(x + 1/4)
- f(x) = 2Pi sin x
- f(x) = 2Pi cos x
- f(x) = 2 sin(x + 1/4)
- f(x) = 2 cos(x + 1/4)
- f(x) = 1 + sin(2Pi x + 1/4)
- f(x) = 1 + cos(2Pi x + 1/4)
- f(x) = 1 + sin(2Pi x - Pi/2)
- f(x) = 1 + cos(2Pi x - Pi/2)
- nijedna od predloženih formula neće dati graf kakav je prikazan na slici

Očigledno se radi o transformiranoj sinusoidi ili kosinusoidi. Pritom, amplituda je jednaka 1*, dakle nemamo skaliranja u kodomeni te otpadaju opcije u kojima imamo skaliranje s* 2 *i s* 2π*. Također, umjesto da je između pravaca* $y=-1$ *i* $y=1$ *kao obična sinusoida i kosinusoida, ovdje je graf između pravaca* $y=0$ *i* $y=1$*, dakle smo u kodomeni translatirani za* 1 *na gore pa preostaju samo opcije koje su oblika* $1+$*nešto. Temeljni period funkcije čiji graf je na slici jednak je* 1*, što je* $\frac{1}{2\pi}$ *temeljnog perioda sinusa i kosinusa, dakle imamo skaliranje u domeni s* 2π *te preostaje samo zadnjih pet opcija. Uočimo da nam je sjecište s* y*-osi točka* $(0,1)$*. Uvrstimo li* 0 *u četiri donje formule, samo u zadnjoj od njih ćemo dobiti iznos* 1*, dakle ostaju samo opcije da je točna zadnja formula ili pak nijedna od zadanih. Zapišemo li* $2\pi x-\frac{\pi}{2}$ *u obliku* $2\pi\left(x-\frac{1}{4}\right)$*, vidimo da ona odgovara pomaku* $\cos(2\pi x)$ *za* $\frac{1}{4}$ *udesno, odnosno položaju prvog pozitivnog maksimuma iznad apscise* $\frac{1}{4}$*, što odgovara slici, a i lako se crtanjem grafa funkcije* $1+\cos(2\pi x-\pi/2)$ *vidi da se stvarno dobije graf kao na slici.*

5 Funkcije zadane po dijelovima. Osnove deriviranja.

1. Kada kažemo da je c stacionarna točka funkcije f? *Ako je c element domene funkcije f takav da je $f'(c) = 0$, tj. koji je nultočka prve derivacije funkcije f, odnosno ako je tangenta na graf funkcije f u točki $(c, f(c))$ horizontalna. (Odgovor je na testu priznat i onima koji nisu naglasili da c mora biti element domene funkcije f jer je ionako nemoguće da $f'(c)$ ima smisla, a da c nije u domeni od f.)*

2. Ako je $y = 30\text{˘}5x$ tangenta na graf funkcije f u točki s apscisom 9, onda je ...

   ☑ $f(9) = -15$.

   ☐ $f(0) = 30$.

   ☐ $f(9)$ nije moguće odrediti bez dodatnih podataka

   ☑ $f(0)$ nije moguće odrediti bez dodatnih podataka

   ☑ $f'(9) = -5$.

   ☐ $f'(9) = 30$.

   ☐ $f'(0) = -5$.

   ☐ $f'(0) = -15$.

   ☐ $f'(0) = 30$.

   ☐ $f'(9)$ nije moguće odrediti bez dodatnih podataka

   ☑ $f'(0)$ nije moguće odrediti bez dodatnih podataka

   Točka grafa u kojoj je pravac $y = 30 - 5x$ tangenta je $(9, f(9))$. Budući da tangenta prolazi kroz tu točku, mora biti $f(9) = 30 - 5 \cdot 9 = -15$. No, ni za koju drugu točku grafa ne znamo je li na toj tangenti, pa za druge točke c ne možemo tvrditi da je $f(c) = 30 - 5c$. Posebno, $f(0)$ nije moguće odrediti bez dodatnih podataka o funkciji. Koeficijent smjera tangente u točki $(9, f(9))$ jednak je $f'(9)$, dakle je $f'(9) = -5$. No, iz znanja tangente u točki $(9, f(9))$ ne možemo zaključiti ništa o tangentama u drugim točkama grafa, dakle ni o iznosima $f'(c)$ za $c \neq 9$; specijalno, iz danih podataka ne možemo odrediti $f'(0)$.

3. Zadana je diferencijalna jednadžba $xy'' = 2y' + 3x^2$. Koje od sljedećih funkcija $y = f(x)$ su njezina rješenja?

   ☐ $y = 0$.

   ☐ $y = \exp(x)$.

   ☐ $y = x^2$.

   ☑ $y = x^3 \ln x - \ln 3$.

   ☑ $y = x^3 \ln x$.

   ☐ $y = x^3 + \ln x$.

   Prve derivacije šest zadanih funkcija su redom 0, $\exp(x)$, $2x$, $3x^2 \ln x + x^2$, $3x^2 \ln x + x^2$, $3x^2 + x^{-1}$. Stoga su im redom druge derivacije 0, $\exp(x)$, 2, $6x \ln x + 5x$, $6x \ln x + 5x$, $6x - x^{-2}$. Ako prvu derivaciju pojedine funkcije uvrstimo na mjesto y' u jednadžbi, a drugu iste funkcije na y'' u jednadžbi, vidjet ćemo da ćemo jednakost izraza (dakle, jednakost za sve x iz domena drugih derivacija) dobiti samo za četvrtu i petu funkciju.

4. Za funkciju čiji graf je prikazan na slici gore označite sve točne tvrdnje.

☑ f nije derivabilna u 0.

☐ $f'(0) = 0$.

☑ $f'(1{,}2) < 0$.

☑ f nema stacionarnih točaka.

☐ $f'(1) = 1$.

☐ $f'(0{,}1) < f'(1{,}1)$.

Budući da je 0 *u domeni, ali u* 0 *graf od* f *puca,* f *nije derivabilna u* 0*. To naravno znači da* $f'(0)$ *nije* 0*, jer* $f'(0) = 0$ *znači da je* f *derivabilna u* 0*. U* $1{,}2$ *funkcija* f *pada, dakle je* $f'(1{,}2) < 0$*. Ni u kojoj točki grafa od* f *tangenta nije horizontalna (paralelna s osi apsicsa), pa* f *nema stacionarnih točaka. Budući da u* 1 *graf ima špicu,* $f'(1)$ *ne postoji, pa ne može biti jednak* 1*. U* $0{,}1$ *funkcija raste pa je* $f'(0{,}1) > 0$*, a u* $1{,}1$ *funkcija* f *pada, dakle je* $f'(1{,}1) < 0$*, odnosno nemoguće je da je* $f'(0{,}1) < f'(1{,}1)$*.*

5. Realna funkcija f jedne varijable zadana je pravilom

$$f(x) = \begin{cases} 1 - \sin(\pi x), & x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ \ln\log(1/x), & 0 < x < 1 \end{cases}.$$

Označite sve točne tvrdnje o funkciji f.

☐ Domena te funkcije je cijeli skup $\mathbb{R}$.

☐ Ta funkcija je periodična.

☑ $f(-1) = 1$.

☐ Graf te funkcije može se nacrtati u jednom potezu, tj. sastoji se od samo jednog dijela.

☑ Na $\langle 0, 1\rangle$ funkcija f je padajuća.

☐ $f'(0) = 0$.

☑ Za $x < 0$ funkcija poprima samo nenegativne vrijednosti.

☑ Među nultočkama te funkcije su $1/10$ i $-3/2$.

Funkcija je definirana po jednom pravilu za $x < 0$, po drugom u 0 i po trećem za $0 < x < 1$, dakle joj je domena $\langle -\infty, 1\rangle$. Budući da periodičnost podrazumijeva i periodičnost domene (ili da je domena cijeli $\mathbb{R}$), funkcija već zbog svoje domene ne može biti periodična. Ako je $x = -1$, on je negativan pa se u funkciju uvrštava po prvom pravilu, dakle je $f(-1) = 1 - \sin(\pi \cdot (-1)) = 1 - \sin(-\pi) = 1 - 0 = 1$. Budući da je $1 - \sin(\pi \cdot 0) = 1$, prvo pravilo se ne podudara s drugim u 0 pa se tamo graf razdvaja (a i zbog trećeg pravila isto); specijalno, $f'(0)$ ne postoji. Na $I = \langle 0, 1\rangle$ pravilo funkcije je $\ln \log(1/x)$. Što je $x \in I$ veći, to je $\frac{1}{x}$ manji. Prirodni i dekadski logaritam su rastuće funkcije, dakle što je $\frac{1}{x}$ manji, to je i $\ln \log(1/x)$ manji. Odnostno, što je $x \in I$ veći, to je $f(x)$ manji, dakle je funkcija na I padajuća. Budući da sinusi svih brojeva poprimaju vrijednosti između -1 i 1, kad ih oduzimamo od 1 dobivamo iznose između 0 i 2, dakle je za negativne x naša funkcija nenegativna. Kad $1/10$ i $-3/2$ uvrstimo u funkciju (prvo po trećem, a drugo po prvom pravilu) dobivamo iznos 0, dakle se radi o nultočkama.

