LINEARNA ALGEBRA 2

Prvi kolokvij – srijeda, 24. studenog 2021.

Zadatak 1. (11 bodova)

(a) (8 bodova) Odredite sve realne brojeve λ takve da je preslikavanje $s : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dano sa

$$s((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = \lambda x_1 y_1 + (\lambda^2 - 1)x_1 y_2 + (\lambda + 1)x_2 y_1 + \lambda^3 x_2 y_2$$

skalarni produkt na $\mathbb{R}^2$.

(b) (3 boda) Za vrijednost λ dobivenu u (a) dijelu zadatka, odredite norme vektora $(1, 1)$ i $(1, -1)$, pri čemu je norma inducirana skalarnim produktom s.

Rješenje.

(a) Da bi preslikavanje s bilo skalarni produkt, mora vrijediti $s((x_1, x_2), (x_1, x_2)) \geq 0$, za sve $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$. Za vektor $(1, 0)$ taj uvjet glasi

$$s((1, 0), (1, 0)) = \lambda \geq 0,$$

pa zaključujemo da nužno mora vrijediti $\lambda \geq 0$. Nadalje, preslikavanje mora biti simetrično, tj. mora vrijediti $s((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = s((y_1, y_2), (x_1, x_2))$, za sve $(x_1, x_2), (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$. Za $(x_1, x_2) = (1, 0)$ i $(y_1, y_2) = (0, 1)$ imamo

$$\lambda^2 - 1 = \lambda + 1.$$

Rješenja te jednadžbe su 2 i -1. Kako nužno mora vrijediti $\lambda \geq 0$, zaključujemo da je jedini kandidat za rješenje $\lambda = 2$. Za $\lambda = 2$ dano preslikavanje glasi

$$s((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = 2x_1 y_1 + 3x_1 y_2 + 3x_2 y_1 + 8x_2 y_2,$$

i pokazat ćemo da je ovo skalarni produkt.

i) *Pozitivna definitnost.* Za sve $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ vrijedi

$$s((x_1, x_2), (x_1, x_2)) = 2x_1^2 + 6x_1 x_2 + 8x_2^2 = 2\left(x_1 + \frac{3}{2}x_2\right)^2 + \frac{7}{2}x_2^2 \geq 0,$$

pri čemu jednakost vrijedi ako i samo ako $(x_1, x_2) = (0, 0)$.

ii) *Simetričnost.* Za sve $(x_1, x_2), (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$ vrijedi

$$s((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = 2x_1y_1+3x_1y_2+3x_2y_1+8x_2y_2 = 2y_1x_1+3y_2x_1+3y_1x_2+8y_2x_2 = s((y_1, y_2), (x_1, x_2)).$$

iii) *Homogenost.* Za sve $(x_1, x_2), (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$, $\alpha \in \mathbb{R}$ vrijedi

$$s(\alpha(x_1, x_2), (y_1, y_2)) = 2\alpha x_1 y_1 + 3\alpha x_1 y_2 + 3\alpha x_2 y_1 + 8\alpha x_2 y_2 = \alpha s((x_1, x_2), (y_1, y_2)).$$

iv) *Aditivnost.* Za sve $(x_1, x_2), (y_1, y_2), (z_1, z_2) \in \mathbb{R}^2$ vrijedi

$$\begin{aligned} s((x_1, x_2) + (y_1, y_2), (z_1, z_2)) &= 2(x_1 + y_1)z_1 + 3(x_1 + y_1)z_2 + 3(x_2 + y_2)z_1 + 8(x_2 + y_2)z_2 \\ &= (2x_1 z_1 + 3x_1 z_2 + 3x_2 z_1 + 8x_2 z_2) + (2y_1 z_1 + 3y_1 z_2 + 3y_2 z_1 + 8y_2 z_2) \\ &= s((x_1, x_2), (z_1, z_2)) + s((y_1, y_2), (z_1, z_2)). \end{aligned}$$

Dakle, s je skalarni produkt za $\lambda = 2$.

