Riješen kvalifikacijski zadatak iz Matematike 1 za kemičare

zadan 12. studenoga 2024.

Zadatak. Ovisnost pozitivne veličine α o veličini β opisana je jednadžbom

$$\ln\left(\frac{\text{☺}}{\alpha}\right)\exp\left(-\frac{\text{☹}}{\beta}\right)=\left(\frac{1}{3}\right)^{\sqrt[3]{\text{😐}^2/\beta^2}}.$$

Veličine ☺, ☹ i 😐 su konstantne i za ovaj zadatak imaju iznose $\text{☺}=80{,}51\,\square\,\bigcirc^{-2}$, $\text{☹}=125{,}1\,\text{⚹}^3\ \bigcirc\ \square^{-1}$ i $\text{😐}=21{,}50\,\text{⚹}^3\ \bigcirc\ \square^{-1}$.

(a) Jedinica od α je $\underline{\square\,\bigcirc^{-2}}$, a jedinica od β je $\underline{\text{⚹}\ \bigcirc\ \square^{-1}}$.

(b) Linearizirajte zadanu ovisnost, odnosno interpretirajte ju kao jednadžbu pravca $y=a\,x+b$ u Kartezijevom koordinatnom sustavu. Odabir treba biti takav da se iz poznate vrijednosti x odnosno y lako i jednoznačno može izračunati α odnosno β.

$$\ln\left(\frac{\text{☺}}{\alpha}\right)\exp\left(-\frac{\text{☹}}{\beta}\right)=\left(\frac{1}{3}\right)^{\sqrt[3]{\text{😐}^2/\beta^2}}\Leftrightarrow\ln\left(\frac{\text{☺}}{\alpha}\right)=\exp\left(\frac{\text{☹}}{\beta}\right)\left(\frac{1}{3}\right)^{\sqrt[3]{\text{😐}^2/\beta^2}}\ \Big/\ \ln$$

$$\Leftrightarrow\ln\ln\left(\frac{\text{☺}}{\alpha}\right)=\frac{\text{☹}}{\beta}+\sqrt[3]{\frac{\text{😐}^2}{\beta^2}}\ln\frac{1}{3}\Leftrightarrow\beta\ln\ln\left(\frac{\text{☺}}{\alpha}\right)=\text{☹}-\sqrt[3]{\text{😐}^2\,\beta}\,\ln 3$$

Dakle, jedna moguća linearizacija je:

$$y=\underline{\frac{\beta}{\text{⚹}\ \bigcirc\ \square^{-1}}\ln\ln\left(\frac{\text{☺}}{\alpha}\right)},\qquad x=\underline{\sqrt[3]{\frac{\beta}{\text{⚹}\ \bigcirc\ \square^{-1}}}},$$

$$a=\underline{-\sqrt[3]{\frac{\text{😐}^2}{\text{⚹}^6\ \bigcirc^2\ \square^{-3}}}\ln 3=-8{,}4944792\ldots},\qquad b=\underline{\frac{\text{☹}}{\text{⚹}^3\ \bigcirc\ \square^{-1}}=125{,}1}$$

(c) Za $x=1{,}234$, uz gornju linearizaciju pripadni α iznosi $\underline{80{,}51\exp(-\exp(60{,}99674\ldots))\,\square\,\bigcirc^{-2}\approx 0}$, a pripadni β iznosi $\underline{1{,}879\,\text{⚹}^3\ \bigcirc\ \square^{-1}}$.

(d) Unutar zadanog pravokutnog okvira (dolje) grafički prikažite lineariziranu ovisnost α o β ako znate da su se iznosi α (ili β) kretali u rasponu od 0,1000 do 0,5000 jedinica određenih u (a)-dijelu zadatka. Pritom obratite pažnju na korektno označavanje osi, te prikladan raspon odabira raspona na osi apscisa i na osi ordinata da maksimalno iskoristite prostor unutar okvira.

Za gornju linearizaciju zadatak nije rješiv sa zadanim rasponom α, pa crtamo za $0{,}1000\le\frac{\beta}{\text{⚹}\,\bigcirc\,\square^{-1}}\le 0{,}5000$, odnosno $x_1=0{,}4642\le x\le 0{,}7937=x_2$ i $y_1=121{,}2\ge y\ge 118{,}4=y_2$. Traženi graf je dužina koja spaja točke (x_1,y_1) i (x_2,y_2) u koordinatnom sustavu s rasponima osi od otprilike 0,4 do 0,8 (os apscisa) i od otprilike 118 do 122 (os ordinata). Pritom, os apscisa treba biti označena s $\sqrt[3]{\frac{\beta}{\text{⚹}\,\bigcirc\,\square^{-1}}}$, a os ordinata s $\frac{\beta}{\text{⚹}\,\bigcirc\,\square^{-1}}\ln\ln\left(\frac{\text{☺}}{\alpha}\right)$.

