# § 6. Limesi i neprekidnost

Elementarne funkcije su „lijepe”: njihovi grafovi mogu se nacrtati u jednom potezu, ili ako nisu definirane na cijeloj domeni, onda na svakom intervalu na kojem su definirane imaju to svojstvo. Takvo svojstvo nemaju sve funkcije - doslovno svako pridruživanje koje svakoj točki domene $\mathbb{R}$ pridaje točno jednu vrijednost kodomene $\mathbb{R}$ je jedna funkcija. Tako postoje i neki primjeri poput funkcije

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q}, \\ 0, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

kojoj se graf ni na kojem intervalu ne može nacrtati u jednom potezu (kasnije ćemo reći: ni na kojem intervalu nije neprekidna). Također, postoje i primjeri funkcija kojima je graf gust u $\mathbb{R}^2$. Ipak, na vježbama se nećemo baviti takvim primjerima - samo upamtite da nisu sve funkcije „lijepe”.
Za funkcije koje nisu lijepe, ali i neke druge funkcije, potrebna nam je sljedeća definicija.

**Definicija 6.1**

Funkcija $f : I \setminus \{c\} \to \mathbb{R}$ ima limes $L$ u točki $c$ ako vrijedi

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in I \setminus \{c\})((|x - c| < \delta) \implies (|f(x) - L| < \varepsilon)).$$

Pišemo $\lim\limits_{x \to c} f(x) := L$.

---

**Napomena.**

- Stroga definicija napisana je radi potpunosti, ali nemojte ju jako gledati. Intuitivno: što je varijabla $x$ „bliže” točki $c$, vrijednost funkcije $f(x)$ je sve „bliže” realnom broju $L$. Ta vrijednost $L$ je neka vrijednost u kojoj je logično da $f$ „nastavi svoje djelovanje”. Također, limes $L$ i njegovo postojanje ovisi o funkciji $f$, ali i točki $c$ u kojoj promatramo limes.

- Ako limes postoji, jedinstven je. Također, limes je realan broj - ne može biti $\pm\infty$. Ako limes postoji, reći ćemo da funkcija konvergira, a inače da divergira.

- Funkcija ne mora biti definirana u $c$ da bi imala limes u toj točki. Također, ako i jest definirana u toj točki, limes i njena vrijednost mogu se razlikovati (npr. u slučaju funkcije koja je identički jednaka 2 osim u nuli gdje je jednaka recimo 3). Ipak, u slučaju elementarnih funkcija to nije slučaj: ako je funkcija elementarna i definirana u $c$, njezin limes iznosi $f(c)$.

- Razlog mogućeg nepostojanja limesa može biti:
  1) Limes u nekoj točki „eksplodira” u beskonačno, $f(x) \to \infty$ (ili $-\infty$), npr. za $f(x) = \frac{1}{x^2}$ i $c = 0$. Obratite pažnju na način izražavanja - reći ćemo da $f$ teži u beskonačnost, ali beskonačnost nije njezin limes.
  2) Kada je varijabla „jako blizu” točke $c$, funkcijske vrijednosti $f(x)$ se približavaju dvjema različitim vrijednostima, npr. $f(x) = \frac{|x|}{x}$, $c = 0$. Primijetite, kada se nalazimo bilo gdje lijevo od 0, funkcija je uvijek jednaka $-1$, a bilo gdje desno od 0, funkcija je jednaka 1. Rekli smo da je limes jedinstven realan broj (ako postoji), pa u ovom slučaju ne postoji.
  3) Vrijednosti u blizini $c$ jednostavno podivljaju. Npr $f(x) = \sin(1/x)$ - što se više približavamo nuli, funkcija sve brže titra između vrijednosti $-1$ i 1.