6 Osnovna svojstva i primjene derivacija

1. Ako je druga derivacija neke funkcije f na intervalu I negativna, onda je na intervalu I prva derivacija te iste funkcije f <u>*padajuća.*</u>

   Ako je g' negativna na I, onda je g padajuća na I. U gornjoj rečenici se ta činjenica primjenjuje na funkciju $g = f'$.

2. Neka je c nultočka druge derivacije funkcije f. Označite sve točne tvrdnje (tj. tvrdnje koje vrijede za sve funkcije f i sve nultočke c njihovih drugih derivacija):

   ☐ $f(c) = 0$

   ☐ $f'(c) = 0$

   ☑ $f''(c) = 0$

   ☐ c je stacionarna točka funkcije f

   ☐ c je kritična točka funkcije f

   ☐ c je točka infleksije funkcije f

   ☐ Moguće je da $f'(c)$ ne postoji.

   ☐ Moguće je da c nije u domeni funkcije f.

   ☑ Tangenta na graf funkcije f' u točki s apscisom c je horizontalna.

   ☐ Tangenta na graf funkcije f u točki s apscisom c je horizontalna.

   ☑ c je stacionarna točka funkcije f'.

   ☑ c je kritična točka funkcije f'.

   Tvrdnju da je c nultočka od druge derivacije funkcije f simbolički zapisujemo s $f''(c) = 0$. No, tada c može i ne mora biti nultočka od f i/ili od f'. Nultočka od f'' je stacionarna i stoga ujedno i kritična točka od f', ali ne mora biti stacionarna odnosno kritična točka od f. Budući da je nultočka od f'' stacionarna točka od f', to znači da je u točki s apscisom c tangenta na graf od f' horizontalna, ali budući da ne znamo je li $f'(c) = 0$, ne možemo znati je li tangenta na graf od f u točki s apscisom c horizontalna. Nultočka od f'' je „kandidat“ za točku infleksije od f, ali to ne mora biti (npr. ako je $f(x) = x^4$, onda je 0 nultočka od f'', ali nije točka infleksije od f). Da bi postojala $F'(c)$, mora postojati $F(c)$, tj. c mora biti u domeni od F; uz $F = f'$ zaključujemo da ako je je $f''(c) = 0$, što znači da $f''(c)$ postoji, sigurno mora postojati i $f'(c)$. Naravno, to znači i da je c sigurno u domeni od f.

3. Za funkciju čiji graf je prikazan na slici na str. 12, označite sve točne tvrdnje:

   ☑ 0 je točka lokalnog minimuma ove funkcije.

   ☑ $f''(1)$ ne postoji.

   ☑ $f''(-1/2) < 0$

   ☑ Funkcija nema ni globalni minimum ni globalni maksimum.

   ☑ 1 je točka infleksije ove funkcije.

   ☑ 0 je točka infleksije ove funkcije.

   S grafa je vidljivo da je $f(0)$ manje od vrijednosti $f(x)$ za sve $x \neq 0$ iz, primjerice, intervala $\langle -0.2, 0.2 \rangle$, dakle je po definiciji 0 točka lokalnog minimuma te funkcije.

Budući da u točki $(1, f(1))$ graf ima „špicu", znači da $f'(1)$ ne postoji, a onda ne može postojati ni $f''(1)$. Za $x = -\frac{1}{2}$ je funkcije konkanvna pa je $f''\left(-\frac{1}{2}\right) < 0$. Vidljivo je da funkcija postiže proizvoljno male vrijednosti kako x postaje sve negativniji, a proizvoljno velike kako x postaje sve veći, dakle ova funkcije nema globalnih ekstrema. Neposredno lijevo od $c = 0$ funkcija je konkavna, a neposredno desno je konveksna (i funkcija je definirana u 0) dakle je 0 točka infleksije. Analogno, neposredno lijevo od $c = 1$ funkcija je konveksna, a neposredno desno je konkavna (i funkcija je definirana u 1) dakle je 1 točka infleksije.

4. Funkcija $f : \langle -2, 1] \to \mathbb{R}$ zadana je formulom $f(x) = (x^3 + x^2 + 2x + 2)\exp(-x)$. Koje su joj kritične točke?

   ☐ -2

   ☐ -1

   ☑ 0

   ☑ 1

   ☐ 2

   ☐ jedna ili više njih koje nisu navedene u ostalim opcijama

   Budući da je 1 zatvoreni rub intervala koji čini domenu, u 1 ne postoji f' te je 1 sigurno kritična točka. S druge strane -2 i 2 nisu u domeni pa sigurno nisu kritične točke. Funkcija je elementarna, pa su jedine ostale kritične točke njezine stacionarne točke. Deriviramo li $f(x)$ dobivamo $f'(x) = x^2(2 - x)\exp(-x)$. Rješenja jednadžbe $f'(x) = 0$ su 0 i 2. Od toga je samo 0 u domeni funkcije f, dakle je 0 njezina stacionarna i stoga ujedno kritična točka, odnosno 0 i 1 su jedine kritične točke funkcije f.

5. Označite sve točne tvrdnje (dakle, tvrdnje koje vrijede za sve realne funkcije jedne varijable).

   ☐ Ako funkcija ima samo jednu točku lokalnog minimuma, to je ujedno i točka globalnog minimuma.

   ☐ Ako je c stacionarna točka funkcije, onda je c točka lokalnog ekstrema te funkcije.

   ☑ Ako je c točka globalnog maksimuma funkcije, onda je to ujedno točka lokalnog maksimuma te funkcije.

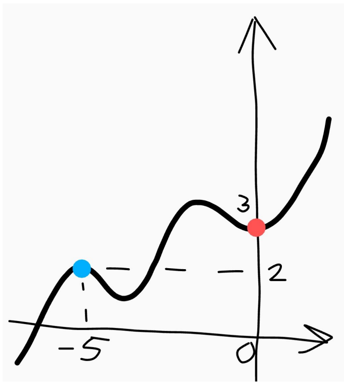
   ☑ Funkcija može imati više od jedne točke globalnih maksimuma.

   ☐ Ako je c točka lokalnog minimuma funkcije, onda je c njezina stacionarna točka.

   ☐ Ako je M najveći od lokalnih maksimuma funkcije, onda je M njezin globalni maksimum.

   ☐ Svaki lokalni minimum je manji od svakog lokalnog maksimuma.

   Jedinstvenost točke lokalnog minimuma ne garantira da se radi o točki globalnog minimuma; primjerice, funkcija s grafom na str. 6 ima samo jednu točku lokalnog minimuma (malo veću od 3, a uopće nema točke globalnog minimuma.). Stacionarna točka ne mora biti točka lokalnog ekstrema, primjerice 0 je stacionarna točka funkcije $f(x) = x^3$, a nije njezina točka lokalnog ekstrema. Svaka točka globalnog maksimuma ujedno je i točka lokalnog maksimuma (jer interval iz definicije lokalnog maksimuma *postaje čitava domena). Iznos globalnog maksimuma, ako uopće postoji, je jedinstven, ali se može postizati u više točaka; primjerice, funkcija s grafom na str. 9 ima beskonačno mnogo točaka globalnog maksimuma (ali samo jedan globalni maksimum* 2*). Točka lokalnog minimuma mora biti kritična, ali ne mora biti stacionarna točka funkcije; primjerice,* 0 *je točka lokalnog (i globalnog) minimuma funkcije apsolutne vrijednosti, ali nije njezina stacionarna točka. Najveći od lokalnih maksimuma ne mora biti globalni maksimum; primjerice, funkcija s grafom na str. 3 postiže tri lokalna maksimuma, od koji je najveći onaj koji se postiže u točki (otprilike)* $3{,}5$*, ali ta funkcija uopće nema globalni maksimum. Također, ovisno o funkciji neki lokalni minimumi mogu biti veći od nekih lokalnih maksimuma; primjerice, funkcija s grafom na slici dolje postiže lokalni minimum (crveno)* 3 *u točki* 0*, a lokalni maksimum (plavo)* 2 *u točki* -5*.*



7 Lokalni i globalni ekstremi. Implicitno i parametarski zadane krivulje u ravnini.

1. Točka c iz domene funkcije f ima svojstvo da za sve x iz domene funkcije f vrijedi $f(x) \leq f(c)$. U tom slučaju kažemo da je c <u>točka globalnog maksimuma funkcije f</u>.

   Ako ste napisali da je c globalni maksimum, to je krivo — c je točka globalnog maksimuma, a globalni maksimum je $f(c)$.

2. Krivulja u ravnini je zadana implicitnom jednadžbom $\sin(x+y)+1 = \cos(xy)$. Označite sve istinite tvrdnje o toj krivulji.

   ☑ Ta krivulja prolazi kroz ishodište.

   ☐ Sve točke te krivulje su unutar kružnice polumjera 2 oko ishodišta.

   ☐ Ta krivulja je simetrična s obzirom na x-os.

   ☐ Ta krivulja je simetrična s obzirom na y-os.

   ☑ Ta krivulja je simetrična s obzirom na pravac $y = x$.

   ☑ Ta krivulja ima beskonačno mnogo sjecičta s x-osi.

   ☑ Ta krivulja ima beskonačno mnogo sjecičta s y-osi.