Riješen kvalifikacijski zadatak iz Matematike 1 za kemičare

zadan 12. studenoga 2024.

Zadatak. Ovisnost pozitivne veličine γ o veličini δ opisana je jednadžbom

$$\sqrt{\frac{1}{\gamma^2 + 😐^2}} = \frac{☺}{☹😄 + \frac{☺}{☹ + ☺/\delta}}.$$

Veličine ☺, ☹, 😐 i 😄 su konstantne i za ovaj zadatak imaju iznose $☺ = 2{,}65 \cdot 10^3\ \square\bigcirc$, $☹ = 1,251 \cdot 10^3\ ⚹^2\ \bigcirc\ \square$, $😐 = 1{,}505 \cdot 10^2\ ⚹^{-2}\ \bigcirc^{-1}\ \square^{-1}$ i $😄 = 2{,}000\ ⚹^{-4}\ \bigcirc^{-1}\ \square^{-1}$.

(a) Jedinica od γ je $\underline{⚹^{-1}\ \bigcirc^{-1}\ \square^{-1}}$, a jedinica od δ je $\underline{⚹^{-2}}$.

(b) Linearizirajte zadanu ovisnost, odnosno interpretirajte ju kao jednadžbu pravca $y = a\,x + b$ u Kartezijevom koordinatnom sustavu. Odabir treba biti takav da se iz poznate vrijednosti x odnosno y lako i jednoznačno može izračunati γ odnosno δ.

$$\sqrt{\frac{1}{\gamma^2 + 😐^2}} = \frac{☺}{☹😄 + \frac{☺}{☹ + ☺/\delta}} \Leftrightarrow$$

$$\sqrt{\gamma^2 + 😐^2} = \frac{☹😄 + \frac{☺}{☹ + ☺/\delta}}{☺} = \frac{☹😄}{☺} + \frac{\frac{☺}{☹ + ☺/\delta}}{☺} = \frac{☹😄}{☺} + \frac{\delta}{☹\,\delta + ☺} =$$

$$= \frac{☹😄}{☺} + \frac{1}{☹}\,\frac{☹\delta + ☺ - ☺}{☹\,\delta + ☺} = \frac{☹😄}{☺} + \frac{1}{☹} - \frac{☺}{☹} \cdot \frac{1}{☹\,\delta + ☺}.$$

Dakle, jedna moguća linearizacija je

$$\underline{y = \sqrt{\frac{\gamma^2 + 😐^2}{⚹^{-2}\ \bigcirc^{-2}\ \square^{-2}}}}, \quad \underline{x = \frac{\square\bigcirc}{☹\,\delta + ☺}}$$

$$\underline{a = -\frac{☺⚹^2}{☹} = -2{,}118305\ldots}, \quad \underline{b = \frac{☹😄\square\bigcirc}{☺⚹^2} + \frac{⚹^2\ \bigcirc\ \square}{☹} = 0{,}9449503\ldots}$$

(c) Za $y = 0{,}500 \cdot 10^{-3}$ (alternativno za $y = 5{,}00 \cdot 10^5$ — primjerice, za gornju linearizaciju se s prvim y ne može dobiti realan γ), pripadni γ iznosi $\underline{5{,}00 \cdot 10^5\ ⚹^{-1}\ \bigcirc^{-1}\ \square^{-1}}$, a pripadni δ iznosi $\underline{-2{,}12\ ⚹^{-2}}$.

(d) Unutar zadanog pravokutnog okvira (dolje) grafički prikažite lineariziranu ovisnost γ o δ ako znate da su se iznosi δ kretali u rasponu od 1000 do 3000 jedinica određenih u (a)-dijelu zadatka. Pritom obratite pažnju na korektno označavanje osi, te prikladan raspon odabira raspona na osi apscisa i na osi ordinata da maksimalno iskoristite prostor unutar okvira.