(b) Norma inducirana skalarnim produktom iz (a) je

$$\|(x_1, x_2)\| = \sqrt{2x_1^2 + 6x_1 x_2 + 8x_2^2},$$

i jednostavno se izračuna da je $\|(1, 1)\| = 4$ te $\|(1, -1)\| = 2$.

LINEARNA ALGEBRA 2
Prvi kolokvij – srijeda, 24. studenog 2021.

Zadatak 2. (13 bodova) U unitarnom prostoru $\mathbb{R}^4$ sa standardnim skalarnim produktom zadan je potprostor $L = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \ : \ x_1 + 2x_3 - 5x_4 = 0,\ x_2 + x_3 - 2x_4 = 0\}$. Odredite:

(a) (6 bodova) po jednu ortonormiranu bazu za L i $L^\perp$,

(b) (4 boda) ortogonalnu projekciju vektora (x_1, x_2, x_3, x_4) na potprostor L,

(c) (3 boda) udaljenost vektora $(1, 2, 1, 0)$ od potprostora $L^\perp$.

Rješenje.

(a) Prvo trebamo odrediti neku bazu za L, npr. $\{a_1, a_2\} = \{(-2, -1, 1, 0), (5, 2, 0, 1)\}$. Primijenimo Gram-Schmidtov postupak na tu bazu. Imamo $e_1 = \frac{a_1}{\|a_1\|} = \frac{1}{\sqrt{6}}(-2, -1, 1, 0)$. Dalje računamo

$$b_2 = a_2 - (a_2|e_1)e_1 = (5, 2, 0, 1) + 2(-2, -1, 1, 0) = (1, 0, 2, 1),$$

pa je $e_2 = \frac{b_2}{\|b_2\|} = \frac{1}{\sqrt{6}}(1, 0, 2, 1)$. Sada je $\{e_1, e_2\} = \{\frac{1}{\sqrt{6}}(-2, -1, 1, 0), \frac{1}{\sqrt{6}}(1, 0, 2, 1)\}$ ortonormirana baza za L.

Sada odredimo neku bazu za $L^\perp$. Neka je $x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4$, vrijedi $(x|a_1) = (x|a_2) = 0$ ako i samo ako $-2x_1 - x_2 + x_3 = 5x_1 + 2x_2 + x_4 = 0$, odnosno $x_3 = 2x_1 + x_2$, $x_4 = -5x_1 - 2x_2$. Tada je

$$x = (x_1, x_2, 2x_1 + x_2, -5x_1 - 2x_2) = (1, 0, 2, -5)x_1 + (0, 1, 1, -2)x_2,$$

pa je$\{a_3, a_4\} = \{(1, 0, 2, -5), (0, 1, 1, -2)\}$ jedna baza za $L^\perp$. Uočimo da su a_3 i a_4 linearno nezavisni, pa stvarno čine bazu za $L^\perp$. Primjenom Gram-Schmidtovog postupka na skup $\{a_3, a_4\}$ dobivamo $\{e_3, e_4\} = \{\frac{1}{\sqrt{30}}(1, 0, 2, -5), \frac{1}{\sqrt{30}}(-2, 5, 1, 0)\}$ ortonormiranu bazu za $L^\perp$.

(Napomena: odabirom nekih drugih baza $\{a_1, a_2\}$ i $\{a_3, a_4\}$ bi se dobile različite ortonormirana baza za L i $L^\perp$.)

(b) Skup $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ je ONB za $\mathbb{R}^4$. Tada je

$$x = (x_1, x_2, x_3, x_4) = \underbrace{(x|e_1)e_1 + (x|e_2)e_2}_{\in L} + \underbrace{(x|e_3)e_3 + (x|e_4)e_4}_{\in L^\perp},$$

pa je ortogonalna projekcija vektora (x_1, x_2, x_3, x_4) na potprostor L jednaka

$$(x|e_1)e_1 + (x|e_2)e_2 = ... = \frac{1}{6}(5x_1 + 2x_2 + x_4, 2x_1 + x_2 - x_3, -x_2 + 5x_3 + 2x_4, x_1 + 2x_3 + x_4).$$

(c) Označimo $y = (1, 2, 1, 0)$. Lako se izračuna koristeći (b) da je projekcija vektora y na potprostor L jednaka $\frac{1}{2}(3, 1, 1, 1)$. Tada je

$$d(y, L^\perp) = \|y - \text{"projekcija } y \text{ na } L^\perp\text{"}\| = \|\text{"projekcija } y \text{ na } L\text{"}\| = \|\frac{1}{2}(3, 1, 1, 1)\| = \sqrt{3}.$$

LINEARNA ALGEBRA 2

Prvi kolokvij – srijeda, 24. studenog 2021.

