Matematika 2:
Riješeni i komentirani kratki testovi prisutnosti na nastavi

Franka Miriam Brückler

7. svibnja 2025.

1 Sustavi linearnih jednadžbi

1. Koliko rješenja ima jednadžba $x + 2y + 3z = 0$? Beskonačno mnogo.

   Svaka linearna jednadžba s više od jedne nepoznanice sigurno ima beskonačno mnogo rješenja. Za ovu konkretnu jednadžbu rješenja su sve točke, njih beskonačno mnogo, koje leže u ravnini u prostoru koja je zadana tom jednadžbom.

2. Označite sve jednadžbe koje su linearne i homogene!

   ☑ $x + y = z$ ☐ $x + 2y - 25 = 0$ ☐ $x\,y = 0$

   ☑ $x/y = 3$ uz uvjet $y \neq 0$ ☐ $\ln(x + y) = 0$ uz uvjet $x, y > 0$

   Jednadžba $x+y = z$ je ekvivalentna jednadžbi $1\cdot x+1\cdot y-1\cdot z = 0$, dakle je homogena i linearna. Jednadžba $x+2y-25 = 0$ ekvivalentna je jednadžbi $1\cdot x+2\cdot y = 25$, dakle jest linearna, ali nije homogena, slobodni član joj je 25. Jednadžba $x\,y = 0$ ne može se zapisati u ekvivalentnom obliku $a\,x + b\,y = c$, dakle nije linearna, pa ne može biti ni homogena.[1] *Jednadžba $x/y = 0$ uz uvjet $y \neq 0$ ekvivalentna je homogenoj linearnoj jednadžbi $1 \cdot x + 0 \cdot y = 0$ s istim uvjetom. Jednadžba $\ln(x + y) = 0$ ekvivalentna je, zbog bijektivnosti eksponencijalnih funkcija, jednadžbi $x + y = 1$ (s istim uvjetom $x, y > 0$), koja jest linearna, ali nije homogena.*

3. Označite sve točne tvrdnje o sustavima linearnih jednadžbi s 2 jednadžbe i 2 nepoznanice!

   ☐ Postoji takav sustav s točno 2 rješenja.

   ☐ Geometrijski, takav se sustav interpretira kao 2 pravca u prostoru.

   ☑ Matrica takvog sustava ima 2 retka i 3 stupca.

   ☐ Ako je takav sustav homogen, on ne može imati jedinstveno rješenje.

   Nikoji sustav linearnih jednadžbi ne može imati točno dva rješenja: Čim ima više od jednog rješenja, ima ih beskonačno mnogo. Geometrijski, linearne jednadžbe s dvije nepoznanice možemo interpretirati kao dva pravca u ravnini. Ako bismo ih interpretirali u prostoru, radilo bi se o ravninama (paralelnim jednoj koordinatnoj osi). Matrica sustava ima onoliko redaka koliko sustav ima jednadžbi, a za 1 više stupaca nego nepoznanica, dakle je za 2×2-sustav imamo matricu s 2 retka i 2

[1] Strogo matematički uzevši, radi se o homogenoj jednadžbi stupnja 2 s 2 nepoznanice, ali takve jednadžbe nećemo razmatrati u ovom kolegiju.

stupca. Ako je 2×2-sustav homogen, njemu odgovaraju dva pravca u ravnini koji prolaze kroz ishodište te će imati jedinstveno rješenje $(0,0)$ ako se ne radi od dva podudarna pravca.

4. Konačna matrica jednog sustava linearnih jednadžbi nakon što je na njega primijenjena Gaußova metoda eliminacija je

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 & 5 \end{array}\right).$$

Označite sve točne tvrdnje o tom sustavu!

☐ Sustav ima četiri nepoznanice. ☑ Sustav ima tri jednadžbe.

☑ Sustav ima pet nepoznanica. ☐ Sustav ima pet jednadžbi.

☐ Sustav nema rješenja. ☑ Sustav ima beskonačno mnogo rješenja.

☐ Jedno rješenje sustava je $(0,2,5)$. ☐ Jedno rješenje sustava je $(1,1,1,2,5)$.

☑ Jedno rješenje sustava je $(0,1,2,1,5)$.

Matrica sustava ima onoliko redaka koliko sustav ima jednadžbi, dakle u ovom slučaju 3. Matrica sustava ima za 1 više stupaca nego što ima nepoznanica, dakle je u ovom slučaj broj nepoznanica 5. Vidimo da u ovoj konačnoj matrici imamo dva „umetnuta" stupca i nemamo kontradiktornih jednadžbi, dakle sustav ima beskonačno mnogo rješenja (opisanih s dva slobodna parametra koji odgovaraju četvrtoj i petoj nepoznanici). Budući da sustav ima pet nepoznanica, njegova rješenja mogu biti isključivo uređene petorke, dakle nikako ne $(0,2,5)$. Kad matricu napišemo u obliku sustava vidimo da je prva jednadžba $x_1 = 0$ pa ni $(1,1,1,2,5)$ sigurno nije rješenje sustava. Druga jednadžba je $x_2 + x_4 = 2$, a treća $x_3 + 3x_4 = 5$ pa vidimo da $(0,1,2,1,5)$ zadovoljava sve tri jednadžbe te je to jedno od rješenja.

5. Označite sve dozvoljene operacije u Gaußovoj metodi eliminacija (uz korištenje matrice sustava).

☑ Zamjena dva retka matrice sustava. ☐ Zamjena dva stupca matrice sustava.

☐ Množenje retka matrice bilo kojim brojem.

☑ Dijeljenje retka matrice bilo kojim brojem različitim od nule.

☐ Množenje stupca matrice bilo kojim brojem različitim od nule.

☑ Oduzimanje jednog retka od drugog. ☐ Pribrajanje jednog stupca drugom stupcu.

