LINEARNA ALGEBRA 2

Drugi kolokvij – srijeda, 2. veljače 2022.

Zadatak 1. (15 bodova)

(a) (8 bodova) Zadan je linearan operator A na $V^3(O)$ tako da najprije vektor ortogonalno projicira na ravninu razapetu vektorima $2\vec{\imath} - \vec{\jmath}$ i $\vec{\imath} + \vec{\jmath} + 3\vec{k}$, a zatim dobiveni vektor rotira oko z-osi za kut $45°$. Odredite djelovanje operatora A na opći vektor $\vec{v} \in V^3(O)$ te po jednu bazu za jezgru i sliku.

(b) (7 bodova) Zadan je linearan operator $B : \mathbb{R}^3 \to M_2(\mathbb{R})$ svojim prikazom u paru baza

$$(e') = \{(1, 0, -2), (0, 1, 1), (1, -1, -2)\} \text{ i } (f') = \left\{ \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \right\} :$$

$$B(f', e') = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 3 \\ -4 & 3 & -5 \\ -11 & 6 & -12 \\ 8 & -4 & 9 \end{bmatrix}.$$

Odredite matrični zapis operatora B u paru baza (e) i (f), pri čemu je (e) kanonska baza za $\mathbb{R}^3$, a (f) kanonska baza za $M_2(\mathbb{R})$.

Rješenje. a) Neka je P operator ortogonalne projekcije na ravninu razapetu vektorima $2\vec{\imath} - \vec{\jmath}$ i $\vec{\imath} + \vec{\jmath} + 3\vec{k}$, a R operator rotacije oko z-osi za kut $45°$. Lako se izračuna da je jedinična normala ravnine na koju operator P ortogonalno projicira jednaka $\vec{n} = \frac{1}{\sqrt{6}}\left(\vec{\imath} + 2\vec{\jmath} - \vec{k}\right)$. Neka je $\vec{v} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k} \in V^3(O)$, tada je

$$P(\vec{v}) = \vec{v} - (\vec{v}|\vec{n})\vec{n} = \left(\frac{5}{6}x - \frac{1}{3}y + \frac{1}{6}z\right)\vec{\imath} + \left(-\frac{1}{3}x + \frac{1}{3}y + \frac{1}{3}z\right)\vec{\jmath} + \left(\frac{1}{6}x + \frac{1}{3}y + \frac{5}{6}z\right)\vec{k}.$$

Matrični prikaz operatora R u ortonormiranoj bazi $\{\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\}$ glasi

$$[R] = \begin{bmatrix} \cos 45° & -\sin 45° & 0 \\ \sin 45° & \cos 45° & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

pa vrijedi

$$R(\vec{v}) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}x - \frac{\sqrt{2}}{2}y\right)\vec{\imath} + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{\sqrt{2}}{2}y\right)\vec{\jmath} + z\vec{k}.$$

Sada je

$$\begin{aligned} A(\vec{v}) = R(P(\vec{v})) &= \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{5}{6}x - \frac{1}{3}y + \frac{1}{6}z\right) - \frac{\sqrt{2}}{2}\left(-\frac{1}{3}x + \frac{1}{3}y + \frac{1}{3}z\right)\right)\vec{\imath} \\ &+ \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{5}{6}x - \frac{1}{3}y + \frac{1}{6}z\right) + \frac{\sqrt{2}}{2}\left(-\frac{1}{3}x + \frac{1}{3}y + \frac{1}{3}z\right)\right)\vec{\jmath} + \left(\frac{1}{6}x + \frac{1}{3}y + \frac{5}{6}z\right)\vec{k} \\ &= \left(\frac{7\sqrt{2}}{12}x - \frac{\sqrt{2}}{3}y - \frac{\sqrt{2}}{12}z\right)\vec{\imath} + \left(\frac{\sqrt{2}}{4}x + \frac{\sqrt{2}}{4}z\right)\vec{\jmath} + \left(\frac{1}{6}x + \frac{1}{3}y + \frac{5}{6}z\right)\vec{k}. \end{aligned}$$

Jedna baza za sliku operatora A je $\{\frac{7\sqrt{2}}{12}\vec{\imath} + \frac{\sqrt{2}}{4}\vec{\jmath} + \frac{1}{6}\vec{k},\ -\frac{\sqrt{2}}{3}\vec{\imath} + \frac{1}{3}\vec{k}\}$, a baza za jezgru $\{\vec{\imath} + 2\vec{\jmath} - \vec{k}\}$. Baza za jezgru operatora se mogla odrediti i geometrijskim zaključivanjem, bez računanja.

b) Vrijedi

$$I(f,f') = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad I(e',e) = I(e,e')^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & -2 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix},$$

pa je tada

$$B(f,e) = I(f,f')B(f',e')I(e',e) = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -3 \end{bmatrix}.$$

LINEARNA ALGEBRA 2

Drugi kolokvij – srijeda, 2. veljače 2022.

