MATIČNI BROJ STUDENTA | IME I PREZIME | BROJ BODOVA

LINEARNA ALGEBRA 1

1. kolokvij - 23. studenog 2020.

ZADATAK 1

a) (2 boda) Za koje vrijednosti parametara $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ vektori $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathrm{V}^3(O)$ zadani s

$$\vec{a} = \vec{i} - 2\vec{j} - \vec{k}, \quad \vec{b} = -\vec{i} + 2\vec{j} + \lambda\vec{k}, \quad \vec{c} = \vec{i} - \mu\vec{j},$$

čine sustav izvodnica za $\mathrm{V}^3(O)$?

b) (3 boda) Postoje li $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ takvi da je $[\{\vec{a} + \vec{b}, \vec{c}\}] = [\{\vec{a}, \vec{b}\}]$? Obrazložite odgovor.

Rješenje:

a) Označimo $S = \{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$, $L = [S]$. Skup S je sustav izvodnica za $V^3(O)$ ako je $L = V^3(O)$. Kako je $S \subseteq V^3(O)$, pa je $L \leq V^3(O)$, ovo je ekvivalentno s tim da je $\dim L = \dim V^3(O) = 3$. S druge strane, zbog $\vec{0} \neq \vec{a} \in L$, imamo $L \neq \{\vec{0}\}$, pa postoji podskup od S koji je baza za L. Dakle $\dim L \leq 3$, odnosno $\dim L = 3$ ako i samo ako je S linearno nezavisan skup.

Zaključujemo: S je sustav izvodnica ako i samo ako je linearno nezavisan skup, odnosno ako i samo ako jednadžba $\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c} = \vec{0}$ ima samo jedinstveno rješenje ($\alpha = \beta = \gamma = 0$).

Imamo

$$\begin{aligned} &\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c} = \vec{0} \\ &(\alpha - \beta + \gamma)\vec{i} + (-2\alpha + 2\beta - \mu)\vec{j} + (-\alpha + \lambda\beta)\vec{k} = \vec{0} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \alpha - \beta + \gamma &= 0 \\ -2\alpha + 2\beta - \mu\gamma &= 0 \\ -\alpha + \lambda\beta &= 0 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \alpha - \beta + \gamma &= 0 \\ (2 - \mu)\gamma &= 0 \\ (\lambda - 1)\beta + \gamma &= 0 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \alpha - \beta + \gamma &= 0 \\ (\lambda - 1)\beta + \gamma &= 0 \\ (2 - \mu)\gamma &= 0 \end{aligned}$$

Rješenje je jedinstveno ako i samo ako je $\mu \neq 2$ i $\lambda \neq 1$.

b) Provjerimo kada je $\{\vec{a} + \vec{b}, \vec{c}\} \subseteq [\{\vec{a}, \vec{b}\}]$ i $[\{\vec{a} + \vec{b}, \vec{c}\}] \supseteq \{\vec{a}, \vec{b}\}$.

- $\vec{a} + \vec{b} = 1 \cdot \vec{a} + 1 \cdot \vec{b}$

- $\vec{c} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b}$ odnosno $\vec{i} - \mu\vec{j} = (\alpha - \beta)\vec{i} + (-2\alpha + 2\beta)\vec{j} + (-\alpha + \lambda\beta)\vec{k}$

$$\begin{aligned} 1 &= \alpha - \beta \\ -\mu &= -2\alpha + 2\beta \implies \mu = 2 \\ 0 &= -\alpha + \lambda\beta \implies (\lambda - 1)\beta = 1 \implies \lambda \neq 1 \end{aligned}$$

- $\vec{a} = \alpha(\vec{a} + \vec{b}) + \beta\vec{c}$ odnosno $\vec{i} - 2\vec{j} - \vec{k} = \beta\vec{i} - \beta\mu\vec{j} + \alpha(\lambda - 1)\vec{k}$

$$\begin{aligned} 1 &= \beta \\ -2 &= -\beta\mu \implies \mu = 2 \\ -1 &= \alpha(\lambda - 1) \implies \lambda \neq 1 \end{aligned}$$