- Pogledajmo ponovno primjer $f(x) = \frac{|x|}{x}$. Rekli smo da ta funkcija nema limes u nuli, no ima lijepo ponašanje s lijeva i zdesna. Kad bismo promatrali samo vrijednosti koje se približavaju slijeva (ili samo zdesna), na taj čudan način mogli bismo reći da funkcija ima limes. Za to postoje i definiraju se jednostrani limesi:

  $$\lim_{x \to c^+} f(x) \quad \text{i} \quad \lim_{x \to c^-} f(x)$$

  (jednostrani limes zdesna i slijeva, redom). Oni promatraju upravo ono željeno: kako se s iksevima približavamo točki $c$ zdesna (ili slijeva), ako se $f$ približava nekoj vrijednosti $L$, tada je to njezin jednostrani limes zdesna (slijeva). Koliko iznose ti limesi u našem primjeru?

  Općenito funkcija može imati jednostrane limese, a da nema „normalan" limes. Ali, postoji i sljedeća tvrdnja: funkcija ima „normalan" limes ako i samo ako ima oba jednostrana limesa koji se poklapaju.

- Osim jednostranih limesa, spomenimo da postoje još dva tipa limesa koji se ne uklapaju u definiciju s početka:

  $$\lim_{x \to +\infty} f(x) \text{ i } \lim_{x \to -\infty} f(x)$$

  su, ako postoje, vrijednosti kojima se $f(x)$ približavaju kako $x$ ide u $+\infty$ ili $-\infty$. Kao i ostali limesi, ako postoje, jedinstveni su i nužno su realni brojevi. Primjerice, funkcija $e^x$ ima $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ i jednak je nuli (jer joj se graf priljubljuje uz $x$-os), a nema $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

- Limesi se lijepo ponašaju s obzirom na osnovne operacije, no samo u slučaju kada limesi $\lim\limits_{x \to c} f(x)$ i $\lim\limits_{x \to c} g(x)$ postoje (dakle nisu $\pm\infty$!):

  1) $\lim\limits_{x \to c}[f(x) \pm g(x)] = \lim\limits_{x \to c} f(x) \pm \lim\limits_{x \to c} g(x)$

  2) $\lim\limits_{x \to c}[f(x) \cdot g(x)] = \lim\limits_{x \to c} f(x) \cdot \lim\limits_{x \to c} g(x)$

  3) $\lim\limits_{x \to c} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim_{x \to c} f(x)}{\lim_{x \to c} g(x)}$.

  U posljednjoj jednakosti trebamo dodatnu pretpostavku $\lim\limits_{x \to c} g(x) \neq 0$, da bi stvar imala smisla. Nije definirano:

  $$\frac{0}{0}, \; \frac{\pm\infty}{\pm\infty}, \; \pm\infty \cdot 0, \; \infty^0, \; \infty - \infty, \; 1^{\pm\infty}, \; 0^0.$$

  Ovo nisu brojevi, pa ni izrazi. Ovo samo znači da ako uvrštavanjem vrijednosti $x$ u izraz dobijete da morate izračunati nešto od navedenog, znači da radite krivo i da morate promijeniti pristup rješavanja limesa, odnosno dalje „sređivati" izraz dok ne postane „pitomiji". Bit će jasnije kada krenemo rješavati.

## § 6.1. Osnovni trikovi

Pogledajmo na konkretnim primjerima kako rješavati zadatke s limesima. Ne postoji neka špranca, nego svakom treba pristupiti odvojeno i naći odgovarajuću metodu.

**Primjer 6.1.** Odredimo sljedeće limese:

a)

$$\lim_{x \to 7} \frac{\sin x \cdot x^3}{x^2 - 2}$$

Prvi pokušaj prilikom rješavanja limesa je sljedeći: funkcija koju dobijemo je zbroj, razlika, umnožak, kvocijent i/ili kompozicija elementarnih funkcija iz prošle lekcije. Ako je ta funkcija definirana u točki $c$ u kojoj promatramo limes, taj limes je jednak vrijednosti u $c$.

Uvrštavanjem u ovaj izraz dobivamo

$$\frac{\sin 7 \cdot 7^3}{7^2 - 2} = \sin 7 \cdot \frac{343}{47},$$

pa je, iz gore rečenog, to ujedno i traženi limes.