Zadatak 2. (10 bodova) Ispitajte koja su od sljedećih preslikavanja linearni funkcionali te ona koja jesu prikažite kao linearnu kombinaciju elemenata baze dualne kanonskoj bazi pripadnog prostora:

(a) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, f(x, y) = (2x, x - y)$,

(b) $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, g(x, y, z) = x + 3y - 2z$,

(b) $h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, h(v) = \langle Av|a\rangle$,
gdje je $a = (-1, 3)$, $\langle\cdot|\cdot\rangle$ standardni skalarni produkt i $A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ zadan s $A(x, y, z) = (x-2y, y-z)$. Ako h jest linearan funkcional, može li se prikazati u obliku $h(v) = \langle v|b\rangle$ za neki vektor b?

Rješenje.

(a) Nije linearan funkcional jer kodomena nije polje.

(b) Neka su $(x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2) \in \mathbb{R}^3$ i neka su $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Vrijedi

$$g\left(\alpha(x_1, y_1, z_1) + \beta(x_2, y_2, z_2)\right) = \alpha g(x_1, y_1, z_1) + \beta g(x_2, y_2, z_2),$$

pa je g linearan funkcional.

Dualna baza kanonskoj bazi $\{e_1, e_2, e_3\}$ od $\mathbb{R}^3$ je zadana s $f_i(e_j) = \delta_{ij}$ te je

$$f_1(x, y, z) = x, f_2(x, y, z) = y, f_3(x, y, z) = z.$$

Tražimo A, B, C takve da je

$$g = Af_1 + Bf_2 + Cf_3.$$

Imamo

$$g(x, y, z) = Af_1(x, y, z) + Bf_2(x, y, z) + Cf_3(x, y, z),$$
$$x + 3y - 2z = Ax + By + Cz,$$

pa je $A = 1, B = 3, C = -2$ i $g = f_1 + 3f_2 - 2f_3$.

(c) Neka su $v, w \in \mathbb{R}^3$ i neka su $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Vrijedi

$$h\left(\alpha v + \beta w\right) = \langle A(\alpha v + \beta w)|b\rangle = \langle \alpha Av + \beta Aw|b\rangle = \alpha h(v) + \beta h(w),$$

pa je h linearan funkcional. (Mogli smo primijetiti i da je h kompozicija linearnih operatora A i skalarnog množenja zadanim vektorom, pa je zbog toga h linearan operator.)

Dalje, $h(x, y, z) = \langle A(x, y, z)|a\rangle = \langle (x - 2y, y - z)|(-1, 3)\rangle = -x + 5y - 3z = \langle (x, y, z)|(-1, 5, -3)\rangle$, pa je $h(v) = \langle v|b\rangle$, gdje je $b = (-1, 5, -3)$.

Dualna baza kanonskoj bazi $\{e_1, e_2, e_3\}$ od $\mathbb{R}^3$ je zadana s $f_i(e_j) = \delta_{ij}$ te kao u (b) dijelu zadatka zaključujemo da je $h = -f_1 + 5f_2 - 3f_3$.

LINEARNA ALGEBRA 2

Drugi kolokvij – srijeda, 2. veljače 2022.

Zadatak 3. (12 bodova) Zadane su sljedeće baze vektorskog prostora $\mathcal{P}_2$ polinoma stupnja najviše 2: $(e) = (1, t, t^2), (e') = (1+2t+3t^2, t-t^2, 2+7t^2)$ i (e''), koja je dobivena primjenom Gram-Schmidtovog postupka na bazu (e'), u nekom skalarnom množenju uvedenom na prostoru $\mathcal{P}_2$.

Nadalje, linearni operator $A \in L(\mathcal{P}_2)$ zadan je djelovanjem na bazu (e') s

$$\begin{aligned} A(1+2t+3t^2) &= 4t+4t^2, \\ A(t-t^2) &= 4+4t, \\ A(2+7t^2) &= -10-5t+5t^2. \end{aligned}$$

(a) (7 bodova) Odredite spektar $\sigma(A)$. Može li se operator A dijagonalizirati?

(b) (5 bodova) Objasnite, bez računanja za svaku pojedinu od zadanih baza, kako $\sigma(A)$ ovisi o izboru baze pomoću koje se spektar određuje. Postoji li veza između svojstvenih vektora dobivenih pomoću pojedinih baza?

Rješenje.