   Budući da je $\sin(0+0)+1 = \cos(0 \cdot 1)$, ishodište zadovoljava jednadžbu krivulje pa ona prolazi kroz njega. Budući da je prirodna domena od sinusa i kosinusa cijeli skup $\mathbb{R}$, u jednadžbu ove krivulje ima smisla uvrštavati sve parove (x, y), tj. nema ograničenja unutar kojeg bi se nalazile točke krivulje. Budući da se zamjenom y s $-y$ odnosno x s $-x$ u jednadžbi krivulje ta jednadžba mijenja (dobiva se neekvivalentna jednadžbe), krivulja nije simetrična ni s obzirom na x-os ni s obzirom na y-os. No, zamjenom x i y u jednadžbi krivulje ta se jednadžba ne mijenja, što znači da je krivulja simetrična s obzirom na pravac $y = x$. Ako stavimo $y = 0$ u jednadžbu krivulje, dobivamo jednadžbu $\sin(x)+1 = 1$, tj. $\sin x = 0$, koja ima beskonačno mnogo rješenja, dakle krivulja u beskonačno mnogo točaka siječe x-os. Analogno (ili zbog simetrije s obzirom na $y = x$) se vidi da i sa y-osi ima beskonačno mnogo sjecišta.

3. Krivulja u ravnini je zadana eksplicitnom jednadžbom $y = 1 - \log(-x)$. Označite sve parove parametarskih jednadžbi koji predstavljaju istu ovu krivulju.

   ☑ $x = t$, $y = 1 - \log(-t)$ za $t < 0$.

   ☐ $x = t$, $y = 1 - \log(-t)$ za $t > 0$.

   ☐ $x = 10^t$, $y = 1 + t$ za t iz cijelog $\mathbb{R}$.

   ☑ $x = 1/t$, $y = 1 + \log(-t)$ za $t < 0$.

   ☑ $x = -10^(1-t)$, $y = t$ za t iz cijelog $\mathbb{R}$.

   Ako je $y = f(x)$, onda je najjednostavnija parametrizacija te krivulje $x = t$, $y = f(t)$ za t iz domene funkcije f. U našem slučaju domena funkcije f je $\langle -\infty, 0\rangle$ (a slika joj je $\mathbb{R}$) pa dobivamo parametrizaciju $x = t$, $y = 1-\log(-t)$ za $t < 0$. Parametarske jednadžbe $x = t$, $y = 1 - \log(-t)$ za $t > 0$ ne predstavljaju nikoju krivulju jer se nikoji $t > 0$ ne može uvrstiti u y. Ako gledamo parametarske jednadžbe $x = 10^t$, $y = 1+t$ za t iz cijelog $\mathbb{R}$, onda supstitucijom $t = \log(x)$ dobivamo $y = 1+\log x$, što očigledno (već zbog prirodne domene) nije ista krivulja kao $y = 1 - \log(-x)$. Ako *gledamo parametarske jednadžbe $x = 1/t$, $y = 1 + \log(-t)$ za $t < 0$, supstitucija $t = 1/x$ daje $y = 1+\log(-1/x) = 1+\log((-x)^{-1}) = 1-\log(-x)$, a budući da ako t poprima sve negativne vrijednosti isto vrijedi i za $x = 1/t$, zaključujemo da ovo jest jedna parametrizacija zadane krivulje. Naposlijetku, ako iz posljednjih parametarskih jednadžbi drugu supstituiramo u prvu dobit ćemo $x = -10^(1 - y)$ za $y \in \mathbb{R}$, što je ekvivalentno s $y = 1 - \log(-x)$ i budući da je $\mathbb{R}$ slika funkcije f ovo je ista funkcija kao polazna.*

4. Koeficijent smjera tangente na krivulju zadanu implicitno jednadžbom $xy = x^3 + x^2 + x + 1$ u njezinoj točki s apscisom 1 iznosi:

   ☐ -2

   ☐ -1

   ☐ 0

   ☐ 1

   ☑ 2

   ☐ definiran je, ali nije nijedno od gore ponuđenih pet vrijednosti

   ☐ nije definiran, tangenta u toj točki je vertikalna

   ☐ ne postoji točka sa apscisom 1 na krivulji dane jednadžbe

   Uvrstimo $x = 1$ u $xy = x^3 + x^2 + x + 1$ i dobit ćemo $y = 4$, tj. razmatrana točka je $(1, 4)$. Implicitno deriviramo $xy = x^3 + x^2 + x + 1$ po x i dobijemo $y + xy' = 3x^2 + 2x + 1$. U to uvrstimo $x = 1$ i $y = 4$ i dobivamo $4 + y' = 6$, odnosno $y' = -2$ te je to traženi koeficijent smjera tangente.

5. Krivulja je zadana parametarski jednadžbama $x = sin(\pi t)$, $y = \ln(t)$ za $t > 0$. Koji je iznos brzine u njezinoj točki određenoj parametrom $t = 1$?

   ☐ 0

   ☐ 1

   ☐ $\ln(\pi)$

   ☑ $\sqrt{1 + \pi^2}$

   ☐ $\sqrt{1 - \pi^2}$

   ☐ $-1/\pi$

   ☐ nijedno od ponuđenog nije točno

   Deriviranjem po t dobijemo $\dot{x}(t) = \pi \cos(\pi t)$ i $\dot{y}(t) = 1/t$. Za $t = 1$ dobivamo horizontalnu i vertikalnu komponentu brzine $\dot{x}(1) = -\pi$ i $\dot{y}(1) = 1$. Stoga je traženi iznos brzine $v = \sqrt{\pi^2 + 1}$.

8 Kmopleksni brojevi. Polarne koordinate u ravnini.

1. Argument kompleksnog broja $z = -2\exp(-2i)$ iznosi $\underline{\pi - 2}$.

   Imamo $z = -2\exp(-2i) = -2\,(\cos(-2) + i\sin(-2)) = 2\,(-\cos 2 + i\sin 2) = 2\,(\cos(\pi-2) + i\sin(\pi-2))$.

2. Zadani su kompleksni brojevi $z = 5i - 2$, $w = 5\exp(i\pi/4)$. Označite sve točne tvrdnje o njima:

   ☑ Umnožak ta dva broja nalazi se u II. kvadrantu kompleksne ravnine.

   ☐ $\overline{z} < \overline{w}$

   ☐ Argument od z je $\operatorname{arctg}(-5/2)$.

   ☑ w^2 je čisto imaginaran broj.

   ☐ U skupu $\mathbb{C}$, četvrti korijeni od $|w|$ imaju iznose $5^(1/4)$ i $-5^(1/4)$.

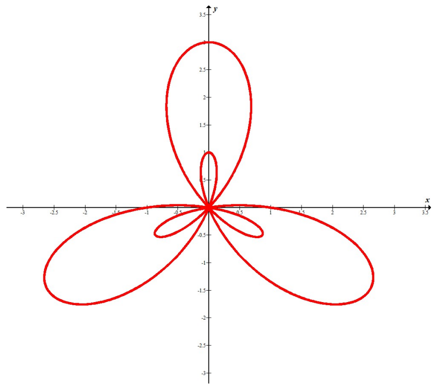
   ☑ z/w ima apsolutnu vrijednost veću od 1.

   Argument od w je $\theta = \pi/4$, *a od z argument je jedan od dva kuta kojima je tangens jednak* $-\frac{5}{2}$; *budući da je z očigledno u II. kvadrantu, argument mu nije* $\operatorname{arctg}(-5/2)$ *(koji je između* $-\pi/2$ *i* 0*), nego* $\varphi = \pi + \operatorname{arctg}(-5/2) = \pi - \operatorname{arctg}(5/2)$. *Budući da je* arctg *rastuća funkcija i* $\operatorname{arctg} 1 = \pi/4$, *slijedi da je* $\operatorname{arctg}(5/2) > \pi/4$ *odnosno* $\pi/2 < \varphi < 3\pi/4$. *Stoga je argument od* $z\,w$, *a to je* $\theta + \varphi$, *u intervalu* $\langle 3\pi/4, \pi\rangle$, *odnosno* $z\,w$ *je u II. kvadrantu. Argument od* w^2 *je* $2\vartheta = \pi/2$, *dakle* w^2 *jest čisto imaginaran broj. Kompleksne brojeve (osim onih koji su realni) nema smisla uspoređivati po veličini pa ne može biti* $\overline{z} < \overline{w}$. *Broj* $|w|$ *je* 5, *ali u skupu* $\mathbb{C}$ *on kao i svaki drugi broj ima četiri četvrta korijena, a ne samo dva. Apsolutna vrijednost od w je* 5, *a od z je* $\sqrt{(-2)^2 + 5^2} = \sqrt{29} > 5$, *odnosno* $|z/ww = |z|/|w| = \sqrt{29}/5 > 1$.