Dozvoljene su operacije elementarne transformacije po retcima i njihove kombinacije. U Gaußovoj metodi eliminacija nisu dozvoljene elementarne transformacije sa stupcima jer bi izazvale „pomutnju" među nepoznanicama. Zamjena dva retka je dozvoljena jer odgovara zamjeni poretka jednadžbi, što očito ne mijenja rješenje sustava. Dozvoljeno je i množiti redak matrice (dakle jednadžbu sustava) bilo kojim brojem s izuzetkom 0 jer ne mijenja rješenja sustava (ali množenjem s 0 dobili bismo jednadžbu $0 = 0$ što je ekvivalentno brisanju te jednadžbe iz sustava). Dijeljenje brojem različitim od nule je dozvoljeno jer je to isto što i množenje s njemu recipročnim brojem koji ne može biti nula. Oduzimanje jednog retka od drugog je dozvoljeno jer se radi o kombinaciji dvije elementarne transformacije s retcima (množenje jednog retka s -1 i pribrajanje jednog retka drugom).

2 Uvod u matrice i vektorske prostore. Baza i dimenzija.

1. Koje su koordinate kompleksnog broja $z = 5 + i$ u bazi $B = (1 - i, 2 + i)$ (naravno, ovdje skup $\mathbb{C}$ gledamo kao realni vektorski prostor)? $\underline{z = (1, 2)_B}$.

   Broj z želimo zapisati kao linearnu kombinaciju $x \cdot (1 - i) + y \cdot (2 + i) = (x + 2y) + (y - x)i$*. Dakle, treba biti* $5 = x + 2y$ *i* $1 = y - x$ *te dobivamo da je prva koordinata* $x = 1$*, a druga* $y = 2$*.*

2. Neka je A kompleksna matrica koja je istovremeno antihermitska i simetrična. Što od sljedećeg vrijedi za A?

   ☐ Takva A ne postoji. ☑ A je kvadratna. ☐ A nije kvadratna.

   ☑ A na dijagonali ima samo čisto imaginarne brojeve. ☐ A je nulmatrica.

   ☐ A na dijagonali ima isključivo nule. ☑ Svi elementi od A su čisto imaginarni.

   ☐ A na dijagonali ima samo realne brojeve. ☐ Svi elementi od A su realni.

   Simetrične kao i antihermitske matrice moraju biti kvadratne, dakle je A kvadratna. Nadalje, po definiciji tih dviju vrsta matrica mora vrijediti $A^t = A = -A^*$*, dakle je* $A^t = -A^*$*. Na poziciji* (i, j) *od* A^t *je* a_{ji}*, a na istoj poziciji u* $-A^*$ *je* $-\overline{a_{ji}}$*. Dakle, za sve i i j mora vrijediti* $a_{ji} = -\overline{a_{ji}}$*, tj. svi elementi u A moraju biti jednaki svojim suprotnim konjugiranim brojevima. Stoga svi moraju biti čisto imaginarni.*

3. Neka je V vektorski prostor svih neprekidnih realnih funkcija s domenom $[0, 1]$, tj. $V = C([0, 1])$. Označite sve točne tvrdnje o V!

   ☑ Primjer vektora iz V je $f(x) = \arcsin x$.

   ☐ Primjer vektora iz V je $f(x) = \sqrt{x - 2}$.

   ☐ V je konačnodimenzionalan.

   ☑ V je beskonačnodimenziojnalan.

   ☑ Skup svih polinoma kojima je za domenu uzet segment $[0, 1]$ je potprostor od V.

   ☐ Skup svih eksponencijalnih funkcija kojima je za domenu uzet segment $[0, 1]$ je potprostor od V.

   ☐ Skup $\{x^2, \ln(x + 2)\}$ je primjer linearno zavisnog skupa u V.

   ☑ Skup $\{\exp(x), \sin(x), \exp(x) + \sin(x)\}$ je primjer linearno zavisnog skupa u V.

   Elementi od V su neprekidne realne funkcije s domenom $[0, 1]$*. Budući da je prirodna domena od* arcsin *nadskup od* $[0, 1]$*,* arcsin *jest vektor iz* $C([0, 1])$*. No, prirodna domena od* $\sqrt{x - 2}$ *je* $[2, +\infty\rangle$*, dakle ta funkcija nije vektor u V. Kao i svi vektorski prostori koji se sastoje od svih (a ne samo nekih) realnih funkcija dane domene (ili svih neprekidnih ili svih integrabilnih ili svih derivabilnih), V je beskonačne dimenzije. Najjednostavniji argument za to je da sadrži beskonačan linearno nezavisan skup svih monoma. Skup svih polinoma s fiksiranom domenom je vektorski prostor, a očito su svi polinomi s domenom* $[0, 1]$ *neprekidni, dakle čine i podskup od V te se radi o potprostoru. Zbroj dvije eksponencijalne funkcije nije eksponencijalna funkcija pa podskup svih eksponencijalnih funkcija s domenom* $[0, 1]$ *nije potprostor od V. Budući da se* x^2 *ne može zapisati kao skalar puta* $\ln(x + 2)$*, te su dvije funkcije* *linearno nezavisne. Budući da je u skupu $\{\exp(x), \sin(x), \exp(x)+\sin(x)\} \subset V$ treća funkcija linearna kombinacija prve dvije, to je primjer lineanro zavisnog skupa u V.*

4. Zadan je sustav linearnih jednadžbi $x+y+z=0$, $y-z=0$, $x+2y=0$. Sa S označimo skup svih njegovih rješenja. Označite točne tvrdnje! (Podrazumijevamo da u rješenjima za x, y, z dozvoljavamo samo realne brojeve.)

   ☑ S je vektorski prostor. ☐ S nije vektorski prostor.

   ☐ S se sastoji samo od nulvektora, tj. S je trivijalan vektorski prostor.