(a) Odredimo prvo matrični prikaz operatora A u kanonskoj bazi (mogli smo i u ovoj zadanoj, rezultat bi bio isti). Za to ćemo prvo odrediti kako operator A djeluje na proizvoljnom polinomu.

Imamo

$$a + bt + ct^2 = \alpha(1+2t+3t^2) + \beta(t-t^2) + \gamma(2+7t^2).$$

Rješavanjem tog sustava dobijemo da je

$$\alpha = -\frac{7}{3}a + \frac{2}{3}b + \frac{2}{3}c, \ \ \beta = \frac{14}{3}a - \frac{1}{3}b - \frac{4}{3}c, \ \ \gamma = \frac{5}{3}a - \frac{1}{3}b - \frac{1}{3}c.$$

Sada je

$$\begin{aligned} A(a+bt+ct^2) &= \alpha A(1+2t+3t^2) + \beta A(t-t^2) + \gamma A(2+7t^2), \\ &= \alpha(4t+4t^2) + \beta(4+4t) + \gamma(-10-5t+5t^2), \end{aligned}$$

pa je

$$\begin{aligned} A(1) &= -\frac{7}{3}(4t+4t^2) + \frac{14}{3}(4+4t) + \frac{5}{3}(-10-5t+5t^2) = 2+t-t^2, \\ A(t) &= \frac{2}{3}(4t+4t^2) - \frac{1}{3}(4+4t) - \frac{1}{3}(-10-5t+5t^2) = 2+3t+t^2, \\ A(t^2) &= \frac{2}{3}(4t+4t^2) - \frac{4}{3}(4+4t) - \frac{1}{3}(-10-5t+5t^2) = -2-t+t^2. \end{aligned}$$

Sada je matrica u bazi $(e) = (1, t, t^2)$ dana s $A(e) = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 1 & 3 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

Računanjem determinante $det(A(e) - \lambda I) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 2 & -2 \\ 1 & 3-\lambda & -1 \\ -1 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda(\lambda-2)(\lambda-4)$ dobijemo da je $\sigma(A) = \{0, 2, 4\}$. Iz toga slijedi i da se operator A može dijagonalizirati jer su algebarske i geometrijske kratnosti svih svojstvenih vrijednosti jednake 1 i zbroj algebarskih kratnosti je jednak dimenziji prostora.

(b) Spektar $\sigma(A)$ ne ovisi o izboru baze.

Traženjem svojstvenih vektora dobijemo prikaz tih vektora u bazi koju smo odabrali. Dakle, iz svojstvenog vektora dobivenog pomoću matrice u bazi (a) možemo doći do svojstvenog vektora dobivenog pomoću matrice u bazi (b) korištenjem matrice prijelaza iz baze (a) u bazu (b).

LINEARNA ALGEBRA 2

Drugi kolokvij – srijeda, 2. veljače 2022.

Zadatak 4. (13 bodova)

(a) (6 bodova) Postoje li $a, b \in \mathbb{R}$ takvi da za neke dvije baze (e) i (e') za $\mathbb{R}^3$ i neki linearni operator $A : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ vrijedi

$$[A]_{(e)} = \begin{bmatrix} 2 & a-b & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & b \end{bmatrix}, \ [A]_{(e')} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}?$$

Obrazložite odgovor.

(b) (7 bodova) Neka je V četverodimenzionalni kompleksni vektorski prostor, $B : V \longrightarrow V$ linearni operator takav da je karakteristični polinom $k_B(\lambda)$ polinom s realnim koeficijentima. Neka su $x, y \in V \setminus \{0\}$ takvi da je $Bx = (1+2i)x, By = iy$. Odredite determinantu i trag operatora B. Svoj odgovor detaljno obrazložite.

Rješenje.

(a) Pretpostavimo da takvi $a, b \in \mathbb{R}$ postoje. Tada su matrice $[A]_{(e)}$ i $[A]_{(e')}$ slične matrice pa je

$$\mathrm{tr}[A]_{(e)} = \mathrm{tr}[A]_{(e')},$$

odnosno $2+a+b=6$, odakle slijedi $a+b=4$. Nadalje, slične matrice imaju istu determinantu pa je $\det[A]_{(e)} = \det[A]_{(e')}$, odnosno $2ab = 8$, odakle slijedi $ab = 4$. Sada imamo $b = 4-a$ i $a(4-a) = 4$, odnosno $a^2 - 4a + 4 = 0$. Jedino rješenje te kvadratne jednadžbe je $a = 2$, odakle slijedi $b = 4 - a = 2$. Za $a = b = 2$ je $[A]_{(e)} = 2I$.