3. U polarnim koordinatama sustavom nejednakosti $2 \le r \le 4$, $1 \le \varphi \le 3$ opisan je koji geometrijski lik?

   Točan odgovor među raznim ponuđenima je „presjek kruňog isječka i kružnog prstena“. Naime, $2 \le r \le 4$ *opisuje sve točke ravnine koje su od ishodišta udaljene za najmanje* 2, *a najviše* 4, *tj. te prve dvije nejednakosti opisuju kružni prsten sa središtem u ishodištu između (i uključivo) kružnica polumjera* 2 *i* 4. *No, druge dvije nejednakosti,* $1 \le \varphi \le 3$, *opisuju sve točke ravnine kojima je polarni kut između* 1 *i* 3, *tj. koje se nalaze unutar kuta s vrhom* 0 *koji ima iznos* 2 *(ali se nalazi između polupravaca* $\varphi = 1$ *i* $\varphi = 3$*). Budući da i one trebaju biti zadovoljene, od prstena uzimamo samo dio koji je unutar tog kuta, a to je presjek kružnog isječka i prstena.*

4. Na slici je prikazana jedna krivulja čija jednadžba u polarnim koordinatama je $r = f(\varphi)$, pri čemu pretpostavljamo da je ishodište polarnog koordinatnog sustava isto kao nacrtanog Kartezijevog i da se polarna os podudara s pozitivnim dijelom x-osi. Označite sve istinite tvrdnje o funkciji f!



☐ f je parna.

☑ f je neparna.

☐ f poprima samo nenegativne vrijednosti

☑ f je periodična s temeljnim periodom $2\pi/n$, gdje je n prirodan broj.

☐ $f(0) = 0$

☑ f poprima samo vrijednosti manje od 5

☑ $f(\pi) < f(\pi/2)$

☑ $f(3\pi/2) < 0$

Funkcija f sigurno nije parna jer ne posjeduje zrcalnu simetriju s obzirom na polarnu os. No, f je neparna jer ni za koju točku krivulje, osim točaka koje su na polarnoj osi, na njoj nije njoj zrcalno simetrična točka (s obzirom na polarnu os). Moguće je nacrtati kut s vrhom u ishodištu tako da unutar njega nema točaka krivulje, dakle f nije nenegativna za sve φ. Krivulja posjeduje rotacijsku simetriju reda 3, dakle je temeljni period od f jednak $2\pi/3$. Kad krenemo od polarne osi ($\varphi = 0$) u pozitivnom smjeru pratiti krivulju, prva točka je na udaljenosti, bar približno, 1 od ishodišta, dakle je $f(0) \approx 1$. Vidljivo je i da je $f(\pi/2) \approx 3$ i $f(\pi) \approx 1$. Cijela krivulja je unutar kružnice polumjera 3, dakle f poprima samo vrijednosti ≤ 3, odnosno manje od 5. Budući da nema točke s $\varphi = 3\pi/2$, znači da je $f(3\pi/2) < 0$ (ili $3\pi/2$ nije u domeni, no zbog izgleda krivulje očito je da se radi o krivulji generiranoj nekakvom transformacijom sinusa ili kosinusa, a njima je prirodna domena $\mathbb{R}$).

5. U kompleksnoj ravnini, rješenje nejednadžbe $\mathrm{Re}(z) > |z|$ je <u>*prazan skup*</u>.

Apsolutna vrijednost svakog kompleksnog broja je nenegativan realan broj, dok realni dio kompleksnog broja može biti pozitivan, nula ili negativan. Ako je negativan, nejednakost očito nije zadovoljena. Ako bi pak postojao $z = x + i\,y$ s $x \geq 0$ takav da je zadovoljena nejednakost, dobili bismo $x > \sqrt{x^2 + y^2} \geq \sqrt{x^2 + 0^2} = x$, odnosno $x > x$, što je nemoguće.

9 Limesi funkcija

1. Koliko iznosi limes
$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\ln\left(\frac{x+3}{5}\right) =?$$

Taj limes iznosi $+\infty$ *slijeda i* $-\infty$ *zdesna, dakle spada u nepostojeće limese. Naime, ako je* x *blizu* 0*, onda je* $\ln\left(\frac{x+3}{5}\right)$ *blizu* $\ln\frac{3}{5} < 0$*, pa imamo limes tipa* $\frac{a}{0}$ *koji iznosi* ∞*. Za* $x \to 0-$ *imamo negativno kroz negativno, dakle* $+\infty$*, a za* $x \to 0+$ *imamo negativno kroz pozitivno, dakle* $-\infty$*.*

Napomena. *Zapravo, limes je sadržavao Tippfehler, trebalo je biti* 4 *umjesto* 5 *u limesu pa bi uz* $f(x) = \ln(x+3)$ *dobili*

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\ln\left(\frac{x+3}{4}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{\ln(x+3)-\ln(4)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\ln(x+3)-\ln(4)}{x-0} = f'(0) = \frac{1}{3}.$$

2. Funkcija je definirana s $f(x) = 2x^2/x + 3/(x+3)$. Za svaki od iznosa $c = -\infty$, -4, $-3+$, $-3-$, $0+$, $0-$, $1+$, $1-$, $+\infty$ treba odabrati vrijednost L između dolje ponuđenih tako da je $\lim\limits_{x\to c} f(x) = L$:

   (a) $L = -\infty$ *Ovo je limes za* $c = -\infty$ *i* $c = -3-$*.*

   (b) $L = +\infty$ *Ovo je limes za* $c = +\infty$ *i* $c = -3+$*.*

   (c) Limes ne postoji, ali nije beskonačan.

   (d) Limes nema smisla.

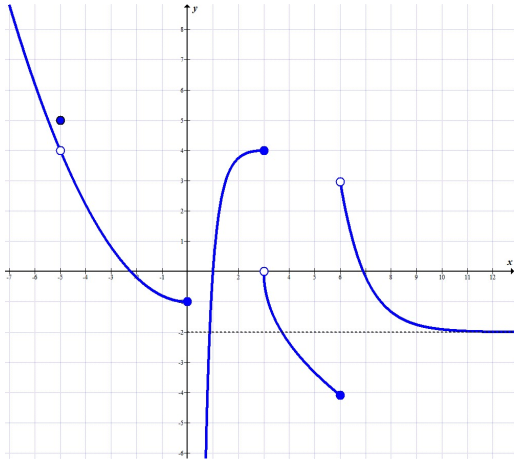
   (e) 0

   (f) 1 *Ovo je limes za* $c = 0\pm$*.*

   (g) -11 *Ovo je limes za* $c = -4$*.*

   (h) realan broj različit od 0, 1, -11 *Ovo je limes za* $c = 1+$ *i* $c = 1-$ *jer su ta dva limesa jednaka* $f(1) = 11/4$*.*

Funkcija f *je racionalna, s prirodnom domenom* $\mathbb{R}\setminus\{0,-3\}$*. Stoga za sve* $c \neq \pm\infty$*,* 0*,* -3 *(u našem slučaju to su* $c = -4$ *i* $c = 1$*) vrijedi* $\lim\limits_{x\to c} f(x) = \lim\limits_{x\to c+} f(x) = \lim\limits_{x\to c-} f(x) = f(c)$*. Nadalje, za racionalne funkcije limesi u* $-\infty$ *i* $+\infty$*, ako postoje, se podudaraju i općenito se određuju kao limesi kvocijenta vodećih članova brojnika i nazivnika. Svedemo li funkciju* f *na zajednički nazivnik vidimo da je* $f(x) = \frac{2x^3+6x^2+3x}{x^2+3x}$*, odnosno kad* $x \to \pm\infty$ $f(x)$ *se ponaša kao* $\frac{2x^3}{x^2} = 2x$*, dakle za* $c = -\infty$ *dobivamo limes* $-\infty$*, a za* $c = -+infty$ *dobivamo limes* $+\infty$*. Ako je* $c = 0\pm$*,* $\lim\limits_{x\to c} f(x) = \lim\limits_{x\to 0\pm}\dfrac{2x^2+6x+3}{x+3} = \dfrac{3}{3} = 1$*. Ako je* $c = -3\pm$*,* $\lim\limits_{x\to c} f(x) = \lim\limits_{x\to -3\pm}\dfrac{2x^2+6x+3}{x+3}$*, što je limes tipa* $\frac{a}{0}$ *s* $a = 3$*, dakle iznosi* ∞*; pritom, ako je* $c = -3-$*, brojnik je pozitivan (blizu 3), a nazivnik negativan pa dobivamo* $-\infty$*, a ako je* $c = -3+$*, i brojnik i nazivnik su pozitivni pa dobivamo* $+\infty$*.*



3. Na slici gore je prikazan graf jedne realne funkcije f. Za svaki od iznosa $c = -\infty$, -5, $0-$, $0+$, $1-$, $1+$, $3-$, $3+$, 6 i $+\infty$ treba odabrati vrijednost L između dolje ponuđenih tako da je $\lim\limits_{x \to c} f(x) = L$:

   (a) $L = -\infty$ *Ovo je limes za* $c = 0+$ *jer imamo vertikalnu asimptotu* $x = 0$ *zdesna.*

   (b) $L = +\infty$ *Ovo je limes za* $c = -\infty$ *jer vidimo da kad* x*-evi postaju sve manji, vrijednosti funkcije postaju sve veće, i to neograničneo velike.*

   (c) Limes ne postoji, ali nije beskonačan. *Ovo je točno za* $c = 6$ *jer se tu limesi slijeva i zdesna razlikuju, ali su konačni.*

   (d) Limes nema smisla.

   (e) -4

   (f) -2 *Ovo je limes za* $c = +\infty$ *jer vidimo da je* $y = -2$ *desna horizontalna asimptota.*

   (g) -1 *Ovo je limes za* $c = 0-$ *jer vidimo da su za negativne* x *blizu nule vrijednosti* $f(x) \approx 1$.