   ☑S je potprostor od $\mathbb{R}^3$. ☐ S je potprostor od $\mathbb{R}^2$. ☐ S je potprostor od $\mathbb{R}$.

   ☐ S je dimenzije 0. ☑ S je dimenzije 1. ☐ S je dimenzije 2. ☐ S je dimenzije 3.

   Sustav je homogen i linearan pa mu je skup rješenja ujedno i vektorski prostor. Budući da sustav ima tri nepoznanice, S je potprostor od $\mathbb{R}^3$. Rješenje tog sustava su sve uređene trojke $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ za koje je $x = 2t$, $y = -t$, $z = -t$, $t \in \mathbb{R}^3$. Budući da u opisu rješenja imamo jedan slobodni parametar, radi se o 1-dimenzionalnom prostoru.

5. Označite sve primjere realnih vektorskih prostora koji su dimenzije 4. (Podrazumijevamo da ako neki od navedenih prostora možemo gledati i kao kompleksni, svejedno ga gledamo kao realni).

   ☐ $\mathbb{R}$ ☐ $\mathbb{R}^2$ ☑ $\mathbb{R}^4$

   ☐ $\mathbb{C}$ ☑ $\mathbb{C}^2$ ☐ $\mathbb{C}^4$

   ☑ M_2 ☐ M_4

   ☐ prostor svih polinoma stupnja najviše 4

   ☐ prostor svih polinoma stupnja bar 4

   ☐ prostor svih algebarskih realnih funkcija jedne varijable

   Realni vektorski prostori $\mathbb{R}^n$ su dimenzije n. Skup $\mathbb{C}$ gledan kao realni vektorski prostor je dimenzije 2, dakle je $\mathbb{C}^n$ kao realni vektorski prostor dimenzije $2n$. Prostor $M_{m,n}$ je dimenzije $m \cdot n$, pa je dimenzija od M_n jednaka n^2. Polinomi stupnja 4 čine vektorski prostor, ali je on dimenzije 5 jer u njemu možemo naći skup od 5 linearno nezavisnih vektora $\{1, x, x^2, x^3, x^4\}$. Polinomi stupnja bar 4 uopće ne čine vektorski prostor jer zbroj dva takva polinoma ne mora biti u tom skupu (npr. $p(x) = x^4 + x^3$ i $q(x) = -x^4 + x^2$ su u tom skupu, ali im zbroj $x^3 + x^2$ nije u tom skupu). Algebarske funkcije jedne varijable čine vektorski prostor, ali beskonačne dimenzije (jer sadrži beskonačni linearno nezavisan skup svih monoma).

3 Rang matrice. Unitarni prostori. Pojam linearnog operatora.

1. Koji je rang matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 5 & 3 & 0 & 5 \\ 8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 8 & -1 & 5 & 4 & 0 & 7 \end{pmatrix}?$$

   Rang te matrice je 3.

Rang je očito najviše 4. Četvrti redak je zbroj prva tri retka, dakle je četvrti redak linearno zavisan s prva tri. Pogledamo li prva tri stupca od prva tri retka očito je da su ta tri retka linearno nezavisna. Dakle, rang je 3.

2. Što od sljedećeg vrijedi za sve realne unitarne prostore V kojima je dimenzija 5?

☑ Skalarni umnožak dva vektora iz V mora biti realan broj.

☐ Skalarni umnožak dva vektora iz V može biti ne-realan kompleksan broj.

☑ Skalarni produkt je komutativan.

☐ Ako je $\langle v, v\rangle = 4$, onda je $||v|| = 4$.

☐ Skalarni produkt vektora v i w je umnožak njihovih iznosa i kosinusa kuta među njima.

☐ U V postoji skup od 6 međusobno ortogonalnih vektora.

☐ Svaka baza od V je ortogonalna.

☐ Ako su dva vektora iz V linearno nezavisna, skalarni produkt im je 0.

☑ Ako je skalarni produkt dva nenul-vektora iz V jednak 0, oni su linearno nezavisni.

U unitarnim prostorima skalarni umnožak dva vektora je skalar, dakle ako je prostor realan skalarni umnožak mora biti realan broj. U realnim unitarnim prostorima skalarni produkt je komutativan: $\langle v, w\rangle = \langle w, v\rangle$ *za sve* $v, w \in V$. *Norma vektora je definirana s* $||v|| = +\sqrt{\langle v, v\rangle}$, *dakle ako je* $\langle v, v\rangle = 4$, *onda je* $||v|| = 2$. *U općim vektorskim prostorima nema smisla pojam iznosa i kuta među vektorima te se skalarni produkt ne može definirati kao umnožak iznosa vektora i kosinusa kuta među njima; ta definicija je točna samo za vektorske prostore geometrijskih vektora (a oni su dimenzije 2 ili 3, dakle naš* V *sigurno nije jedan od njih). Dimenzija od* V *je* 5, *dakle svaki skup od više od* 5 *vektora iz* V *je sigurno linearno zavisan. Budući da su skupovi koji se sastoje od međusobno ortogonalnih vektora sigurno linearno nezavisni zaključujemo da u* V *ne može postojati skup od* 6 *međusobno ortogonalnih vektora. Baze od* V *će biti svi, a ne samo ortogonalni skupovi od po* 5 *vektora, dakle za* V *postoje ortogonalne baze, ali i baze koje nisu ortogonalne. Ako su dva vektora* v *i* w *linearno zavisna, onda je* $w = \alpha v$ *za neki skalar* α, *no to ne znači da je* $0 = \langle v, w\langle = \alpha\langle v, v\rangle = \alpha\, ||v||^2$. *Štoviše, ako je* $\langle v, w\rangle = 0$ *i nijedan od ta dva vektora nije nulvektor, oni su ortogonalni, dakle sigurno linearno nezavisni.*