Ova metoda jest prvi pokušaj, ali rijetko kada ćemo dobiti limes samo tako. Tada trebamo koristiti neke druge metode.

b)

$$\lim_{x \to 0} \frac{x^2}{x}$$

Uvrštavanjem $x = 0$ dobijemo $\frac{0}{0}$, što je neodređeni izraz. Dakle, kada dobijemo jedan neodređeni izraz, naša metoda rješavanja je kriva i moramo naći neki drugi način.

Pogledajmo malo bolje funkciju kojoj određujemo limes. U svim točkama osim u nuli, ova funkcija je zapravo funkcija $f(x) = x$. Intuitivno, limes bi trebao nastaviti ponašanje te funkcije i u nuli, i zato je intuitivno limes jednak nula.

Preciznije, metoda koju koristimo je da podijelimo brojnik i nazivnik sa $x$. Tada slijedi

$$\lim_{x \to 0} \frac{x^2}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{x}{1} = \lim_{x \to 0} x.$$

Sada možemo uvrstiti $x = 0$ (više nemamo neodređeni izraz), i dobivamo da je traženi limes jednak 0.

Primijetite da smo tu koristili činjenicu da funkcija u limesu ne mora biti definirana u $c$. Također limes ovisi samo o ponašanju funkcije blizu $c$, ali ne i u toj točki. Zato smo mogli podijeliti s $x$: funkcija $f(x) = x$ kad smo blizu nuli jest blizu nuli, ali nije jednaka nuli - pa ne dijelimo s nulom. Ovo više nećemo spominjati u nastavku

c)

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{(x-1)^2}$$

Uvrštavanje opet daje nedefiniran izraz (i nadalje će uvijek biti tako) oblika $\frac{0}{0}$. Primijetimo da je brojnik zapravo jednak $(x-1)(x+1)$, pa i nazivnik i brojnik imaju faktor $(x-1)$ zbog kojeg su oba jednaka nuli kada evaluiramo funkciju u 1. Stoga dijeljenjem brojnika i nazivnika s $(x-1)$ slijedi

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{(x-1)^2} = \lim_{x \to 1} \frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)^2} = \lim_{x \to 1} \frac{x+1}{x-1}.$$

Uvrštavanjem $x = 1$, dobiveni izraz je oblika $\frac{2}{0}$, te taj limes ne postoji (ide u neku beskonačnost), dakle funkcija s početka divergira u $x = 1$.

Dapače, taj izraz ne teži ni u $+\infty$, niti u $-\infty$. Preciznije, kada je $x$ blizu 1, ali veći od njega, tada je izraz $\frac{x+1}{x-1}$ omjer broja blizu 2 i jako malog pozitivnog realnog broja. S druge strane, kada je $x$ blizu 1, ali manji od njega, tada je izraz $\frac{x+1}{x-1}$ omjer broja blizu 2 i negativnog broja koji je po apsolutnoj vrijednosti jako malen. Zato zapravo vrijedi

$$\frac{x^2-1}{(x-1)^2} \to +\infty \text{ kada } x \to 1^+, \text{ te } \frac{x^2-1}{(x-1)^2} \to -\infty \text{ kada } x \to 1^-.$$

Primijetite oznake: nismo rekli da je ikoji od limesa slijeva ili zdesna jednak $+\infty$ ili $-\infty$, jer limes je uvijek realan broj.

d)

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{1-x}-\frac{3}{1-x^3}\right)$$

Pokušajmo i ovaj zadatak riješiti kao prethodne: imali smo racionalnu funkciju kojoj smo dijelili brojnik i nazivnik s $(x-c)$ dok nismo dobili izraz koji je definiran.
U ovom zadatku prvo treba svesti izraz na zajednički nazivnik. Budući da je $1-x^3 = (1-x)(1+x+x^2)$, slijedi

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{1-x}-\frac{3}{1-x^3}\right)=\lim_{x\to 1}\frac{1+x+x^2-3}{(1-x)(1+x+x^2)}=\lim_{x\to 1}\frac{x+x^2-2}{(1-x)(1+x+x^2)}.$$

Uvrštavanjem $x = 1$, dobivamo neodređeni izraz $\frac{0}{0}$, pa dijelimo i brojnik i nazivnik s $(x-1)$ (ili $(1-x)$). Brojnik možemo podijeliti s $x-1$ ili algoritmom za dijeljenje polinoma, ili možemo naći nultočke kvadratne funkcije. Pokušajte sami dovršiti primjer.

e)

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^3+4}{x^3+1}$$

Za razliku od prijašnjih limesa, ovdje nemamo limesa u nekoj točki $c \in \mathbb{R}$, nego kada $x \to +\infty$.