   (h) 0 *Ovo je limes za* $c = 1+$, $c = 1-$ *i* $c = 3+$. *Kad je* $x \approx 1$, $f(x) \approx 0$, *a isto tako ako je* x *blizu* 3, *ali malo veći od* 3.

   (i) 3

   (j) 4 *Ovo je limes za* $c = -5$ *i za* $c = 3-$. *Kad je* $x \approx -5$, $f(x) \approx 4$, *a isto tako ako je* x *blizu* 3, *ali malo manji od* 3.

   (k) 5

4. Ako znamo da je limes od $f(x)$ kad x teži u 1 slijeva jednak 1, a limes od $f(x)$ kad x teži u 1 zdesna jednak $+\infty$, ozněite tvrdnje koje su sigurno točne (dakle, koje su istinite neovisno o drugim svojstvima funkcije f).

   ☐ f ima horizontalnu asimptotu $y = 1$

   ☑ f ima vertikalnu asimptotu $x = 1$

   ☐ $f(1) = 1$

   ☐ 1 nije u domeni funkcije f

   ☑ postoji interval I oko 1 takav da je $f(x) > 0$ za $x \in I$ $(x \neq 1)$

Limes funkcije kad $x \to 1\pm$ ne govori ništa o tome je li 1 u domeni funkcije, koliki je iznos funkcije u 1 niti kako se f ponaša za jako velike ili male x, tj. postoji li horizontalna asimptota od f. Čim je jedan od limesa kad $x \to \pm 1$ beskonačan, po definiciji funkcija ima vertikalnu asimptotu $x = 1$. Budući da je $\lim_{x\to 1-} f(x) = 1$, znači da su na nekom intervalu lijevo od 1 iznosi $f(x) \approx 1$, dakle pozitivni; također, budući da je $\lim_{x\to 1+} f(x) = +\infty$, znači da su na nekom intervalu lijevo od 1 iznosi $f(x)$ jako veliki, dakle pozitivni.

5. Ponuđene su različite formule za $f(x)$. Označite funkcije koje posjeduju desnu kosu asimptotu.

   ☑ $f(x) = (x+2)^4/(x-1)^3$

   ☐ $f(x) = 5 - 1/(x+1)$

   ☑ $f(x) = x + \exp(-x)/x$

   ☐ $f(x) = sin(x)/x$

   ☐ $f(x) = ln(x)/x$

   ☐ $f(x) = (x^2+x+1)/(x^3+x^2+x+1)$

   Racionalne funkcije imaju kosu asimptotu ako im je brojnik za 1 većeg stupnja od nazivnika. Kad ostale ne-racionalne funkcije podijelimo s x dobivamo redom $1 + \exp(-x)/x^2$, $\sin(x)/x^2$, $\ln(x)/x^2$, koje kad $x \to +\infty$ imaju limese redom 1, 0 i 0, dakle samo za $f(x) = x + \exp(-x)/x$ je moguća desna kosa asimptota, s $k = 1$. Provjerimo li za tu funkciju limes od $f(x) - k\,x = f(x) - x = \exp(-x)/x$ kad $x \to +\infty$, vidimo da dobivamo $l = 0$, dakle ta funkcija ima desnu kosu asimptotu $y = x$.

10 Neprekidnost, derivabilnost i integrabilnost funkcija

1. Realna funkcija f kao domenu ima interval I (bilo otvoren, poluotvoren ili zatvoren). Graf te funkcije se može nacrtati u jednom potezu. Što od sljedećeg je točno?

   ☑ f je sigurno neprekidna na I.

   ☐ f može i ne mora biti neprekidna na I.

   ☐ f sigurno postiže globalni minimum i maksimum na I.

   ☑ f može i ne mora postizati globalni minimum i maksimum na I.

   ☑ f može mijenjati predznak samo u nultočkama.

   ☐ Moguće je da f promijeni predznak i u nekoj točki koja nije njezina nultočka.

   ☐ f je sigurno derivabilna na I.

   ☑ f može i ne mora biti derivabilna na I.

   Ako je domena funkcije f povezana, dakle ako joj je domena interval, onda je njezina neprekidnost ekvivalentna s mogućnošću crtanja njenog grafa u jednom potezu, bez podizanja olovke s papira (ali ako je domena funkcije unija više disjunktinih intervala, onda se neovisno o tome je li f neprekidna ili nije njezin graf sigurno ne može nacrtati u jednom potezu). Ako je f neprekidna i I zatvoren, onda f po Bolzano-Weierstraßovom teoremu sigurno postiže globalni minimum i maksimum. No, ako je I nije zatvoren, čak i neprekidna funkcija f na I ne mora postizati globalne ekstreme, npr. $f : \langle 0, \pi\rangle \to \mathbb{R}$, $f(x) = \operatorname{ctg} x$. Neprekidne funkcije kojima je domena interval mogu mijenjati predznak samo u nultočkama, budući da im se graf može nacrtati u jednom potezu. Naime, inače bi promjena predznaka u c ($f(c) \neq 0$ i $f(x) > 0$ za $x < c$ i $f(x) > 0$ za $x > c$ ili obrnuto) značila bi podizanje olovke s papira na apscisi c. Neprekidna funkcija kojoj je domena interval ne mora biti derivabilna (npr. funkcija apsolutne vrijednosti ili funkcija trećeg korijena).

2. Koje od sljedećih funkcija su neprekidne na svojim prirodnim domenama?

   ☑ $f(x) = \operatorname{tg} x$ ☑ $f(x) = |x|$ ☑ $f(x) = \frac{1}{x}$ ☑ $f(x) = \frac{1}{\ln(x)+\sqrt{x}}$ ☑ $f(x) = \sin x$

   Sve funkcije osim druge su elementarne, a sve elementarne funkcije su neprekidne na svojim prirodnim domenama. Druga pak funkcija, funkcija apsolutne vrijednosti, je također neprekidna na svojoj prirodnoj domeni.

3. Funkcija f ima za domenu skup $\mathbb{R} \setminus \{\pi\}$. Limes of f kad x teži u π slijeva iznosi 0, a kad x teži u π zdesna iznosi $+\infty$. Što od sljedećeg je točno za funkciju f?

   ☐ f je neprekidna u π

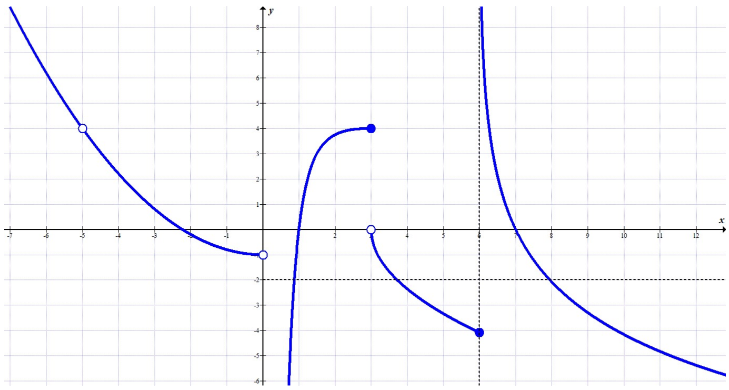
   ☐ f ima uklonjivi prekid u π

   ☐ f ima skok u π

   ☐ f u π ima bitni prekid

   ☐ f u π nije ni neprekidna ni prekidna, pitanje neprekidnosti u π za ovu funkciju nema smisla.

   Ako c nije u domeni funkcije f, onda u c ne razmatramo pitanje neprekidnosti — u c niti je f neprekidna niti ima prekid.



4. Na slici gore je prikazan graf jedne realne funkcije f. Označite sve točne tvrdnje o toj funkciji.

☐ f je neprekidna

☐ f ima prekid u -5

☐ f ima prekid u 0

☑ f ima prekid u 3

☑ f ima prekid u 6

☑ na f ograničenu na interval $\langle 6, +\infty\rangle$ se može primijeniti Lagrangeov teorem srednje vrijednosti

☑ f je Riemann-integrabilna od 1 do 5

☐ f je ograničena

☐ f je Riemann-integrabilna od -3 do $-1/2$ i taj integral je pozitivan

☐ f u 0 ima bitni prekid

☐ f u -5 ima uklonjivi prekid

☑ f u 6 ima bitni prekid

☑ f u 3 ima skok

☑ antiderivacija od f ograničene na interval $\langle -\infty - 5\rangle$ je rastuća

☐ antiderivacija od f ograničene na interval $\langle -\infty - 5\rangle$ je konveksna