Zadatak 3. (12 bodova)

(a) (5 bodova) Neka je $\{a_1, \ldots, a_m\}$ linearno nezavisni podskup unitarnog prostora V. Ako se na taj skup primijeni Gram-Schmidtov postupak, koja svojstva ima dobiveni skup? (Nije potrebno ispisati formule za vektore iz tog skupa).

(b) (7 bodova) Neka je $\{a_1, a_2, a_3\}$ linearno nezavisan podskup koji nije ortogonalan. Ako se Gram-Schmidtov postupak primijeni na skup $\{a_1, a_2, a_3\}$ i na skup $\{a_3, a_2, a_1\}$ (u navedenom redoslijedu vektora), mogu li se dobiveni skupovi sastojati od ista 3 vektora, samo u različitom redoslijedu?

Rješenje.

(a) Neka je $S = \{e_1, ..., e_m\}$ skup dobiven primjenom Gram-Schmidtovog postupka na linearno nezavisni skup $\{a_1, ..., a_m\}$ (Teorem 1.4.2. u skriptama). Tada je S ortonormiran skup te vrijedi jednakost potprostora $[\{a_1, ..., a_j\}] = [\{e_1, ..., e_j\}]$, za $j = 1, 2, ..., m$. (Dodatno, neobavezno: uz uvjet $\langle a_j | e_j \rangle > 0$ za $j = 1, 2, ...m$, skup S je jedinstven s navedenim svojstvima.)

(b) Najprije uočimo da ako je $\{a_1, a_2, a_3\}$ ortogonalan skup, onda se primjenom Gram-Schmidtovog postupka na taj skup u oba redoslijeda vektora - $\{a_1, a_2, a_3\}$ i $\{a_3, a_2, a_1\}$ - dobiva isti skup $\{e_1, e_2, e_3\}$ samo u obrnutom redoslijedu $\{e_3, e_2, e_1\}$, jer vektore a_1, a_2, a_3 treba samo normirati, zadanim redom.

Pretpostavimo, dakle, da je $\{a_1, a_2, a_3\}$ linearno nezavisan i neka je $\{e_1, e_2, e_3\}$ ortonormirani skup dobiven primjenom Gram-Schmidtovog postupka. Nadalje, pretpostavimo da se primjenom tog postupka na skup $\{a_3, a_2, a_1\}$ dobivaju također vektori e_1, e_2, e_3, u nekom redoslijedu. Pokazat ćemo da bi taj redoslijed morao biti $\{e_3, e_2, e_1\}$, ali da se to može dogoditi samo ako je $\{a_1, a_2, a_3\}$ ortogonalan skup.

Prvi vektor, dobiven normiranjem a_3, mora biti e_3 jer se a_3 ne nalazi u potprostoru $[\{a_1, a_2\}] = [\{e_1, e_2\}]$. Dalje, drugi vektor se nalazi u $[\{a_3, a_2\}]$ pa to ne može biti e_1 nego mora biti e_2. Za treći vektor preostaje samo e_1. Stoga se primjenom postupka na skup $\{a_3, a_2, a_1\}$ dobiva $\{e_3, e_2, e_1\}$, u navedenom redoslijedu.

Vektor e_3 je ortogonalan na e_1 i na e_2 pa je ortogonalan na potprostor $[\{a_1, a_2\}] = [\{e_1, e_2\}]$. Vektor a_3 stoga je također ortogonalan na a_1 i a_2. Skup $\{a_1, a_2, a_3\}$ neće biti ortogonalan samo u slučaju kad a_1 i a_2 nisu ortogonalni. No, vektor e_2 nalazi se u $[\{a_1, a_2\}]$ i u $[\{a_3, a_2\}]$, dakle u presjeku tih potprostora, a to je $[\{a_2\}]$. Kako je e_2 ortogonalan na e_1, također je i a_2 ortogonalan na e_1 pa time i na a_1. Time je tvrdnja (b) dokazana.