Pogledajmo brojnik: u njemu je polinom, koji se sastoji od kubnog člana i konstante. Kada $x \to +\infty$, kubni član raste i ide u beskonačnost, dok konstanta „ostaje na mjestu”. Intuitivno, odluka o limesu cijelog izraza ovisi o kubnom članu - kada je $x$ npr. jednak tisuću, nije bitno je li brojnik jednak dvije milijarde ili dvije milijarde i četiri. Slična priča je i u nazivniku.

To opravdavamo dijeleći i brojnik i nazivnik s $x^3$:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^3+4\ /:x^3}{x^3+1\ /:x^3}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2+4/x^3}{1+1/x^3}.$$

Kako $1/x^3$ teži k nuli kada $x \to \infty$, cijeli izraz teži ka $\dfrac{2+0}{1+0} = 2$.

Sada je jasnije zašto smo dijelili s $x^3$ - htjeli smo podijeliti s najvećom potencijom koja se pojavljuje u brojniku ili nazivniku, tako da u zadnjem koraku imamo ili konstante ili izraze koji teže k nuli.

f)

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^4+x^3-5}{(x^2+1)(x+2)(x^2-7)}$$

Situacija je slična kao u prošlom primjeru. Ponovno tražimo najveću potenciju koja se pojavljuje u brojniku ili nazivniku. U brojniku je to $x^4$. U nazivniku, kada bismo raspisali sve zagrade, to bi bilo $x^{(2+1+2)} = x^5$. Zato dijelimo s $x^5$:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{2x^4+x^3-5 \quad / : x^5}{(x^2+1)(x+2)(x^2-7) \,/ : x^5} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}-\frac{5}{x^5}}{(1+\frac{1}{x^2})(1+\frac{2}{x})(1-\frac{7}{x^2})}.$$

Kada iskoristimo da $x^{-n}$ teži k nuli za sve prirodne $n$, imamo da izraz teži k $\dfrac{0}{1\cdot 1\cdot 1} = 0$.

Primijetimo da zagrade u nazivniku nismo sve izmnožili. Treba nam samo vrijednost najveće potencije. Izmnožavanjem samo povećavamo vjerojatnost da ćemo pogriješiti u zadatku.

Dakle, u ovim primjerima naučili smo dvije metode:

Metoda 1) Uvrsti $x = c$ u izraz. Rijetko daje rezultate odmah, no ako smo dobro primijenili neku drugu metodu, daje rezultate na kraju.

Metoda 2) U slučaju racionalnih (a uskoro ćemo vidjeti i nekih drugih sličnih funkcija), dijeli brojnik i nazivnik s $(x-c)^p$, gdje je $p$ neka potencija (ako se traži limes kada $x \to c$, $c \in \mathbb{R}$), ili s $x^m$, gdje je $m$ najveća potencija koja se pojavljuje u brojniku ili nazivniku (ako se traži limes kada $x \to \pm\infty$).

U slučaju limesa kada je $c \in \mathbb{R}$, uvijek smo do sada dijelili s $(x-c)^1$. Može se dogoditi da treba dijeliti i ponovno s istim faktorom, a može se dogoditi i da treba dijeliti s nekim korijenom. Ovaj drugi slučaj je rijedak, ali je jasno kada ga treba upotrijebiti jer će se tada pojaviti još neki korijeni u zadatku.
Pogledajmo još zadataka i naučimo još metoda.