Za gornju linearizaciju crtamo za $1000 \le \frac{\delta}{⚹^{-2}} \le 3000$, odnosno $x_1 = 7{,}98 \cdot 10^{-7} \ge x \ge 2{,}66 \cdot 10^{-7} = x_2$ i $y_1 = 0{,}94494861 \le y \le 0{,}94494974 = y_2$. Traženi graf je dužina koja spaja točke (x_1, y_1) i (x_2, y_2) u koordinatnom sustavu s rasponima osi od otprilike $2{,}5 \cdot 10^{-7}$ do $8 \cdot 10^{-7}$ (os apscisa) i od otprilike $= 0{,}9449486$ do $0{,}9449497$ (os ordinata). Pritom, os apscisa treba biti označena s $\frac{\square\bigcirc}{☹\delta + ☺}$, a os ordinata s $\sqrt{\frac{\gamma^2 + 😐^2}{⚹^{-2}\bigcirc^{-2}\square^{-2}}}$.

Riješen kvalifikacijski zadatak iz Matematike 1 za kemičare

zadan 12. studenoga 2024.

Zadatak. Ovisnost pozitivne veličine ε o pozitivnoj veličini ζ opisana je jednadžbom

$$\frac{1}{\ln(\text{☺}\,\varepsilon)} = \ln\Big(\text{☹}\,(1-\exp(-\text{😄}/\zeta)) + \text{😐}\,\exp(-\text{😄}/\zeta)\Big).$$

Veličine ☺, ☹, 😐 i 😄 su konstantne i za ovaj zadatak imaju iznose $\text{☺} = 10{,}2\,\square^{1/2}\,\bigcirc^{-1}$, $\text{☹} = 21{,}50$, $\text{😐} = 35{,}01$ i $\text{😄} = 51{,}55\,\text{⚹}^3\;\bigcirc\;\square^{-1}$.

(a) Jedinica od ε je $\underline{\bigcirc\,\square^{-1/2}}$, a jedinica od ζ je $\underline{\text{⚹}^3\;\bigcirc\;\square^{-1}}$.

(b) Linearizirajte zadanu ovisnost, odnosno interpretirajte ju kao jednadžbu pravca $y = a\,x + b$ u Kartezijevom koordinatnom sustavu. Odabir treba biti takav da se iz poznate vrijednosti x odnosno y lako i jednoznačno može izračunati ε odnosno ζ.

$$\frac{1}{\ln(\text{☺}\,\varepsilon)} = \ln\Big(\text{☹}\,(1-\exp(-\text{😄}/\zeta)) + \text{😐}\,\exp(-\text{😄}/\zeta)\Big) = \ln\Big(\text{☹} + (\text{😐}-\text{☹})\exp(-\text{😄}/\zeta)\Big)\Big/\exp$$

$$\Leftrightarrow \exp\left(\frac{1}{\ln(\text{☺}\,\varepsilon)}\right) = \text{☹} + (\text{😐}-\text{☹})\exp\left(-\frac{\text{😄}}{\zeta}\right)$$

Dakle, jedna moguća linearizacija je

$$y = \underline{\exp\left(\frac{1}{\ln(\text{☺}\,\varepsilon)}\right)}, \quad x = \underline{\exp\left(-\frac{\text{😄}}{\zeta}\right)}$$

$$a = \underline{\text{😐}-\text{☹} = 13{,}51}, \quad b = \underline{\text{☹} = 21{,}50}$$

(c) Za $y = 0{,}500\cdot 10^{-3}$, pripadni ε iznosi $\underline{0{,}0877\;\bigcirc\;\square^{-1/2}}$, a pripadni ζ iznosi <u>se za ovu linearizaciju ne može odrediti (dobio bi se logaritam negativnog broja)</u>.

(d) Unutar zadanog pravokutnog okvira (dolje) grafički prikažite lineariziranu ovisnost ε o ζ ako znate da su se iznosi ζ kretali u rasponu od 10,00 do 90,00 jedinica određenih u (a)-dijelu zadatka. Pritom obratite pažnju na korektno označavanje osi, te prikladan raspon odabira raspona na osi apscisa i na osi ordinata da maksimalno iskoristite prostor unutar okvira.

Za gornju linearizaciju crtamo za $10{,}00 \le \frac{\zeta}{\text{⚹}^3\bigcirc\square^{-1}} \le 90{,}00$, odnosno $x_1 = 0{,}005770 \le x \le 0{,}5640 = x_2$ i $y_1 = 13{,}63 \le y \le 25{,}64 = y_2$. Traženi graf je dužina koja spaja točke (x_1, y_1) i (x_2, y_2) u koordinatnom sustavu s rasponima osi od otprilike 0 do 0,6 (os apscisa) i od otprilike 13 do 26 (os ordinata). Pritom, os apscisa treba biti označena s $\exp\left(-\frac{\text{😄}}{\zeta}\right)$, a os ordinata s $\exp\left(\frac{1}{\ln(\text{☺}\,\varepsilon)}\right)$.