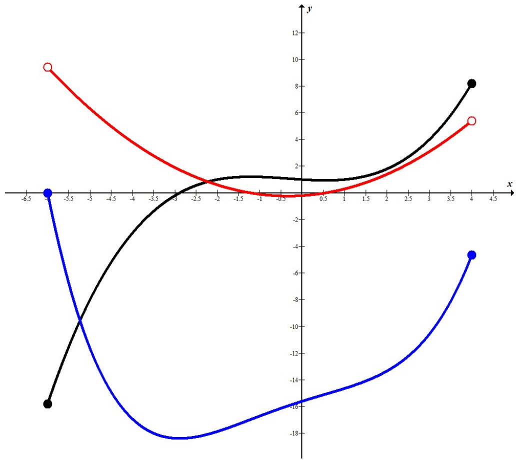
Domena funkcije s grafom na slici je $\mathbb{R} \setminus \{-5, 0\}$, dakle u -5 i 0 funkcija nema nikakve prekide. U 3 ona ima konačne, ali različite limese slijeva i zdesna, dakle u 3 ima prekid i radi se o skoku (te dakle f nije neprekidna funkcija). U 6 funkcija slijeva ima konačni limes, a zdesna beskonačni, dakle u 6 ona ima bitni prekid. S grafa vidimo da je f derivabilna na $\langle 6, +\infty\rangle$, dakle se na tom intervalu na nju može primijeniti Lagrangeov teorem srednje vrijednosti. Na $[1, 5]$ funkcija je po dijelovima neprekidna (ima jedan prekid), dakle je na tom intervalu Riemann-integrabilna. Na $[-3, -1/2]$ funkcija je neprekidna, dakle i integrabilna, ali za lik omeđen njenim grafom, vertikalama $x = -3$ i $x = -\frac{1}{2}$ te s x-osi ima veći dio površine ispod nego iznad x-osi pa će njen integral od -3 do $-1/2$ biti negativan. Funkcija nije ograničena jer za $x \to -\infty$ i $x \to 6+$ postiže proizvoljno velike, a za $x \to +\infty$ proizvoljno male vrijednosti. Ako f ograničimo na $\langle -\infty - 5\rangle$ ona je pozitivna, dakle je ona derivacija neke rastuće funkcije, odnosno (svaka) antiderivacija joj je rastuća. Ako bi antiderivacija F od f na $\langle -\infty - 5\rangle$ bila konveksna, onda bi $F''(x) = (F'(x))' = f'(x)$ morala biti pozitivna, dakle bi f morala biti rastuća na $\langle -\infty - 5\rangle$, što nije.

11 Neodređeni i određeni integrali

1. Je li točna formula
$$\int f'(x)\,\mathrm{d}x = f(x)?$$

☐ da ☑ ne ☐ ovisi o kontekstu

Derivacija funkcije f je sigurno integrabilna (jer joj je f antiderivacija), ali neodređeni integral nije jedinstven. Ispravna formula bila bi $\int f'(x)\mathrm{d}x = f(x) + C$.



2. Na slici gore su prikazani grafovi realne funkcije F, njezine derivacije F? i jedne njezine antiderivacije f. Koji je koji?

☐ F je crvena, F' je crna, f je plava

☐ F je crvena, F' je plava, f je crna

☑ F je crna, F' je crvena, f je plava

☐ F je crna, F' je plava, f je crvena

☐ F je plava, F' je crna, f je crvena

☐ F je plava, F' je crvena, f je crna

Plavi i crni graf sadrže rubne točke pa odgovarajuće derivacije nisu definirane u -6 i 4, odnosno crveni graf mora biti graf od F'. Crveni graf predstavlja funkciju s dvije nultočke, dakle F' ima dvije nultočke, dakle F ima dvije stacionarne točke. Plavi graf ima samo jednu stacionarnu točku, dakle je graf od F crni, a plavi je graf od f. Ovo su samo najjednostavniji argumenti uz pretpostavku da znamo da je sigurno jedan od ponuđenih odgovora točan!

3. $\displaystyle\int_{-100}^{100} x\sin(x^2)\mathrm{d}x$ iznosi $\underline{0}$.

Radi se o određenom integralu neparne integrabilne funkcije na simetričnom segmentu, a takvi integrali iznose 0.

4. S I u ovom pitanju označimo $\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$, pri čemu je $a < b$. Zavisna i nezavisna varijabla su „čisti” brojevi. Označite sve točne tvrdnje!

☐ I je funkcija od x

☑ I je broj

☐ Iznos od I jednak je površini koju omeđuju graf funkcije f i pravci $x = a$, $x = b$, $y = 0$.

☑ Ako je $f(x) = -x^2$, I je negativan za svaki odabir a i b.

☐ I ne može biti 0 osim ako je f nulfunkcija.

☑ I nema smisla ako f nije ograničena.

☐ Ako f ima prekida u segmentu $[a, b]$, onda I ne postoji.

☐ Ako je f neprekidna, onda je $I = f(b) - f(a)$

Određeni integrali kao iznose imaju brojeve (pomnožene s umnoškom mjernih jedinica nezavisne i zavisne varijable), dakle je I broj, a ne funkcija. Pritom je I jednak površini koju omeđuju graf funkcije f i pravci $x = a$, $x = b$, $y = 0$ samo ako je f nenegativna na segmentu $[a, b]$. Ako je f nepozitivina na $[a, b]$, kao npr. $f(x) - x^2$, iznos integrala bit će nepozitivan; za $f(x) = -x^2$ iznos bi bio nula samo ako je $a = b = 0$, ali po pretpostavci je $a < b$, dakle je I u ovom slučaju negativna. Također, I može biti 0 i kad f nije nulfunkcija, npr. ako je $f(a) = -f(b)$ i f afina. Određni integrali nisu definirani, tj. nemaju smisla, za funkcije koje nisu ograničene. Funkcije koje su neprekidne ili po dijelovima neprekidne (imaju konačno mnogo prekida od kojih nijedan nije bitan) na $[a, b]$ su integrabilna na $[a, b]$. Ako je f neprekidna, po Newton-Leibnizovoj formuli je $I = F(b) - F(a)$, gdje je F neka antiderivacija od f, a ona u pravilu nije jednaka f.

5. U ovom pitanju s I je označen neki otvoren interval. Označčite sve točne tvrdnje!

☑ Ako je funkcija derivabilna na I, onda je integrabilna na svakom segmentu unutar I.

☑ Ako je funkcija neprekidna na I, onda je integrabilna na svakom segmentu unutar I.

☐ Ako je funkcija neprekidna na I, onda je derivabilna na I.

☐ Ako je funkcija integrabilna na svakom segmentu unutar I, onda je neprekidna na I.

☑ Određeni integral svake neprekidne funkcije movđe se izračunati pomoću neodređenog.

☑ Nedređeni integral svake neprekidne funkcije može se izražunati pomoću određenog.

☐ Antiderivacija, primitivna funkcija i neodređeni integral su sinonimi.

☐ Ako funkcija nije neprekidna, ne može imati antiderivaciju.

Derivabilnost povlači neprekidnost, a neprekidnost povlači integrabilnost. Obrati tih tvrdnji ne vrijede. Primjerice, funkcija petog korijena je neprekidna, ali nije derivabilna u nuli. Također, integrabilna funkcija ne mora biti neprekidna — po dijelovima neprekidne funkcije (funkcije s konačno mnogo ne-bitnih prekida) su integrabilne, pa mogu imati i antiderivacije. Po osnovnom teoremu infinitezimalnog računa, određeni integral neprekidne funkcije može se izračunati pomoću neodređenog i obrnuto. Antiderivacija i primitivna funkcija su sinonimi, a neodređeni integral je skup svih antiderivacija.

12 Metode integriranja i primjene integrala. Geometrijski vektori.

1. Koji od sljedećih zapisa je (ili su) rastavi na parcijalne razlomke racionalne funkcije $r(x) = \frac{3x^2+6x+2}{x^3+3x^2+2x}$? Napomena: Ne trebate provjeravati da ponuđeni odgovori u zbroju daju $r(x)$.

   ☑ $1/x + 1/(x+1) + 1/(x+2)$

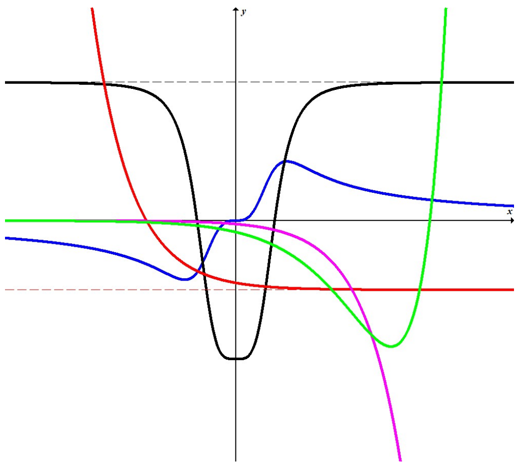
   ☐ $1/x + (2x+3)/(x^2+3x+2)$

   ☐ $(x^2-2)/(x^3+3x^2+2x) + 2/x$

   ☐ nijedno od predloženog nije rastav funkcije r na parcijalne razlomke

   ☐ r se ne može rastaviti na parcijalne razlomke

   Budući da je $r(x)$ prava racionalna funkcija, ona posjeduje rastav na parcijalne razlomke. Budući da je nazivnik od $r(x)$ jednak $x^3 + 3x^2 + 2x = x(x^2 + 3x + 2) = x(x+1)(x+2)$, rastav na parcijalne razlomke se sastoji od tri razlomka s konstantnim brojnicima, redom s nazivnicima x, $x + 1$ i $x + 2$.



2. Na slici gore su prikazani grafovi pet funkcija. Za koje od njih nepravi integral od $-\infty$ do $+\infty$ sigurno divergira?

   ☑ crni ☑ crveni ☐ plavi ☑ zeleni ☑ ružičasti

   Da bi nepravi integral od $-\infty$ do $+\infty$ imao šanse konvergirati, graf funkcije mora posjedovati x-os kao obostranu horizontalnu asimptotu.