- $\vec{b} = \alpha(\vec{a} + \vec{b}) + \beta\vec{c}$ odnosno $-\vec{i} + 2\vec{j} + \lambda\vec{k} = \beta\vec{i} - \beta\mu\vec{j} + \alpha(\lambda - 1)\vec{k}$

$$\begin{aligned} -1 &= \beta \\ 2 &= -\beta\mu \implies \mu = 2 \\ \lambda &= \alpha(\lambda - 1) \implies \lambda \neq 1 \end{aligned}$$

Zaključujemo: $[\{\vec{a} + \vec{b}, \vec{c}\}] = [\{\vec{a}, \vec{b}\}]$ ako i samo ako $\lambda \neq 1$ i $\mu = 2$.

MATIČNI BROJ STUDENTA | IME I PREZIME | BROJ BODOVA

LINEARNA ALGEBRA 1

1. kolokvij - 23. studenog 2020.

ZADATAK 2

Neka je $M = \{(z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{C}^3 : z_1 - z_2 + \overline{z_3} = 0\}$.

a) (2 boda) Je li M potprostor kompleksnog vektorskog prostora $\mathbb{C}^3$? Ako da, odredite mu dimenziju i neku bazu.

b) (3 boda) Je li M potprostor realnog vektorskog prostora $\mathbb{C}^3_{\mathbb{R}}$? Ako da, odredite mu dimenziju i neku bazu.

Rješenje:

a) Neka su $v = (v_1, v_2, v_3), w = (w_1, w_2, w_3) \in M$, te $\alpha \in \mathbb{C}$.

$$\begin{aligned} v_1 + w_1 - (v_2 + w_2) + \overline{(v_3 + w_3)} &= v_1 + w_1 - (v_2 + w_2) + \overline{v_3} + \overline{w_3} \\ &= v_1 - v_2 + \overline{v_3} + w_1 - w_2 + \overline{w_3} = 0 + 0 = 0. \end{aligned}$$

Dakle $v + w = (v_1 + w_1, v_2 + w_2, v_3 + w_3) \in M$. Dalje

$$\begin{aligned} \alpha v \in M \iff 0 &= \alpha v_1 - \alpha v_2 + \overline{\alpha v_3} = \alpha v_1 - \alpha v_2 + \overline{\alpha} \cdot \overline{v_3} \\ &= \alpha v_1 - \alpha v_2 + \overline{\alpha} \cdot \overline{v_3} + \alpha \cdot \overline{v_3} - \alpha \cdot \overline{v_3} = (\overline{\alpha} - \alpha)\overline{v_3} \end{aligned}$$

Za $\alpha = i$ i $v = (i, 0, i)$ imamo $v \in M$ i $\alpha v \notin M$.

Dakle M nije potprostor od $\mathbb{C}^3$.

b) Neka je $w = (x_1 + iy_1, x_2 + iy_2, x_3 + iy_3) \in M, x_i, y_i \in \mathbb{R}, i = 1, 2, 3$. Imamo $x_1 + iy_1 - x_2 - iy_2 + x_3 - iy_3 = 0$ odnosno

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + x_3 = 0 &\implies x_1 = x_2 - x_3 \\ y_1 - y_2 - y_3 = 0 &\implies y_1 = y_2 + y_3 \end{aligned}$$

Dakle

$$\begin{aligned} w =& (x_1 + iy_1, x_2 + iy_2, x_3 + iy_3) \\ =& (x_2 - x_3 + i(y_2 + y_3), x_2 + iy_2, x_3 + iy_3) \\ =& x_2(1, 1, 0) + x_3(-1, 0, 1) + y_2(i, i, 0) + y_3(i, 0, i). \end{aligned}$$

