LINEARNA ALGEBRA 2

Popravni kolokvij – srijeda, 16. veljače 2022.

Zadatak 1. (20 bodova) Neka je $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ unitarni prostor polinoma stupnja najviše 2, sa skalarnim produktom $(p|q) = \int_{-1}^{1} p(t)q(t)dt$, i $M = [\{3 - 2t - t^2\}] \leq \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$.

(a) (14 bodova) Odredite ortogonalni komplement potprostora M. Navedite jednu ortogonalnu bazu za $M^\perp$.

(b) (6 bodova) Neka je $A : \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^2$ linearan operator zadan s $A(p) = (p'(-1), p(\alpha))$, pri čemu je $\alpha \in \mathbb{R}$. Postoji li $\alpha \in \mathbb{R}$ takav da je $\text{Ker}A = M$? Ako postoji, odredite sve takve. Postoji li $\alpha \in \mathbb{R}$ takav da je $d(A) = 0$? Ako postoji, odredite sve takve (na posljednje pitanje se može odgovoriti i bez određivanja jezgre u ovisnosti o $\alpha \in \mathbb{R}$).

Rješenje. a) Označimo $q(t) = 3 - 2t - t^2$. Neka je $p(t) = a + bt + ct^2$ opći polinom u $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$, vrijedi

$$(p|q) = \int_{-1}^{1} (a + bt + ct^2)(3 - 2t - t^2)dt = ... = \frac{16}{3}a - \frac{4}{3}b + \frac{8}{5}c.$$

Iz gornjeg zaključujemo da su p i q ortogonalni ako i samo ako je $c = -\frac{10}{3}a + \frac{5}{6}b$, pa je

$$M^\perp = [\{1 - \frac{10}{3}t^2, t + \frac{5}{6}t^2\}].$$

Nađimo polinom $a + bt + ct^2$ iz $M^\perp$ ortogonalan s $1 - \frac{10}{3}t^2$. Iz uvjeta ortogonalnosti imamo

$$\int_{-1}^{1} (a + bt + ct^2)(1 - \frac{10}{3}t^2)dt = ... = -\frac{2}{9}a - \frac{2}{3}c = 0,$$

odnosno $a = -3c$. Da bi se polinom nalazio u $M^\perp$ treba još vrijediti $c = -\frac{10}{3}a + \frac{5}{6}b$, a jedan takav je $-15 - 54t + 5t^2$. Dakle, jedna ortogonalna baza za $M^\perp$ je $\{1 - \frac{10}{3}t^2, -15 - 54t + 5t^2\}$.

b) Neka je $p(t) = a + bt + ct^2$ opći polinom u $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$, tada je $A(p) = (b - 2c, a + b\alpha + c\alpha^2)$. Vrijedi da je $A(p) = 0$ ako i samo ako je $b - 2c = a + b\alpha + c\alpha^2 = 0$, odnosno $b = 2c$ i $a = -b\alpha - c\alpha^2 = (-2\alpha - \alpha^2)c$, pa je $\{-2\alpha - \alpha^2 + 2t + t^2\}$ jedna baza za $\text{Ker}A$. Vidimo da je $\text{Ker}A = M$ ako i samo ako je $2\alpha + \alpha^2 = 3$, a rješenja ove jednadžbe su $\alpha = 1$ i $\alpha = -3$.
Kada bi postojao $\alpha \in \mathbb{R}$ takav da je $d(A) = 0$, tada bi po teoremu o rangu i defektu rang operatora A bio 3. Ali kako je kodomena operatora prostor dimenzije 2, to nije moguće, dakle takav α ne postoji. Također, očito ne postoji $\alpha \in \mathbb{R}$ takav da je $-2\alpha - \alpha^2 + 2t + t^2$ nulpolinom.

LINEARNA ALGEBRA 2

Popravni kolokvij – srijeda, 16. veljače 2022.

Zadatak 2. (20 bodova)

a) (6 bodova) Neka je L potprostor konačnodimenzionalnog unitarnog prostora $(V, \langle \cdot | \cdot \rangle)$. Definirajte ortogonalnu projekciju proizvoljnog (općeg) vektora $x \in V$ na potprostor L.

b) (14 bodova) Zadana je matrica $C = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 6 & 5 \end{bmatrix}$. Odredite ortogonalnu projekciju matrice C na potprostor L dijagonalnih matrica unitarnog prostora $M_2(\mathbb{R})$ sa standardnim skalarnim množenjem $\langle A | B \rangle = \operatorname{tr}(AB^T)$. Odredite udaljenost matrice C od potprostora L.