3. Koliko iznosi prosječna vrijednost funkcije $f(x) = 3x^2$ na segmentu $[0, 10]$? <u>100.</u>

   Prosječna vrijednost neprekidne funkcije na segmentu jednaka je njezinom integralu po tom segmentu podijeljenom sa širinom segmenta:

$$\overline{f} = \frac{1}{10-0}\int_0^{10} 3x^2 \mathrm{d}x = \frac{1}{10}\left(10^3 - 0^3\right) = 100.$$

4. Ako je $f(x)$ funkcija gustoće neke slučajne varijable čija slika je interval $[0, 10]$, označite sve točne tvrdnje!

   ☑ Integral od $f(x)$ od 0 do 10 iznosi 1.

   ☑ Integral od $f(x)$ od $-\infty$ do $+\infty$ iznosi 1.

   ☑ Očekivana vrijednost slučajne varijable jednaka je integralu od $xf(x)$ u granicama od 0 do 10.

   ☑ Očekivana vrijednost slučajne varijable jednaka je integralu od $xf(x)$ u granicama od 0 do $+\infty$.

   ☑ $f(x) = 0$ za sve $x < 0$

   ☑ $f(x) = 0$ za sve $x > 10$

   ☐ Integral od $f(x)$ u granicama od 2 do 5 može biti negativan

   ☑ Integral od $f(x)$ u granicama od $-\infty$ do 1 je vjerojatnost da ta slučajna varijabla poprimi iznos manji od 1

   Funkcija gustoće mora biti normirana, tj. njen integral od $-\infty$ do $+\infty$ mora biti jednak 1. Očekivana vrijednost slučajne varijable s funkcijom gustoće $f(x)$ definira se kao integral od $x\,f(x)$ od $-\infty$ do $+\infty$. Budući da je u pitanju slika slučajne varijable $[0, 10]$, znači da je $f(x) = 0$ za $x \notin [0, 10]$ pa je za tu funkciju integral od $-\infty$ do $+\infty$ jednak integralu od 0 do 10 i isto tako za integral od $x\,f(x)$, a potonji je onda iz istog razloga jednak i integralu od 0 do $+\infty$. Funkcije gustoće ne mogu biti negativne ni za koji x, pa im ni integrali po nikojem intervalu ne mogu biti negativni. Po definiciji funkcije gustoće slučajne varijable je $P(X < 1) = \int_{-\infty}^{1} f(x)\mathrm{d}x$.

5. Ako je $\vec{v}$ neki geometrijski vektor i v njegov iznos, označite sve točne tvrdnje:

   ☑ v ne može biti negativan

   ☐ Vektori $\vec{v}$ i $-5\vec{v}$ imaju isti smjer i orijentaciju.

   ☑ Ako $\vec{v} \neq \vec{0}$, jedinični vektor istog smjera i orijentacije kao $\vec{v}$ je $\frac{1}{v}\,\vec{v}$.

   ☑ Postoji skalar x tako da je $x\vec{v}$ okomit na $\vec{v}$.

   ☑ Ako vektoru $\vec{v}$ pribrojimo vektor koji ima drugi smjer nego on, taj zbroj ne može biti kolinearan s $\vec{v}$.

   ☐ Ako $\vec{v} \neq \vec{0}$, onda $\vec{v}$ i $\vec{0}$ imaju različit smjer.

   Iznosi vektora ne mogu biti negativni. Množenjem skalarom ne mijenja se smjer vektora, ali ako je skalar negativan, obrće se orijentacija. Ako $\vec{v} \neq \vec{0}$, onda je $\frac{1}{v}\,\vec{v}$ očito istog smjera i orijentacije kao $\vec{v}$, a $\left|\frac{1}{v}\,\vec{v}\right| = \frac{1}{v}\,v = 1$ pa se radi o jediničnom vektoru. Za sve x je $x\vec{v}$ istog smjera kao $\vec{v}$, no ako je $x = 0$ imamo $x\vec{v} = \vec{0}$, a nulvektor ima isti smjer kao svaki vektor, dakle je istovremeno i okomit na $\vec{v}$ i istog smjera kao $\vec{v}$. Zbrajanjem dva vektora različitog smjera dobivamo vektor duž dijagonale njima određenog paralelograma, a ta ima različit smjer od smjerova stranica.

13 Klasična algebra vektora

1. Ako su $\vec{v}$ i $\vec{w}$ dva nekolinearna vektora, što od sljedećeg je točno za uređenu trojku $(\vec{v}, \vec{w}, 2\vec{v} + 4\vec{w})$?

   ☐ To je uvijek baza prostora.

   ☑ To nikad nije baza prostora.

   ☐ To može i ne mora biti baza prostora, ovisi o drugim svojstvima vektora $\vec{v}$ i $\vec{w}$.

   Ako množenjem vektora sa skalarom ne mijenja mu se smjer, dakle je $2\vec{v}$ istog smjera kao $\vec{v}$ i $4\vec{w}$ je istog smjera kao $\vec{w}$. Zbrajanje vektora definirano je pravilom paralelograma pa zbroj dva vektora leži u istoj ravnini kao oni (na istom pravcu ako su kolinearni, ali ovdje to nisu). Dakle, vektori $\vec{v}$, $\vec{w}$ i $2\vec{v} + 4\vec{w}$ su komplanarni i ne mogu biti baza prostora.

2. Ako u bazi $(\vec{a}, \vec{b})$ vektor $\vec{v}$ ima koordinate $[1, 2]$, njegove koordinate u bazi $(\vec{a} + \vec{b}, \vec{b})$ su $\underline{[1, 1]}$.

   $\vec{v} = [1, 2] = \vec{a} + 2\vec{b} = 1 \cdot (\vec{a} + \vec{b}) + 1 \cdot \vec{b}$.

3. Neka su $\vec{v}$ i $\vec{w}$ dva vektora u prostoru, pri čemu je $v = 1\,\mathrm{cm}$, $w = 2\,\mathrm{cm}$, a kut među njima je $135°$. Označite sve točne tvrdnje.

   ☑ $\vec{v} \cdot \vec{w} < 0$

   ☐ $\vec{v} \times \vec{w} > 0$

   ☑ $\vec{v} \cdot \vec{v} \times \vec{w} = 0$

   ☐ $(\vec{v} \times \vec{w}) \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) = 0$

   ☐ $(\vec{v} \times \vec{w}) \times (\vec{v} \times \vec{w}) = 0$

   ☐ $(\vec{v} \times \vec{w}) \times \vec{v} = \vec{0}$

   ☑ $\vec{v} \times \vec{w} + \vec{w} \times \vec{v} = \vec{0}$

   ☑ $(\vec{v}, \vec{w}, \vec{v} \times \vec{w})$ je baza prostora

   Po definiciji je $\vec{v} \cdot \vec{w} = v\,w\,\cos\angle(\vec{v}, \vec{w})$, što je istog predznaka kao $\cos\angle(\vec{v}, \vec{w})$. Kut $135°$ je tupi pa je to negativno. Vektorski produkt $\vec{v} \times \vec{w}$ je vektor, a ne broj, pa ne može biti pozitivan, negativan ni nula. Vektorski produkt $\vec{v} \times \vec{w}$ ima smjer okomit na $\vec{v}$ pa mu je skalarni produkt s $\vec{v}$ jednak nuli. Jedini vektor koji skalarno pomnožen sam sa sobom daje nulu je nulvektor, ali $\vec{v} \times \vec{w}$ nije nulvektor jer $\vec{v}$ i $\vec{w}$ nisu kolinearni. Slijedi da $\vec{v} \times \vec{w}$ ne može biti kolinearan s $\vec{v}$ pa mu vektorski produkt s njim ne može biti $\vec{0}$ te da je trojka $(\vec{v}, \vec{w}, \vec{v} \times \vec{w})$ nekomplanarna, dakle je baza prostora. Kad vektor, primjerice $\vec{v} \times \vec{w}$ vektorski množimo sam sa sobom, dobijemo nulvektor (a ne broj 0). Vektorski produkt je antikomutativan, tj. $\vec{w} \times \vec{v} = -\vec{v} \times \vec{w}$ za svaka dva vektora $\vec{v}$ i $\vec{w}$.

4. Baza ravnine $(\vec{a}, \vec{b})$ zadana je parametrima $a = 10$, $b = 3$, $\gamma = 90°$. Koliki je iznos vektora koji u toj bazi ima koordinate $[4, 3]$? <u>*Taj iznos je* 41.</u>

   $|[4, 3]| = |4\vec{a} + 3\vec{b}| = \sqrt{(4\vec{a} + 3\vec{b}) \cdot (4\vec{a} + 3\vec{b})} =$ (*jer* $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$) $= \sqrt{16a^2 + 9b^2} = \sqrt{1681} = 41$.

5. Neka je $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ direktna baza i $(\vec{a}^*, \vec{b}^*, \vec{c}^*)$ pripadna recipročna baza. Poznato je i da je $\vec{a}$ okomit na $\vec{b}$ i $\vec{c}$, ali $\vec{b}$ nije okomit na $\vec{c}$. Označite sve tvrdnje koje su točne za sve baze koje zadovoljavaju navedeni uvjet.