LINEARNA ALGEBRA 2

Prvi kolokvij – srijeda, 24. studenog 2021.

Zadatak 4. (10 bodova) Neka je $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ matrica iz unitarnog prostora $M_2(\mathbb{C})$ sa standardnim skalarnim produktom. Zadana su sljedeća preslikavanja:

(a) $F : M_2(\mathbb{C}) \to M_2(\mathbb{C}), \quad F(X) = \langle A|X \rangle I,$

(b) $G : M_2(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}, \quad G(X) = \langle X|A \rangle,$

(c) $H : M_2(\mathbb{C}) \to M_2(\mathbb{C}), \quad H(X) = \langle X|A \rangle I,$

gdje je sa I označena jedinična matrica u $M_2(\mathbb{C})$. Za svako od zadanih preslikavanja ispitajte je li linearni operator. U slučaju da je preslikavanje linearni operator, odredite slike matrice A i jedinične matrice I u tom preslikavanju.

Rješenje.

(a) F nije linearan operator. Naime, za $i \in \mathbb{C}$ i jediničnu matricu $I \in M_2(\mathbb{C})$ imamo

$$F(i \cdot I) = \langle A|i \cdot I \rangle I = \bar{i} \cdot \langle A|I \rangle I = -i \cdot F(I),$$

pa homogenost nije zadovoljena.

(b) Neka su $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ i $X, Y \in M_2(\mathbb{C})$. Imamo

$$G(\alpha X + \beta Y) = \langle \alpha X + \beta Y|A \rangle = \alpha \langle X|A \rangle + \beta \langle Y|A \rangle = \alpha G(X) + \beta G(Y).$$

Dakle, G je linearan operator. Odredimo još slike od A i I pri tom preslikavanju:
$G(A) = \langle A|A \rangle = ||A||^2 = |a|^2 + |b|^2 + |c|^2 + |d|^2,$
$G(I) = \langle I|A \rangle = \overline{a} + \overline{d}.$

(c) Neka su $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ i $X, Y \in M_2(\mathbb{C})$. Imamo

$$H(\alpha X + \beta Y) = \langle \alpha X + \beta Y|A \rangle I = \alpha \langle X|A \rangle I + \beta \langle Y|A \rangle I = \alpha H(X) + \beta H(Y).$$

Dakle, H je linearan operator. Odredimo još slike od A i I pri tom preslikavanju:
$H(A) = \langle A|A \rangle I = ||A||^2 I = (|a|^2+|b|^2+|c|^2+|d|^2) I = \begin{bmatrix} |a|^2 + |b|^2 + |c|^2 + |d|^2 & 0 \\ 0 & |a|^2 + |b|^2 + |c|^2 + |d|^2 \end{bmatrix},$
$H(I) = \langle I|A \rangle I = (\overline{a} + \overline{d}) I = \begin{bmatrix} \overline{a} + \overline{d} & 0 \\ 0 & \overline{a} + \overline{d} \end{bmatrix}.$

LINEARNA ALGEBRA 2

Prvi kolokvij – srijeda, 24. studenog 2021.

Zadatak 5. (14 bodova)

(a) (6 bodova) Dokažite da u unitarnom prostoru $(V, \langle\cdot|\cdot\rangle)$ jednakost

$$|\langle a \,|\, b\rangle|^2 = \langle a \,|\, a\rangle\langle b \,|\, b\rangle$$

vrijedi ako i samo ako su a i b linearno zavisni vektori.

(b) (4 boda) Neka su $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Dokažite da vrijedi nejednakost

$$(a + c + 2d)^2 \le a^2 + a^2c^2 + a^2d^2 + b^2 + b^2c^2 + b^2d^2 + 5 + 5c^2 + 5d^2.$$

(c) (4 boda) Neka je $(V, \|\cdot\|)$ normirani prostor takav da vrijedi

$$\|3a + b\|^2 + \|a - b\|^2 = 8\|a\|^2 + 2\|a + b\|^2 \quad \forall a, b \in V.$$

Je li norma $\|\cdot\|$ inducirana skalarnim produktom? Obrazložite odgovor.