3. Koliko iznosi norma vektora $v = \exp$ u vektorskom prostoru $C([-1, 1])$?

☐ 0 ☐ 1 ☐ e ☐ $\frac{1}{e}$ ☐ $e - \frac{1}{e}$ ☐ $e + \frac{1}{e}$

☐ e^2 ☐ e^{-2} ☐ $\frac{e^2-e^{-2}}{2}$ ☐ $\frac{e^2+e^{-2}}{2}$ ☑ nijedno od navedenog

Računamo po definiciji:

$$||v|| = +\sqrt{\langle v, v\rangle} = +\sqrt{\int_{-1}^{1} \exp(x)\exp(x)\mathrm{d}x} = +\sqrt{\int_{-1}^{1} \exp(2x)\mathrm{d}x} =$$

$$= +\sqrt{\frac{1}{2}\exp(2x)\Big|_{-1}^{1}} = +\sqrt{\frac{e^2 - e^{-2}}{2}} \approx 1{,}9.$$

4. Označite sve primjere linearnih operatora!

☑ Rotacija oko O za kut 35° kao funkcija s $V^2(O)$ u $V^2(O)$

☐ Translacija za geometrijski vektor $\vec{j}$ kao funkcija s $V^3(O)$ u $V^3(O)$

☐ Zrcaljenje s obzirom na ravninu $x + y + z = 1$ kao funkcija s $V^3(O)$ u $V^3(O)$.

☑ Osna simetrija s obzirom na pravac $x + 2y = 0$ kao funkcija s $V^2(O)$ u $V^2(O)$.

☐ Rang kao funkcija s M_3 u $\mathbb{R}$.

☑ Izračunavanje derivacije u 0 kao funkcija s $C^1(\mathbb{R})$ u $C(\mathbb{R})$.

☐ & ☑ Množenje s e kao funkcija s $\mathbb{R}^8$ u $\mathbb{C}^8$. (Greška, vidi dolje u komentaru!)

☐ Afina funkcija $f(x) = 2x + 1$ kao funkcija s $\mathbb{R}$ u $\mathbb{R}$.

☐ Konjugiranje kao funkcija s $\mathbb{C}$ u $\mathbb{C}$.

Sve rotacije oko O u $V^2(O)$ su linearni operatori, a tako i sve osne simetrije s obzirom na pravce koji prolaze kroz O. Linearni operatori na $V^3(O)$ moraju nulvektor preslikati u nulvektor, dakle ishodište u ishište. Translacija za vektor $\vec{j}$ preslika O u $(0, 1, 0)$, dakle ne može biti linearni operator. Također i zrcaljenje s obzirom na ravninu $x + y + z = 1$, budući da ona ne prolazi kroz O, ne preslika O u O pa ne može biti linearan operator. Rang nije linearan, primjerice lako zaključujemo da nije homogen jer je npr. rang od I_3 jednak 3, a toliki je i rang od $2I_3$, dakle ne vrijedi $rang(2A) = 2rang(A)$. Znamo da je deriviranje linearno; ako funkciji $f \in C^1(\mathbb{R})$ pridružimo $f'(0)$, to je broj, dakle se radi o preslikavanju s $C^1(\mathbb{R})$ u $\mathbb{R}$ (linearnom funkcionalu), ali budući da se svaka konstanta može shvatiti kao konstantna funkcija i ta je neprekidna, isto preslikavanje možemo shvatiti i kao linearan operator s $C^1(\mathbb{R})$ u $C(\mathbb{R})$. Množenje s konstantom, npr. e, uvijek je linearno. No, da bismo imali linearan operator, domena i kodomena oba trebaju biti realni ili oba kompleksni prostori. Budući da $\mathbb{C}^8$ možemo tretirati i kao realni prostor i kao kompleksni, „množenje s e kao funkcija s $\mathbb{R}^8$ u $\mathbb{C}^8$“ može i ne mora biti linearan operator (ako je $\mathbb{C}^8$ realan prostor, onda jest, ako je kompleksan, onda nije). Stoga je ta rečenica maknuta iz testa prije konačne dodjele bodova. Afine funkcije kojima je slobodan član različit od 0 nisu linearni operatori jer ne preslikavaju 0 u 0. Konjugiranje nije homogeno pa nije ni linearno, što vidimo npr. iz $\overline{i \cdot i} = \overline{-1} = -1 \neq i \cdot \overline{i} = i \cdot (-i) = 1$.

5. Ako je A kvadratna ortogonalna matrica reda 2, onda je ona sigurno ...

☐ norme 1 ☑ ranga 2 ☑ ne sadrži element veći od 1 ☐ ne sadrži negativni element

☐ simetrična ☐ antisimetrična ☑ različita od nulmatrice ☐ jedinična

Retci, odnosno stupci, ortogonalne matrice čine ortonormiranu bazu, dakle su linearno nezavisni. Ako je ortogonalna matrica reda 2 znači da joj je rang 2. Nulmatrica nikad ne može biti ortogonalna, jer nikoja baza ne sadrži nulvektor. Ortogonalne matrice ne moraju biti ni simetrične ni antisimetrične niti moraju biti jedinične, uzmimo npr. ortogonalnu matricu $\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$. Ortogonalne matrice mogu sadržavati negativne elemente, uzmimo za primjer prethodnu matricu ili jednostavniji primjer $-I_2$. No, nikoji element ne može biti veći od 1 jer retci, odnosno stupci, moraju biti norme 1, tj. zbroj kvadrata brojeva u bilo kojem retku ili stupcu mora biti 1, a kad bi neki element matrice bio veći od 1 onda bi zbroj kvadrata u njegovom retku i stupcu isto bio veći od 1. Pojam norme matrice nije definiran i stoga nema smisla pitati ima li neka, ovdje ortogonalna, matrica normu 1.