   - ☑ $\vec{a}$ je istog smjera kao $\vec{a}^*$
   - ☐ $\vec{b}$ je istog smjera kao $\vec{b}^*$
   - ☐ $\vec{c}$ je istog smjera kao $\vec{c}^*$
   - ☑ $\vec{a} \cdot \vec{a}^* = 1$
   - ☑ $\vec{b} \cdot \vec{c}^* = 0$
   - ☐ $\vec{a}^* \cdot \vec{b}^* \times \vec{c}^* < \vec{a} \cdot \vec{b} \times \vec{c}$
   - ☑ $\vec{a} \times \vec{a}^* = \vec{0}$
   - ☐ $\vec{b} \times \vec{c}^* = \vec{0}$

   Po definiciji recipročne baze, $\vec{a}^*$ je okomit na $\vec{b}$ i $\vec{c}$, $\vec{b}^*$ je okomit na $\vec{a}$ i $\vec{c}$, a $\vec{c}^*$ je okomit na $\vec{a}$ i $\vec{b}$. Budući da je $\vec{a}$ okomit na $\vec{b}$ i $\vec{c}$ zaključujemo da su $\vec{a}$ i $\vec{a}^*$ istog smjera te je ujedno $\vec{a} \times \vec{a}^* = \vec{0}$. No, $\vec{b}$ nije okomit i na $\vec{a}$ (to jest) i na $\vec{c}$ (to nije) pa $\vec{b}$ nije istog smjera kao $\vec{b}^*$. Analogno zaključujemo da $\vec{c}$ i $\vec{c}^*$ nisu istog smjera. Budući da $\vec{b}$ nije nulvektor (jer je vektor baze) i da mora biti okomit na $\vec{c}^*$, znači da ta dva vektora nisu kolinearni pa $\vec{b} \times \vec{c}^*$ nije nulvektor. Skalarni umnožak istoimenih vektora direktne i recipročne baze je uvijek 1*, a skalarni produkt raznoimenih vektora direktne i recipročne baze je uvijek* 0*. Dok je $V = \vec{a} \cdot \vec{b} \times \vec{c} > 0$ volumen direktne jedinične ćelije i $V^* = \vec{a}^* \cdot \vec{b}^* \times \vec{c}^* > 0$ volumen recipročne jedinične ćelije i vrijedi $V^* = \frac{1}{V}$ to ništa ne govori o tome je li V^* manji, veći ili jednak V.*

14 Analitička geometrija prostora. Primjene klasične algebre vektora i analitičke geometrije prostora.

(a) U prostoru je koordinatni sustav zadan ishodištem i parametrima baze, bez ikakvih dodatnih pretpostavki na te parametre. Jednadžba $2x+5y=10$ predstavlja ...

☑ ravninu paralelnu sa z-osi

☐ pravac u (x,y)-ravnini

☑ Ravninu koja sadrži točku $(5,0,8)$)

☐ Ravninu koja sadrži točku $(2,5,10)$

☐ Pravac koji prolazi kroz točku $(5,0,0)$

☐ Ravninu okomitu na (x,y)-ravninu

☐ Pravac okomit na z-os

Jedna jednadžba s tri nepoznanice u prostoru predstavlja plohu, a nikada krivulju ni pravac. Ako je jednadžba linearna, radi se o ravnini: Sve jednadžbe oblika $Ax+By+Cz=D$ predstavljaju ravnine (uz uvjet da A, B i C nisu istovremeno 0). Ako je neki od tih triju koeficijenata 0, kao što je ovdje $C=0$, radi se o ravnini paralelnoj odgovarajućoj, ovdje z, osi. Takva ravnina može i ne mora biti okomita na (x,y)-ravninu: Bit će na nju okomita točno ako je z-os okomita na nju, tj. ako i samo ako je $\alpha=\beta=90°$. Uvrštavanje točke $(5,0,8)$ u $2x+5y+0z=10$ daje $10=10$, dakle je ta točka u navedenoj ravnini. No, uvrštavanje $(2,5,10)$ u jednadžbu ravnine daje $29=10$, dakle ta točka nije u toj ravnini.

(b) Millerovi indeksi mrežnih ravnina paralelnih s ravninom jednadž be $\frac{x}{6}+\frac{y}{4}+\frac{z}{8}=1$ su $\underline{(463)}$.

Pomnožimo li jednadžbu ravnine s $24=\mathrm{NZV}(6,4,8)$ dobit ćemo jednadžbu iste ravnine u obliku $4x+6y+3z=24$. Millerovi indeksi smjera mrežnih ravnina su maksimalno pozitivnim brojem skraćeni cjelobrojni koeficijenti A, B i C, dakle je odgovor (463).

(c) Pravac je zadan parametarskim jednadžbama $x=2$, $y=1-t$, $z=3t$. Označite sve točne tvrdnje o tom pravcu!

☐ Paralelan je s x-osi

☐ Paralelan je s y-osi

☐ Paralelan je sa z-osi

☐ Paralelan je s (x,y)-ravninom

☐ Paralelan je s (x,z)-ravninom

☑ Paralelan je s (y,z)-ravninom

☑ Prolazi kroz točku $(2,0,3)$

☐ Siječe x-os

☑ Mimoilazan je s x-osi

☐ Jednak je x-osi

Iz parametarskih jednadžbi pravca vidimo da mu je vektor smjera $\vec{s}=[0,-1,3]=3\vec{c}-\vec{b}$, koji nije kolinearan ni sa kojim od baznih vektora $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, dakle pravac nije paralelan nikojoj koordinatnoj osi (a onda ne može biti ni jednak ikojoj).

No, budući da je koeficijent uz $\vec{a}$ u tom vektoru jednak 0*, radi se o pravcu paralelnom s* (y,z)*-ravninom koja je razapeta vektorima* $\vec{b}$ *i* $\vec{c}$*. Ako u parametarske jednadžbe uvrstimo* $t = 1$ *dobijemo* $x = 2$*,* $y = 0$*,* $z = 3$*, dakle pravac prolazi kroz točku* $(2,0,3)$*. Ako bi taj pravac sjekao* x*-os, morao bi postojati* t *takav da je* $(2, 1-t, 3t) = (x,0,0)$*, no takav* t *ne postoji, dakle, budući da joj nije paralelan, je ovaj pravac mimoilazan s* x*-osi.*

(d) Ako je direktna baza zadana parametrima $a = b = \frac{2\sqrt{3}}{3}$, $c = \sqrt{3}$, $\alpha = \beta = 90°$, $\gamma = 120°$, onda je iznos prvog vektora recipročne baze jednak $\underline{1}$.

Budući da su dva vektora baze ($\vec{a}$ i $\vec{b}$) okomita na trećeg ($\vec{c}$), jedinična ćelija je uspravna prizma kojoj je visina c*, a osnovka površine* $a\,b\sin\gamma$*, pa joj je volumen* $V = a\,b\,c\sin\gamma$*. Stoga je:*

$$a^* = \left|\frac{1}{V}\vec{b}\times\vec{c}\right| = \frac{1}{a\,b\,c\,\sin\gamma}\cdot b\,c\,\sin\alpha = \frac{\sin\alpha}{a\sin\gamma} = 1.$$

(e) Direktni koordinatni sustav zadan je ishodištem i parametrima baze $a = 20\,\mathrm{pm}$, $b = 30\,\mathrm{pm}$, $c = 50\,\mathrm{pm}$, $\alpha = 90°$, $\beta = 60°$, $\gamma = 45°$. Poznato je da u tom koordinatnom sustavu međumrežni razmak ravnina smjera (111) iznosi $10\,\mathrm{pm}$. Označite sve točne tvrdnje.

- ☐ Iznos vektora $[1,1,1]$ je $10\,\mathrm{pm}$
- ☐ Iznos vektora $[1,1,1]^*$ je $10\,\mathrm{pm}$
- ☐ Iznos vektora $[1,1,1]$ je $\frac{1}{10}\,\mathrm{pm}$
- ☑ Iznos vektora $[1,1,1]^*$ je $\frac{1}{10}\,\mathrm{pm}^{-1}$
- ☐ Kosinus kuta vektora $[1,1,1]$ s x-osi je $\frac{1}{20\sqrt{3}}$
- ☐ Kut vektora $[1,1,1]$ s x-osi je $60°$
- ☑ Kut vektora $[1,1,1]^*$ s x-osi je $60°$
- ☐ Kosinus kuta vektora $[1,1,1]^*$ s x-osi je $\frac{1}{20\sqrt{3}}$

Prema fundamentalnom zakonu recipročne rešetke je $|[1,1,1]^*| = \frac{1}{d_{111}} = \frac{1}{10}\,\mathrm{pm}^{-1}$.
Iznos $|[1,1,1]|$ *možemo izračunati pomoću skalarnog produkta:*

$$|[1,1,1]| = \sqrt{(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})\cdot(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})} = \ldots = 10\sqrt{48+6\sqrt{2}}\,\mathrm{pm}.$$

Kosinus kuta vektora $[1,1,1]^*$ *s* x*-osi je* $\frac{[1,1,1]^*\cdot[1,0,0]}{\frac{1}{10}\cdot 20} = \frac{1}{2}$*, dakle je taj kut* $60°$.

Kosinus kuta vektora $[1,1,1]$ *s* x*-osi je* $\frac{[1,1,1]\cdot[1,0,0]}{10\sqrt{48+6\sqrt{2}}\cdot 20} = \frac{\sqrt{9+3\sqrt{2}}}{20\sqrt{48+6\sqrt{2}}}$.