Označimo $S = \{(1,1,0),(-1,0,1),(i,i,0),(i,0,i)\}$. Imamo $M = [S] \leq \mathbb{C}^3_{\mathbb{R}}$, odnosno M je potprostor realnog vektorskog prostora $\mathbb{C}^3_{\mathbb{R}}$. Skup S je skup generatora za M. Pokažimo da je linearno nezavisan: $\alpha(1,1,0)+\beta(-1,0,1)+\gamma(i,i,0)+\delta(i,0,i) = (0,0,0)$

$$\begin{aligned} \alpha - \beta + i\gamma + i\delta &= 0 \\ \alpha + i\gamma &= 0 \implies \alpha = \gamma = 0 \\ \beta + i\delta &= 0 \implies \beta = \delta = 0 \end{aligned}$$

Dakle, S je linearno nezavisan sustav izvodnica za M, pa je baza za M i $\dim M = \operatorname{card} S = 4$.

MATIČNI BROJ STUDENTA | IME I PREZIME | BROJ BODOVA

LINEARNA ALGEBRA 1

1. kolokvij - 23. studenog 2020.

ZADATAK 3

(5 bodova) Neka je $\mathcal{P}_3$ prostor polinoma stupnja manjeg ili jednakog 3 i neka su

$$K = \{p \in \mathcal{P}_3 : p(2) = 2p(1)\}, \qquad L = \{p \in \mathcal{P}_3 : p(1) = p(-1) = 0\}.$$

Nađite neke baze za $K \cap L$ i $K + L$.

Rješenje:

Zadatak možemo riješiti na standardni način tako da nađemo bazu za K (npr. $\{x, x^2+2, x^3+6\}$) i bazu za L (npr. $\{(x-1)(x+1), x(x-1)(x+1)\}$) pa algoritmom s vježbi odredimo baze za sumu i presjek tih potprostora. No, jednostavnije je pogledati kako izgleda presjek:

$$K \cap L = \{p \in \mathcal{P}_3 : p(2) = 2p(1) \text{ i } p(1) = p(-1) = 0\} = \{p \in \mathcal{P}_3 : p(2) = p(1) = p(-1) = 0\}.$$

Dakle, tražimo sve polinome koji imaju nultočke u točkama -1, 1, 2. To su polinomi oblika $p(x) = c(x+1)(x-1)(x-2)$, $c \in \mathbb{R}$, pa je potprostor $K \cap L$ jednodimenzionalan i njegova baza je $\{(x+1)(x-1)(x-2)\}$. Sumu potprostora možemo dobiti tako da najprije odredimo njenu dimenziju:

$$\dim(K+L) = \dim K + \dim L - \dim(K \cap L) = 3 + 2 - 1 = 4 = \dim \mathcal{P}_3$$

pa primijetimo da je u tom slučaju $K + L = \mathcal{P}_3$ i njegova baza je bilo koja baza za $\mathcal{P}_3$, npr. kanonska $\{1, x, x^2, x^3\}$.

MATIČNI BROJ STUDENTA | IME I PREZIME | BROJ BODOVA

LINEARNA ALGEBRA 1

1. kolokvij - 23. studenog 2020.

ZADATAK 4

Neka je $n \in \mathbb{N}$. Zadane su matrice $A_n = \begin{bmatrix} 1 & n \\ 1 & n \end{bmatrix}$ i potprostori K_n vektorskog prostora $M_2(\mathbb{R})$:

$$K_n = \{X \in M_2(\mathbb{R}) : A_n X = 0\}.$$

a) (2 boda) Ovisno o $n \in \mathbb{N}$, odredite dimenziju i bazu potprostora K_n.

b) (2 boda) Ovisno o $n \in \mathbb{N}$, odredite bazu nekog direktnog komplementa od K_n u $M_2(\mathbb{R})$.

c) (1 bod) Odredite neki **zajednički** direktni komplement svih potprostora $K_n, n \in \mathbb{N}$, to jest, odredite $L \leq M_2(\mathbb{R})$ takav da je

$$L \dot{+} K_n = M_2(\mathbb{R}), \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Rješenje:

a) Neka je $n \in \mathbb{N}$. Uzmemo $X = \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$ i računamo:

$$\begin{bmatrix} 1 & n \\ 1 & n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x + nz & y + nw \\ x + nz & y + nw \end{bmatrix}.$$