Rješenje.

a) Vidi str. 22 u skriptima, iza Propozicije 1.4.4. i Korolara 1.4.5.

b) Potprostor L sastoji se od matrica oblika $\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} = \operatorname{diag}(a, b)$ pa je očito $\dim L = 2$ i jednu bazu čine matrice $D_1 = \operatorname{diag}(1, 0), D_2 = \operatorname{diag}(0, 1)$. Baza D_1, D_2 je ortonormirana baza potprostora L. Stoga je projekcija

$$p_L(C) = \langle C \mid D_1 \rangle D_1 + \langle C \mid D_2 \rangle D_2 = 5D_1 + 5D_2 = \operatorname{diag}(5, 5)$$

$$C - p_L(C) = \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 6 & 0 \end{bmatrix}$$

pa je udaljenost $d(C, L) = \left\| \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 6 & 0 \end{bmatrix} \right\| = \sqrt{52} = 2\sqrt{13}$.

LINEARNA ALGEBRA 2

Popravni kolokvij – srijeda, 16. veljače 2022.

Zadatak 3. (20 bodova) Zadan je operator $A \in L(\mathcal{P}_2)$ sa

$$A(a + bt + ct^2) = (a + \lambda b + 2c) + (\lambda a + b + c)t + (a + b)t^2.$$

(a) (10 bodova) U ovisnosti o parametru λ izračunajte rang i defekt operatora A te po jednu bazu (ako postoje) za jezgru i sliku.

(b) (10 bodova) Za sve vrijednosti λ za koje je A izomorfizam odredite kako inverz A^{-1} djeluje na proizvoljan vektor $a + bt + ct^2 \in \mathcal{P}_2$. Za sve vrijednosti za koje A nije izomorfizam odredite nalazi li se polinom $p(t) = 1 - t$ u slici operatora A te nalazi li se polinom $q(t) = 1 + t - t^2$ u jezgri operatora A.

Rješenje.

(a) Matrica operatora A u bazi $(e) = (1, t, t^2)$ jednaka je $A(e) = \begin{bmatrix} 1 & \lambda & 2 \\ \lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$. Rješavanjem homogenog sustava kako bismo našli bazu za jezgru dobivamo $\begin{bmatrix} 1 & \lambda & 2 \\ \lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 0 & \lambda - 1 & 2 \\ \lambda - 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

- Ako je $\lambda \neq 1$ gornja matrica je očito punog ranga pa je $d(A) = 0$, $r(A) = 3$, a jedna baza za sliku je dana s $\{1, t, t^2\}$.
- Ako je $\lambda = 1$ nastavljamo $\sim \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$. Dobijemo da je $c = 0$, $a + b = 0$ pa je jedna baza za jezgru dana s $\{1 - t\}$. Dakle, $d(A) = 1, r(A) = 2$ i još preostaje naći bazu za sliku. Kada je $\lambda = 1$ imamo

  $A(a + bt + ct^2) = (a + b + 2c) + (a + b + c)t + (a + b)t^2 = a(1 + t + t^2) + b(1 + t + t^2) + c(2 + t)$,

  pa je jedna baza za sliku dana s $\{1 + t + t^2, 2 + t\}$.

(b) Operator A je izomorfizam za sve $\lambda \neq 1$. Imamo:

$$A^{-1}(A(a + bt + ct^2)) = a + bt + ct^2,$$
$$A^{-1}((a + \lambda b + 2c) + (\lambda a + b + c)t + (a + b)t^2) = a + bt + ct^2,$$

pa rješavanjem sustava

$$\begin{aligned} a + \lambda b + 2c &= d \\ \lambda a + b + c &= e \\ a + b &= f \end{aligned}$$

dobijemo da je $A^{-1}(d + et + ft^2) = a + bt + ct^2$, gdje je

$$\begin{aligned} a &= f - \frac{1}{3(1-\lambda)}(-d + 2e + (1 - 2\lambda)f) \\ b &= \frac{1}{3(1-\lambda)}(-d + 2e + (1 - 2\lambda)f) \\ c &= \frac{1}{3}(d + e - (1 + \lambda)f). \end{aligned}$$

Operator A nije izomorfizam samo za vrijednost $\lambda = 1$. Za tu vrijednost dobijemo da je $A(q(t)) = A(1 + t - t^2) \neq 0$, pa polinom $q(t)$ nije u jezgri. Također vidimo da se polinom $p(t) = 1 - t$ ne može prikazati kao linearna kombinacija elemenata baze $\{1 + t + t^2, t + 2\}$ koju smo izračunali u (a) dijelu zadatka, pa zaključujemo da $p(t)$ nije u slici.

LINEARNA ALGEBRA 2

Popravni kolokvij – srijeda, 16. veljače 2022.