4 Matrica linearnog operatora. Množenje matrica. Inverz matrice.

1. Matricu A tipa 4×8 možemo množiti s matricom B (u redoslijedu AB) ako B ima <u>osam redaka</u>.

   Da bi se mogao izračunati umnožak AB, matrice A i B moraju biti ulančane, tj. broj stupaca od A mora biti jednak broju redaka od B.

2. Koliko iznosi element na poziciji (3,2) u umnošku matrica AB ako je

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 5 & 3 & 0 & 5 \\ 8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 8 & -1 & 5 & 4 & 0 & 7 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 5 \\ 8 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 8 & -1 & 5 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}?$$

   <u>*Traženi broj je* 3.</u>

   Da bismo dobili poziciju $(3,2)$ u AB trebamo skalarno pomnožiti treći redak od A, tj. $(0,-1,0,1,0,2)$, s drugim stupcem od B, tj. s $(0,0,-1,-1,1,2)$, a taj skalarni produkt je $0 \cdot 0 + (-1) \cdot 0 + 0 \cdot (-1) + 1 \cdot (-1) + 0 \cdot 1 + 2 \cdot 2 = 3$.

3. Neka je A jedna matrica nekog linearnog operatora s $V^3(O)$ u $V^2(O)$, s obzirom na baze B i B' u domeni odnosno kodomeni. Označite sve točne tvrdnje.

   ☐ A ima tri retka. ☑ A ima dva retka.

   ☐ A može biti ortogonalna. ☑ A ne može biti ortogonalna.

   ☑ Ako je $X = [100]^t$, onda umnoškom AX dobijemo prvi stupac matrice A.

   ☐ Na poziciji (2,1) u matrici A je druga koordinata u bazi B' od prvog vektora iz baze B.

   ☐ A je jedina moguća matrica tog linearnog operatora.

   ☐ A^t je matrica inverznog operatora od linearnog operatora čija je A matrica.

   Domena je dimenzije 3, dakle svaka matrica tog operatora ima 3 stupca. Kodomena je dimenzije 2, dakle svaka matrica tog operatora ima 2 retka. Ortogonalne matrice su podvrsta kvadratnih matrica. Ako su u matrici-stupcu X koordinate nekog vektora v domene s obzirom na bazu B, onda je AX matrica-stupac koja sadrži koordinate, s obzirom na bazu B', vektora o kojeg dani operator preslikava vektor v. Ako je v prvi vektor baze B, koordinate u toj bazi su mu $(1,0,0)$, te s AX dobijemo kamo se preslika prvi vektor baze domene zapisano u bazi B', a to je po definiciji matrice operatora prvi stupac matrice A. Posebno, u prvom stupcu od A su koordinate od slike prvog vektora baze B, a ne od njega samog (što je među ostalim i očito jer stupci matrice A imaju po dva elementa, a vektori baze domene moraju imati tri koordinate jer su to vektori trodimenzionalnog prostora). Matrice linearnih operatora općenito, osim za rijetke iznimke, nisu jedinstvene te uz drugi odabir baza domene i kodomene za isti operator u pravilu dobijemo drugu matricu operatora. Matrica A^t ima tri retka i dva stupca, dakle se može interpretirati kao matrica nekog operatora s $V^2(O)$ u $V^3(O)$, ali to sigurno nije matrica inverznog operatora jer linearan operator kojemu se dimenzije domene i kodomene razlikuju sigurno nema inverz (nije bijekcija).

4. Neka je B realna kvadratna matrica reda 3. Označite sve točne tvrdnje.

☐ B je invertibilna. ☑ B se može pomnožiti sama sa sobom.

☐ $tr(B)$ je linearan funkcional. ☐ Ako je $B^2 = 0_3$, onda je $B = 0_3$.

☑ Ako je $BB^t = I_3$, onda je B ortogonalna.

Neke kvadratne matrice jesu, a neke nisu invertibilne. No, svaka kvadratna matrica je ulančana sama sa sobom, dakle se može pomnožiti sama sa sobom. Trag kao funkcija $tr : M_3 \to \mathbb{R}$ je linearan funkcional, ali $tr(B)$ je jednostavno njegov iznos (broj, a ne funkcija) za jedan element domene — razlika između tr i $tr(B)$ je u osnovi ista kao između $\ln$ (čitava funkcija u koju možemo uvrstiti različite brojeve) i $\ln e$ (jedan broj, tj. jedan element kodomene). Ako je primjerice $B = E_{12}$ (matrica koja na poziciji $(1,2)$ ima 1, a ostali elementi su joj 0), onda je $B^2 = 0_3$ iako je $B \neq 0_3$. Jednakost $BB^t = I_3$ je za kvadratnu matricu B jedan od dva ekvivalentna oblika definicije ortogonalnosti matrice.

5. Neka je dan operator rotoinverzije reda 6 prostora $V^3(O)$ s obzirom na os koju uzimamo kao z-os u Kartezijevom koordinatnom sustavu te neka je R njegova matrica s obzirom na taj koordinatni sustav, tj. standardnu ortonormiranu bazu B. Što od sljedećeg je točno?

☑ Inverz od R je R^t. ☐ R je jedinična matrica. ☑ $tr(R) = -3$

☑ Na poziciji (1,1) u matrici R je $-1/2$. ☐ Na poziciji (1,1) u matrici R je -1.

☐ najveći element u matrici R je 1 ☑ najmanji element u matrici R je -1

☑ Ako je $\vec{v} = [1, 2, 3]$ (koordinate u bazi B), onda je treća koordinata od tog vektora preslikanog opisanom rotoinverzijom jednaka -3.