Iako matrice $2I$ i $[A]_{(e')}$ imaju isti trag i determinantu, one nisu slične jer je matrica $2I$ slična samo samoj sebi. Zaista, ako je $T \in M_3(\mathbb{R})$ regularna matrica, onda je $T^{-1}(2I)T = 2I$.

Dakle, matrice $[A]_{(e)}$ i $[A]_{(e')}$ nisu slične ni za koje $a, b \in \mathbb{R}$.

(b) Iz uvjeta zadatka slijedi da su $x_1 = 1+2i$ i $x_2 = i$ svojstvene vrijednosti linearnog operatora B, a onda i nultočke karakterističnog polinoma $k_B(\lambda) = \det(B - \lambda I)$. Kako je $k_B(\lambda)$ polinom s realnim koeficijentima, to su i $x_3 = \overline{x_1} = 1-2i$ i $x_4 = \overline{x_2} = -i$ također nultočke karakterističnog polinoma $k_B(\lambda)$, a onda i svojstvene vrijednosti lienarnog operatora B. Neka su z i v svojstveni vektori za svojstvene vrijednosti $1-2i$, odnosno $-i$. Kako su svojstvene vrijednosti $1+2i, i, 1-2i, -i$ međusobno različite, skup $(e) = \{x, y, z, v\}$ je linearno nezavisan, a onda i baza prostora V (jer je $\dim V = 4$.)

Vidimo da je $[B]_{(e)} = \mathrm{diag}(1+2i, i, 1-2i, -i)$ pa je $\mathrm{tr}B = \mathrm{tr}[B]_{(e)} = 2$ i $\det B = \det[B]_{(e)} = 5$.

LINEARNA ALGEBRA 2

Drugi kolokvij – srijeda, 2. veljače 2022.

Zadatak 5. (10 bodova)

(a) (6 bodova) Neka je V vektorski prostor dimenzije 3 i $A \in L(V)$ linearni operator ranga 1. Dokažite da se A može dijagonalizirati ako i samo ako potprostor ImA nije sadržan u potprostoru Ker$A$.

(b) (4 boda) Neka su $A, B \in L(V^3(O))$, pri čemu je A ortogonalna projekcija na neki potprostor dimenzije 2, a B ortogonalna projekcija na neki potprostor dimenzije 1. Koje vrijednosti može poprimiti rang operatora $C = B \circ A$? Dokažite da se C može dijagonalizirati.

Rješenje.

(a) Neka je A linearni operator ranga 1, čija slika nije sadržana u jezgri, pri čemu je očito defekt $d(A) = 2$. Slika Im$A = [v]$ za neki vektor $v \neq 0$. Mora biti $A(v) = kv$ za neki skalar $k \neq 0$. Bazu prostora V formiramo tako da neku bazu jezgre proširimo vektorom v (kao npr. u dokazu Teorema o rangu i defektu). U toj bazi operator A prikazan je dijagonalnom matricom $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k \end{bmatrix}$.

(Drukčijim redoslijedom vektora u bazi skalar k bio bi u prvom ili drugom stupcu).

Obrnuto, uzmimo da A u nekoj bazi ima dijagonalnu matricu. Kako je $r(A) = 1$, dva stupca te matrice moraju biti nul-stupci pa ti stupci prikazuju slike dvaju vektora iz jezgre. Treći stupac, različit od nul-stupca, prikazuje sliku vektora koji nije u jezgri. Ako je to npr. srednji stupac (a može biti bilo koji od tri stupca), iz njega vidimo da je slika drugog vektora baze, npr. $A(v_2)$ oblika λv_2 za neki skalar $\lambda \neq 0$. Tada je očito Im$A = [v_2]$ i taj potprostor nije sadržan u Ker$A$.

(b) Rang kompozicije $B \circ A$ ovisi o međusobnom položaju položaju 1-dim. potprostora ImB (pravca kroz O) i 2-dim. potprostora ImA (ravnine kroz O).

Ako je Im$B = (\text{Im}A)^{\perp}$, to jest ako je pravac okomit na ravninu, $B \circ A$ je nuloperator. U svakom drukčijem slučaju, bilo da je pravac ImB sadržan u ravnini ImA ili ako nije sadržan, ali nije ni ortogonalan na ravninu, $\text{Im}(B \circ A) = \text{Im}B$ i $r(B \circ A) = 1$.

Nuloperator je trivijalno dijagonaliziran. U slučaju $r(B \circ A) = 1$, operator $B \circ A$ može se dijagonalizirati prema zaključku iz (a), budući da slika operatora nije sadržana u jezgri. Naime, jezgra je tada 2-dim. potprostor koji ne sadrži ImB.