Zadatak 4. (20 bodova)

a) (14 bodova) Neka je $A \in L(\mathbb{R}^3)$. Zadan je matrični prikaz operatora A u bazi $(f) = \{(2,1,1),(2,1,0),(1,0,0$ vektorskog prostora $\mathbb{R}^3$ kao

$$[A]_{(f)} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Odredite matrični prikaz operatora A u paru kanonske baze (e) i baze (f) te matrični prikaz operatora A u paru baze (f) i baze (e), tj. odredite matrice $[A]_{(f,e)}$ i $[A]_{(e,f)}$. Je li operator A izomorfizam?

b) (6 bodova) Postoje li $x \in \mathbb{R}$ i baza (g) vektorskog prostora $\mathbb{R}^3$ takvi da je

$$[A]_{(g)} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 8 & 2 & 0 \\ -4 & 1 & x \end{bmatrix}?$$

Obrazložite odgovor.

Rješenje.

a) Vrijedi

$$[A]_{(f,e)} = [A]_{(f,f)} \cdot [I]_{(f,e)} = [A]_{(f)} \cdot [I]_{(e,f)}^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -7 & 3 \\ -1 & 3 & -2 \\ 2 & -5 & 3 \end{bmatrix}.$$

Nadalje,

$$[A]_{(e,f)} = [I]_{(e,f)} \cdot [A]_{(f,f)} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 6 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Kako je $r(A) = r([A]_{(f)}) = 3$ (uvjerite se u to računski), iz teorema o rangu i defektu slijedi da je A izomorfizam.

b) Pretpostavimo da takvi $x \in \mathbb{R}$ i baza (g) postoje. Tada su $[A]_{(f)}$ i $[A]_{(g)}$ slične matrice pa imaju jednaki trag. Iz toga slijedi da je $5 = 5 + x$, odnosno $x = 0$. Međutim, ako je $x = 0$, onda je $\det([A]_{(g)}) = 0$, a to znači da A nije izomorfizam. Došli smo do kontradikcije. Dakle, ne postoje $x \in \mathbb{R}$ i baza (g) koji zadovoljavaju uvjete zadatka.

LINEARNA ALGEBRA 2

Popravni kolokvij – srijeda, 16. veljače 2022.

Zadatak 5. (20 bodova)

(a) (10 bodova) Napišite potpuni iskaz teorema o rangu i defektu. Dokažite taj teorem u posebnom slučaju za linearni operator ranga 2 na vektorskom prostoru dimenzije 4. (To znači da se zaključak ne izvodi primjenom teorema kao poznatog, nego da se tvrdnja dokaže u zadanom posebnom slučaju).

b) (4 boda) Neka je V vektorski prostor i neka su $(e) = \{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$ i $(f) = \{f_1, f_2, \cdots, f_n\}$ dvije baze vektorskog prostora V. Precizno definirajte matricu prijelaza iz baze (e) u bazu (f).

c) (6 bodova) Neka je (e) kanonska baza za $\mathbb{R}_2$, $(g) = \{(1,1),(1,2)\}$. Postoji li baza (f) za $\mathbb{R}^2$ takva da je

$$[I]_{(e,f)} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 8 & 2 \end{bmatrix},\ [I]_{(f,g)} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}?$$

Ako postoji, navedite jednu takvu bazu. Ako ne postoji, obrazložite zašto ne postoji.

Rješenje.

(a) Neka je $A : V \to W$ linearni operator ranga 2, pri čemu je $\dim V = 4$. Neka je $\{A(a), A(b)\}$ jedna baza za sliku operatora A. Uočimo da je skup $\{a, b\}$ linearno nezavisan jer bi u protivnom bilo $r(A) < 2$. Nadopunimo skup $\{a, b\}$ do baze $\{a, b, c, d\}$ vektorskog prostora V. Tada je $A(c), A(d) \in \mathrm{Im}A$ pa postoje $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{F}$ takvi da je

$$A(c) = \alpha A(a) + \beta A(b)$$
$$A(d) = \gamma A(a) + \delta A(b).$$

Iz gornjih jednakosti slijedi da su vektori $e = c - \alpha a - \beta b$ i $f = d - \gamma a - \delta b$ elementi $\mathrm{Ker}A$. Dokažimo da je skup $\{e, f\}$ linearno nezavisan. Ukoliko bi neki od ta dva vektora bio jednak nulvektoru, onda bi vrijedilo $c \in [\{a, b\}]$ ili $d \in [\{a, b\}]$, što je nemoguće jer je $\{a, b, c, d\}$ baza vektorskog prostora V. Dakle, vrijedi $c - \alpha a - \beta b \neq 0$ i $d - \gamma a - \delta b \neq 0$. Ako bi skup $\{c - \alpha a - \beta b, d - \gamma a - \delta b\}$ bio linearno zavisan, onda bi vrijedilo