Rotoinverzije su jedan tip operatora simetrije, dakle ortogonalnih operatora, a za operatore simetrije je matrica s obzirom na ortonormiranu bazu uvijek ortogonalna, tj. inverz joj je transponirana matrica. Jedinična matrica je matrica samo jediničnog operatora, a rotoinverzija reda 6 to nije. Budući da je rotoinverzija kompozicija centralne simetrije i rotacije, matrica R je umnožak matrice $-I_3$ i matrice rotacije oko z-osi s obzirom na ortonormiranu bazu:

$$R = \begin{pmatrix} -1/2 & \sqrt{3}/2 & 0 \\ -\sqrt{3}/2 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

(rotacija reda 6 je rotacija za kut 60°) pa je $tr(R) = -2$, najmanji element u matrici je -1, a najveći $\sqrt{3}2$. Treću koordinatu vektora $\vec{v}$ preslikanog rotoinverzijom dobijemo (vidi i komentar prethodnog zadatka) skalarnim množenjem trećeg retka matrice R (a taj je po prethodnoj rečenici $(0, 0, -1)$) s koordinatama vektora, ovdje $(1, 2, 3)$, dakle dobijemo -3.

5 Determinante. Veza matrica i sustava linearnih jednadžbi

1. Koji su mogući iznosi determinante unitarnog operatora, tj. unitarne matrice? *Kompleksni brojevi apsolutne vrijednosti* 1.

   Unitarna matrica A ima svojstvo $A \cdot A^* = I_n$, dakle je po Binet-Cauchy-jevom teoremu $1 = \det(A)\,(A^*) = \det(A)\,\overline{\det(A)}$. *Budući da za kompleksan broj z vrijedi $z\,\overline{z} = |z|^2$, slijedi da je* $|\det(A)|^2 = 1$, *tj.* $|\det(A)| = 1$.

2. Označite sve točne tvrdnje o determinantama!

   ☐ determinanta je aditivna ☐ determinanta je homogena

   ☑ determinanta je definirana samo za kvadratne matrice ☑ $\det(A) = \det(A^t)$.

   ☑ ako matrici zamijenimo dva stupca promijeni se predznak njene determinante

   ☐ invertibilna matrica ima pozitivnu determinantu ☐ $\det(5I_n) = 5$

   Determinanta nije ni aditivna ni homogena (osim za matrice reda 1*). To vidimo npr. jer je* $\det(I_3 + I_3) = 8 \neq \det(I_3) + \det(I_3) = 2$ *i* $\det(2I_3) = 8 \neq 2\det(I_3) = 2$. *Slično,* $\det(5I_n) = 5^n$ *jer je determinanta dijagonalne matrice umnožak njenih dijagonalnih elemenata. Determinanta je, jer služi karakterizaciji invertibilnosti, definirana samo za kvadratne matrice. Transponiranje ne mijenja determinantu, što slijedi iz ekvivalencije Laplaceovog razvoja po prvom retku i po prvom stupcu. Zamjena dva retka ili dva stupca matrice mijenja predznak njene determinante. Invertibilne matrice imaju nenul determinantu, bilo pozitivnu bilo negativnu.*

3. Ako je sustav linearnih jednadžbi dan u matričnom obliku $AX = B$ i ako je A ortogonalna matrica, onda ...

   ☑ taj sustav sigurno ima jedinstveno rješenje

   ☑ taj sustav se može riješiti Cramerovim pravilom

   ☑ taj sustav sigurno ima jednako mnogo jednadžbi i nepoznanica

   ☐ matrica sustava $(A|B)$ je invertibilna matrica

   Ako je matrica ortogonalna, onda je kvadratna (pa je sustav tipa $n \times n$) i invertibilna i determinanta joj nije nula, te je $AX = B$ Cramerov sustav, tj. ima jedinstveno rješenje i može se riješiti Cramerovim pravilom. Budući da je A kvadratna, matrica sustava $(A|B)$ nije kvadratna pa ne može biti invertibilna.

4. Dosad smo susreli razne vrsta matrica. Označite sve ispravne definicije.

   ☐ Dijagonalna matrica je kvadratna matrica koja izvan dijagonale ima nule, a na dijagonali brojeve različite od nule.

   ☐ Ortogonalna matrica je matrica determinante $+1$ ili -1.

   ☑ Simetrična matrica je matrica koja je jednaka svojoj transponiranoj matrici.

   ☐ Gornjetrokutasta matrica je kvadratna matrica kojoj je determinanta umnožak brojeva na dijagonali.

   ☑ Skalarna matrica je jedinična matrica pomnožena nekim skalarom.

   ☑ Regularna matrica je matrica koja posjeduje inverznu matricu.

Dijagonalne matrice su kvadratne matrice kojima su izvan dijagonale svi elementi nule, no na dijagonali elementi mogu i ne moraju biti različiti od nule. Ortogonalne matrice su one kojima je inverz jednak transponiranoj matrici i stoga im je determinanta ±1, no nije svaka matrica s determinantom ±1. Determinanta gornjetrokutaste matrice jest umnožak brojeva na dijagonali, ali isto svojstvo imaju i mnoge druge matrice, primjerice donjetrokutaste.

5. Gledamo operator rotoinverzije reda 4. Neka mu je s obzirom na neku bazu prostora dana matrica R. Što je sve točno?

   ☑ R je invertibilna

   ☑ Sustav $RX = 0_(3,1)$ ima jedinstveno rješenje

   ☑ Determinanta od R je -1

   ☑ Trag od R je -1

   ☐ R je ortogonalna

   Rotoinverzija je operator simetrije, dakle je invertibilan, pa je i svaka matrica rotoinverzije invertibilna. Budući da je rotoinverzija bijekcija, ona je i injekcija pa se samo jedan vektor (nulvektor) preslikava u nulvektor te jednadžba $\hat{R}v = \vec{0}$ kojoj odgovara sustav $RX = 0_{3,1}$ ima jedinstveno rješenje. Determinanta i trag su invarijante linearnih operatora, dakle možemo za njihov izračun pretpostaviti da je R dana s obzirom na ortogonalnu bazu; rotoinverzija je kompozicija rotacije i centralne simetrije, dakle je tada R suprotna matrica jedne od triju standardnih matrica rotacije, te je trag od R jednak $-1 - 2\cos\alpha = -1 - 2\cos 90° = -1$, a determinanta je -1. No, budući da nije rečeno da je R stvarno dana s obzirom na ortonormiranu bazu, R ne mora biti ortogonalna (matrice operatora simetrije su ortogonalne samo ako su dane s obzirom na ortonormiranu bazu).