Vidimo da je $A_n X = 0$ ako i samo ako je $x = -nz$ i $y = -nw$. Zaključujemo da vrijedi:

$$K_n = \left\{ \begin{bmatrix} -nz & -nw \\ z & w \end{bmatrix} : z, w \in \mathbb{R} \right\}.$$

Tada je skup

$$\left\{ \begin{bmatrix} -n & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & -n \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$$

(jedna moguća) baza za K_n i vrijedi $\dim K_n = 2$ za sve $n \in \mathbb{N}$.

b), c) **Jedno moguće rješenje**: nadopunjavanjem baze od K_n s kanonskom bazom od $M_2(\mathbb{R})$ se vidi da možemo staviti

$$L = \left[\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right\} \right] = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix} : a, b \in \mathbb{R} \right\}.$$

MATIČNI BROJ STUDENTA | IME I PREZIME | BROJ BODOVA

LINEARNA ALGEBRA 1

1. kolokvij - 23. studenog 2020.

ZADATAK 5

Neka je V n-dimenzionalni vektorski prostor.

a) (3 boda) Dokažite da postoji linearno zavisan skup u V koji ima $n+1$ elemenata i takav da su svi njegovi neprazni pravi podskupovi linearno nezavisni.

b) (2 boda) Postoji li linearno zavisan skup u V od $n+2$ elementa čiji su svi neprazni pravi podskupovi linearno nezavisni? Odgovor obrazložite.

Rješenje:

a) Neka je $\{b_1, \ldots, b_n\}$ bilo koja baza za V i $b_{n+1} = \sum_{i=1}^n \alpha_i b_i$ takav da je $\alpha_i \neq 0$ za sve $i = 1, \ldots, n$. Tada je $S = \{b_1, b_2, \ldots, b_n, b_{n+1}\}$ primjer traženog skupa. S je linearno zavisan jer ima više elemenata nego što je dimenzija prostora kojem pripada.

Dovoljno je provjeriti da su svi n-člani podskupovi od S linearno nezavisni jer će tada i svi drugi podskupovi biti linearno nezavisni (podskup linearno nezavisnog skupa je linearno nezavisan). Jedan n-člani podskup je $\{b_1, \ldots, b_n\}$, a to je baza i zato linearno nezavisan. Pogledajmo sada $S \setminus \{b_i\}$ za neki $i \in \{1, \ldots, n\}$. Radi lakšeg zapisa uzmimo $S \setminus \{b_1\} = \{b_{n+1}, b_2, \ldots, b_n\}$. Tada

$$\beta_1 b_{n+1} + \beta_2 b_2 + \ldots + \beta_n b_n = 0$$

daje

$$\beta_1 \alpha_1 b_1 + (\beta_2 + \beta_1 \alpha_2) b_2 + \ldots + (\beta_n + \beta_1 \alpha_n) b_n = 0$$

odakle je (jer je $\{b_1, \ldots, b_n\}$ baza)

$$\beta_1 \alpha_1 = 0, \beta_2 + \beta_1 \alpha_2 = 0, \ldots, \beta_n + \beta_1 \alpha_n = 0.$$

Zbog $\alpha_1 \neq 0$ slijedi $\beta_1 = 0$, a onda $\beta_2 = \ldots = \beta_n = 0$. Time je dokaz kompletiran. (Napomena: nije bilo neophodno provesti cijeli račun za linearnu nezavisnost, dovoljno je bilo i riječima opisati zašto su skupovi $S \setminus \{b_i\}$ linearno nezavisni.)

Drugi način je da uzmemo bazu $\{b_1, \ldots, b_n\}$ za V i konkretan b_{n+1} s gornjim svojstvima, najčešći izbor je $b_{n+1} = \sum_{i=1}^n b_i$. Tada je gornja provjera jednostavnija.

b) Takav skup ne postoji. Naime, svaki skup od $n+2$ elemenata ima pravi podskup od $n+1$ elemenata, a taj je nužno linearno zavisan jer ima više od $\dim V$ elemenata.