$$d - \gamma a - \delta b = \lambda(c - \alpha a - \beta b),$$

za neki $\lambda \in \mathbb{F}$. No, onda je $d \in [\{a, b, c\}]$, što je nemoguće jer je $\{a, b, c, d\}$ baza vektorskog prostora V. Nadalje, uočimo da je $[\{a, b, c, d\}] = [\{a, b, e, f\}]$ pa je $\{a, b, e, f\}$ baza za V. Ako je $v = xa + yb + ze + wf \in \mathrm{Ker}A$, onda je

$$0 = A(xa + yb + ze + wf) = xA(a) + yA(b).$$

Kako je skup $\{A(a), A(b)\}$ linearno nezavisan, to je $x = y = 0$, odnosno $v \in [\{e, f\}]$. Dokazali smo da je $[\{e, f\}] = \mathrm{Ker}A$, a onda je $d(A) = 2$, tj. $d(A) + r(A) = \dim V$.

(b) Vidi Definiciju 2.7.2 u skriptima.

(c) Ako bi takva baza (f) postojala, onda bi vrijedilo

$$[I]_{(e,g)} = [I]_{(e,f)} \cdot [I]_{(f,g)} = \begin{bmatrix} 6 & 6 \\ 20 & 18 \end{bmatrix}.$$

Međutim, kako je $(g) = \{(1,1),(1,2)\}$, to je

$$[I]_{(e,g)} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Dakle, tražena baza (f) ne postoji.

LINEARNA ALGEBRA 2

Popravni kolokvij – srijeda, 16. veljače 2022.

Zadatak 6. (20 bodova)

(a) (5 bodova) Što po definiciji znači da se matrica $A \in M_n(\mathbb{R})$ može dijagonalizirati? Dokažite da se svaka realna simetrična matrica reda 2 može dijagonalizirati.

(b) (5 bodova) Može li se svaka realna matrica reda 2 dijagonalizirati? Dokažite ili opovrgnite protuprimjerom.

(c) (10 bodova) Može li se operator $A \in L(\mathbb{R}^2)$ zadan sa

$$A(x, y) = (4x + 2y, 2x + y)$$

dijagonalizirati? Ako može, odredite djelovanje operatora A^{2022} na proizvoljni vektor $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

Rješenje.

(a) Matrica $A \in M_n(\mathbb{R})$ se može dijagonalizirati ako je slična nekoj dijagonalnoj matrici iz $M_n(\mathbb{R})$.

Neka je $A = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$ simetrična matrica. Njen karakteristični polinom je jednak

$$k_A(\lambda) = \lambda^2 - (a + c)\lambda + ac - b^2.$$

Rješenja pripadne kvadratne jednadžbe dana su s $\dfrac{a + c \pm \sqrt{(a - c)^2 + 4b^2}}{2}$. Vidimo da je izraz pod korijenom zbroj dva kvadrata, pa je uvijek nenegativan. Vidimo da uvijek imamo dva različita realna rješenja, osim u slučaju kad je $a = c$ i $b = 0$, ali u tom slučaju je matrica već dijagonalna.

(b) Ne može, uzmimo npr. matricu $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$ kojoj je karakteristični polinom jednak $k_A(\lambda) = \lambda^2$, a jedini svojstveni potprostor je razapet vektorom $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$.

(c) Matrica operatora A u kanonskoj bazi $(e) = ((1, 0), (0, 1))$ dana je s $A(e) = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$. Iz (a) dijela zadatka vidimo da se operator A može dijagonalizirati. Njegov karakteristični polinom jednak je $\lambda(\lambda - 5)$, pa je spektar jednak $\sigma(A) = \{0, 5\}$. Rješavanjem sustava $Ax = 0$ i $(A - 5I)x = 0$ dobijemo baze za svojstvene potprostore, tj. dobijemo da je $V_0(A) = \left[\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}\right\}\right]$ i $V_5(A) = \left[\left\{\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}\right]$. Baza $\{(1, -2), (2, 1)\}$ za $\mathbb{R}^2$ je ona u kojoj se operator A dijagonalizira i na dijagonali se nalaze elementi spektra. Dakle,

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = P \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} P^{-1},$$

gdje je $P = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$ te računom dobijemo da je $P^{-1} = \dfrac{1}{5} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$. Sada je

$$A^{2022}(x, y) = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}^{2022} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = P \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}^{2022} P^{-1} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 5^{2021}(4x + 2y, 2x + y).$$