6 Svojstvene vrijednosti i svojstveni vektori. Uvod u obične diferencijalne jednadžbe.

1. Kako se naziva skup svih svojstvenih vrijednosti nekog linearnog operatora? *Skup svih svojstvenih vrijednosti linearnog operatora naziva se spektrom tog operatora.*

2. Neka je $\hat{R}$ operator rotoinverzije reda 4. Baza prostora je odabrana tako da je os rotacijske komponente jednaka x-osi koordinatnog sustava. Označite sve točne tvrdnje o operatoru $\hat{R}$!

   ☐ taj operator nema svojstvenih vektora

   ☑ svojstveni vektori tog operatora leže samo na x-osi

   ☐ svojstveni vektori tog operatora leže na x-osi i u (y, z)-ravnini

   ☐ taj operator nema svojstvenih vrijednosti

   ☑ taj operator ima jednu svojstvenu vrijednost

   ☐ taj operator ima dvije svojstvene vrijednosti

   ☐ taj operator ima tri svojstvene vrijednosti

   ☐ taj operator ima bar jednu degeneriranu svojstvenu vrijednost

Ako je neki vektor $\vec{v}$ na osi rotacijske komponente, ovdje x-osi, od $\hat{R}$, on se pri rotaciji ne mijenja, a centralnom simetrijom se preslika u sebi suprotni, dakle je za takve vektore $\hat{R}\vec{v} = -\vec{v}$, odnosno takvi vektori su svojstveni vektori operatora $\hat{R}$ pridruženi svojstvenoj vrijednosti -1. Svim ostalim vektorima se pri rotoinverziji reda 4, dakle kompoziciji rotacije za $90°$ s centralnom simetrijom s obzirom na O, promijeni smjer, dakle osim opisanih nema drugih svojstvenih vektora, a -1 je jedina svojstvena vrijednost. Svojstvena vrijednost -1 nije degenerirana jer joj je svojstveni potprostor x-os, dakle jednodimenzionalan.

3. Neka je $k(x)$ karakteristični polinom linearnog operatora $\hat{A} : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^5$. Što je sigurno točno za $k(x)$?

☑ $k(x)$ ima bar jednu realnu nultočku

☐ $k(x)$ može biti stupnja 4

☐ vodeći koeficijent od $k(x)$ je pozitivan

☐ $k(x)$ je rastuća funkcija

☐ $k(x)$ je neparna funkcija

Karakteristični polinom linearnog operatora koji djeluje na peterodimenzionalnom prostoru je polinom stupnja 5, dakle neparnog te sigurno ima bar jednu realnu nultočku. Iz izračuna determinante Laplaceovim razvojem vidi se da je vodeći član polinoma $+x^n$ ako je domena operatora parne dimenzije n, a $-x^n$ ako je neparne dimenzije n, dakle u ovom slučaju je vodeći član $-x^5$ te je vodeći koeficijent -1. Polinomi stupnja 5 općenito nisu ni rastuće ni neparne funkcije.

4. Neki linearni operator $\hat{A}$ na trodimenzionalnom kompleksnom prostoru ima svojstvene vrijednosti 1, i, $1-i$. Među svojstvenim vektorima tog operatora se nalaze vektori v i w koji u nekoj bazi prostora imaju koordinate $v = (1, i, 1-i)$ i $w = (1-i, i, 1)$. Za v znamo da je svojstveni vektor operatora $\hat{A}$ pridružen svojstvenoj vrijednosti 1. Što od sljedećeg je sigurno točno?

☑ w nije svojstveni vektor operatora $\hat{A}$ pridružen svojstvenoj vrijednosti 1

☐ w je također svojstveni vektor operatora $\hat{A}$ pridružen svojstvenoj vrijednosti 1

☑ $\mathrm{tr}(\hat{A}) = 2$ ☑ $\det(\hat{A}) = 2$ ☑ $\hat{A}$ se može dijagonalizirati

☑ $\hat{A}$ je invertibilan ☐ $\hat{A}$ je unitaran ☐ $\hat{A}$ je hermitski

Vektori v i w nemaju proporcionalne kooordinate, dakle su linearno nezavisni. Operator ima tri različite svojstvene vrijednosti, a djeluje na trodimenzionalnom prostoru, dakle nijedna ne može biti degenerirana. Stoga nijednoj svojstvenoj vrijednosti, npr. 1, ne mogu odgovarati dva linearno nezavisna svojstvena vektora. Budući da je v svojstveni vektor koji odgovara svojstvenoj vrijednosti 1, w ne može biti njoj pridruženi svojstveni vektor. Budući da operator ima onoliko svojstvenih vrijednosti kolika je dimenzija prostora na kom djeluje, on se može dijagonalizirati, tj. s obzirom na neku bazu taj operator ima matricu $A = \mathrm{diag}(1, i, 1-i)$ kojoj je trag 2, a determinanta $1+i$. Determinanta i trag su invarijante operatora, dakle je $\mathrm{tr}(\hat{A}) = 2$ i $\det(\hat{A}) = 1+i$. Budući da u spektru operatora nije 0, on je invertibilan. Budući da u spektru operatora imamo svostvenu vrijednost $1+i$ kojoj apsolutna vrijednost nije 1, on nije unitaran. Je li $\hat{A}$ hermitski ili ne ne može se zaključiti iz danih podataka, dakl ne možemo reći da je hermitski.