Rješenje.

(a) Ukoliko je barem jedan od vektora a, b jednak 0_V, jednakost očito vrijedi. Ako su vektori a i b linearno zavisni i $a \neq 0_V$ i $b \neq 0_V$, onda postoji skalar λ takav da je $b = \lambda a$. Tada je

$$|\langle a \,|\, b\rangle|^2 = |\langle a \,|\, \lambda a\rangle|^2 = |\lambda|^2|\langle a \,|\, a\rangle|^2 = \langle a \,|\, a\rangle\langle \lambda a \,|\, \lambda a\rangle = \langle a \,|\, a\rangle\langle b \,|\, b\rangle.$$

Obratno, ako vrijedi jednakost

$$|\langle a \,|\, b\rangle|^2 = \langle a \,|\, a\rangle\langle b \,|\, b\rangle,$$

onda je

$$\Gamma(a, b) = \begin{vmatrix} \langle a \,|\, a\rangle & \langle a \,|\, b\rangle \\ \langle b \,|\, a\rangle & \langle b \,|\, b\rangle \end{vmatrix} = \langle a \,|\, a\rangle\langle b \,|\, b\rangle - |\langle a \,|\, b\rangle|^2 = 0,$$

što znači da su vektori a i b linearno zavisni vektori.

(b) Primjenom nejednakosti Cauchy-Schwarz-Bunjakowskog na vektore $(a, b, 1, 2)$ i $(1, 0, c, d)$, dobivamo

$$|\langle (a, b, 1, 2) \,|\, (1, 0, c, d)\rangle|^2 \le \langle (a, b, 1, 2) \,|\, (a, b, 1, 2)\rangle\langle (1, 0, c, d) \,|\, (1, 0, c, d)\rangle,$$

tj.

$$(a + c + 2d)^2 \le (a^2 + b^2 + 5)(1 + c^2 + d^2) = a^2 + a^2c^2 + a^2d^2 + b^2 + b^2c^2 + b^2d^2 + 5 + 5c^2 + 5d^2.$$

Zadatak se mogao riješiti i tako da nejednakost Cauchy-Schwarz-Bunjakowskog primijenimo na vektore $(a, 1, 2)$ i $(1, c, d)$. Imamo

$$|\langle (a, 1, 2) \,|\, (1, c, d)\rangle|^2 \le \langle (a, 1, 2) \,|\, (a, 1, 2)\rangle\langle (1, c, d) \,|\, (1, c, d)\rangle,$$

tj.

$$\begin{aligned}(a + c + 2d)^2 \le (a^2 + 5)(1 + c^2 + d^2) &= a^2 + a^2c^2 + a^2d^2 + 5 + 5c^2 + 5d^2 \\ &\le a^2 + a^2c^2 + a^2d^2 + b^2 + b^2c^2 + b^2d^2 + 5 + 5c^2 + 5d^2.\end{aligned}$$

(c) Dokažimo da ako vrijedi

$$\|3a + b\|^2 + \|a - b\|^2 = 8\|a\|^2 + 2\|a + b\|^2 \quad \forall a, b \in V,$$

da je onda zadovoljena relacija paralelograma. Neka su x, y proizvoljni vektori iz V. Ideja zadatka je pronaći vektore a i b takve da je $x + y = 3a + b$ i $x - y = a - b$. Uočimo da za $a = \frac{1}{2}x$ i $b = y - \frac{1}{2}x$ vrijedi $3a + b = x + y$, $a - b = x - y$, $a + b = y$, odnosno

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = \|3a + b\|^2 + \|a - b\|^2 = 8\|a\|^2 + 2\|a + b\|^2 = 8\|\frac{1}{2}x\|^2 + 2\|y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2.$$

Dakle, norma $\|\cdot\|$ zadovoljava relaciju paralelograma pa je inducirana skalarnim produktom.