5. Zadana je diferencijalna jednadžba $t\,y' = 2y$.

☑ $y(t) = Ct^2$ je njezino opće rješenje

☑ $y(t) = 0$ je jedno njeno partikularno rješenje

☑ to je obična diferencijalna jednadžba 1. reda

☑ sve integralne krivulje ove jednadžbe su parne funkcije

☐ sve integralne krivulje ove jednadžbe su konveksne funkcije

Diferencijalna jednadžba je prvog reda te joj opće rješenje sadrži jednu neodređenu konstantu. Uvrstimo li $y(t) = Ct^2$ u jednadžbu, vidimo da ju zadovoljava, dakle se radi o njenom općem rješenju. Za $C = 0$ dobijemo partikularno rješenje $y(0) = 0$. Integralne krivulje ove jednadžbe su parabole $y = Ct^2$, a one sve jesu parne, ali su konveksne samo za $C > 0$.

7 Sedmi test nije održan

8 Obične diferencijalne jednadžbe

(a) Za kakve obične diferencijalne jednadžbe je skup svih njihovih rješenja vektorski prostor dimenzije 4? (Navedite najširu moguću klasu takvih jednadžbi!)
<u>*Za linearne homogene linearne diferencijalne jednadžbe reda 4.*</u>
Skup svih rješenja svake (dakle, ne samo s konstantnim koeficijentima) homogene linearne diferencijalne jednadžbe je vektorski prostor, one dimenzije koliki je red te jednadžbe.

(b) Za koje od sljedećih ODJ su među integralnim krivuljama sve parabole kojima je tjeme u ishodištu i kojima je y-os os simetrije?

☐ $y' = y$	☐ $y'' = y$	☑ $ty' = 2y$
☑ $y''t = y'$	☑ $y''' = 0$	☐ $y' - y/t = t$

Parabole s tjemenom u ishodištu kojima je y-os os simetrije imaju jednadžbe $y = Ct^2$, dakle su točni odgovori one diferencijalne jednadžbe koje zadovoljavaju sve funkcije $y = Ct^2$ kojoj su derivacije $y' = 2Ct$, $y'' = 2C$, $y''' = 0$.

(c) Diferencijalna jednadžba $y'''y'' = 2ty - y'$ je ...

☑ obična	☐ linearna	☐ homogena
☐ separabilna	☐ s konstantnim koeficijentima	☐ prvog reda
☐ drugog reda	☑ trećeg reda	☐ četvrtog reda

Diferencijalna jednadžba $y'''y'' = 2ty - y'$ je obična jer ne sadrži parcijalne derivacije i trećeg reda jer je najviša derivacija nepoznate funkcije koja se nalazi u jednadžbi treća. Nije linearna jer su druga i treća derivacija pomnožene, a onda nema smisla ni spominjati konstantne koeficijente te nije homogena linearna. No, ona nije ni separabilna ni homogena ODJ jer su takve jednadžbe uvijek prvog reda.

(d) Ako je kemijska reakcija stehiometrije A + 2B + 3C → P reda 3, parcijalno reda 1 s obzirom na svakog od 3 reaktanta, zakon brzine te reakcije u diferencijalnom obliku je obična diferencijalna jednadžba koja je ...

☑ prvog reda ☐ drugog reda ☐ trećeg reda

☑ rješiva separacijom varijabli ☐ linearna

Neovisno o redu i stehiometriji reakcije, diferencijalni oblik zakona brzine je uvijek separabilna ODJ prvog reda. No, budući da je red reakcije 3 parcijalno 1 s obzirom na reaktante i uzevši u obzir stehiometrijske koeficijenta ta će diferencijalna jednadžba biti oblika $\dot{x} = k\,(a-x)\,(b-2x)\,(c-3x)$, *što nije linearna diferencijalna jednadžba.*

(e) Razmatramo klasični jednodimenzionalni harmonijski oscilator s trenjem i vanjskom silom $F(t) = 1/\exp(t)$. Što od sljedećeg je točno za odgovarajuću običnu diferencijalnu jednadžbu?

☑ linearna je ☐ homogena je

☑ ona je s konstantnim koeficijentima ☑ ona je reda 2

☑ partikularnu komponentu općeg rješenja možemo odrediti metodom neodređenih koeficijenata

☑ partikularnu komponentu općeg rješenja možemo odrediti metodom varijacije konstanti

☐ karakteristična jednadžba joj sigurno ima dva različita realna rješenja

☐ karakteristična jednadžba joj ne može imati dvostruko rješenje

☐ sva rješenja su joj algebarske funkcije ☑ sva rješenja su joj transcendentne funkcije

Opći oblik diferencijalne jednadžbe za klasični jednodimenzionalni harmonijski oscilator je $m\ddot{x} + f\dot{x} + kx = F(t)$, *tj. uvijek je linearna s konstantnim koeficijentima i reda 2. U opisanom slučaju je* $F(t) = \exp(-t)$ *te se partikularno rješenje može tražiti objema metodama. Posebno, iz metode neodređenih koeficijenata očito je da će partikularno rješenje biti oblika* $C\exp(-t)$, *eventualno pomnoženo s* t *ili* t^2, *te je stoga i ukupno opće rješenje sigurno transcendentna funkcija. Karakteristična jednadžba joj je* $m\lambda^2 + f\lambda + k = 0$, *što ovisno o odnosu* m, f *(koji nije nula jer je rečeno da se radi o situaciji s trenjem) i* k *može rezultirati i dvama različitim realnim i jednim dvostrukim realnim i dvama različitim konjugirano kompleksnim rješenjima.*