**Primjer 6.2.** Odredimo sljedeće limese:

a)

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2x+3}{x+\sqrt[3]{x^4}}$$

U primjerima ovog tipa (limes u beskonačnosti nečega što izgleda kao racionalna funkcija samo su tu i tamo ubačeni korijeni) zapravo nemamo ništa novoga. Dijelimo brojnik i nazivnik s najvećom potencijom od $x$, samo sada nam se ne javljaju samo prirodne potencije, nego i racionalne. Sjetite se, $\sqrt[m]{x^n} = x^{\frac{n}{m}}$.

Dakle, treba podijeliti brojnik i nazivnik s najvećom potencijom, a to je $x^{\frac{4}{3}}$. Dobivamo

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2x+3}{x+\sqrt[3]{x^4}} = \lim_{x\to\infty} \frac{2\frac{1}{x^{\frac{1}{3}}}+\frac{3}{x^{\frac{4}{3}}}}{\frac{1}{x^{\frac{1}{3}}}+1} = \frac{0+0}{0+1} = 0,$$

gdje smo u predzadnjoj jednakosti iskoristili činjenicu da za svaki pozitivan realan broj $p$ vrijedi

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^p} = 0.$$

b)

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x+1}$$

Ovdje su skrivena dva zadatka: kada $x \to +\infty$ i kada $x \to -\infty$. Za limes u $+\infty$, tražimo najveću potenciju od $x$ u brojniku, što je $\sqrt{x^2} = x$; odnosno nazivniku, što je $x^1 = x$, te zatim podijelimo brojnik i nazivnik sa $x$. Dovršite primjer.

Za limes u $-\infty$, moramo biti oprezni, budući da za realne brojeve $y < 0$ vrijedi $\sqrt{y^2} = -y$ (zaista, općenito je $\sqrt{y^2} = |y|$, pa za negativne ispred apsolutne vrijednosti mijenjamo predznak). Zato, dijeleći brojnik i nazivnik sa $x$ dobivamo

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x+1} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}}{\frac{x+1}{x}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\frac{\sqrt{x^2+1}}{-\sqrt{x^2}}}{1+\frac{1}{x}} =$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{-\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{1+\frac{1}{x}} = -1.$$

Ako želimo izbjeći poteškoće s predznakom, možemo naprosto uvesti supstituciju $t = -x$, jer tada zapravo računamo limes kada $t \to +\infty$. Dakle, umjesto originalnog limesa, tražimo

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{\sqrt{(-t)^2+1}}{(-t)+1} = \lim_{t\to+\infty} \frac{\sqrt{t^2+1}}{-t+1},$$

što znamo (uvjerite se!) dovršiti.
Općenito, ako još niste sigurni u početku, predlažemo da koristite supstituciju. Pazite da kada napravite supstituciju, da promijenite i kamo nova varijabla sada teži.

c)

$$\lim_{x\to1} \frac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt[4]{x}-1}$$

Ovaj je primjer najlakše riješiti supstitucijom, na način da se riješimo korijena. To će zadovoljiti supstitucija $x = t^{12}$ (zašto baš ta? $12 = NZV(3,4)$, najmanji zajednički višekratnik). Kada $x \to 1$, očito i $t \to 1$. Limes postaje

$$\lim_{t\to1} \frac{t^4-1}{t^3-1} = \lim_{t\to1} \frac{(t-1)(t+1)(t^2+1)}{(t-1)(t^2+t+1)} = \ldots = \frac{4}{3}.$$

Drugi način kako možemo ovo riješiti je racionalizacija. Pokušajte se vratiti na ovaj zadatak nakon što riješimo sljedeći primjer.

Dakle, ovdje smo naučili da metodama koje smo spomenuli prije primjera možemo rješavati i zadatke koji uključuju korijen. Također, naučili smo da možemo koristiti i supstituciju, no nećemo to zvati nekom metodom.

**Primjer 6.3.** Odredimo sljedeće limese

a)

$$\lim_{x\to7} \frac{2-\sqrt{x-3}}{x^2-49}$$

Limes je oblika $\frac{0}{0}$. U nazivniku nam se ta nula javlja zbog faktora $x-7$, pa takav faktor treba „pronaći” i u brojniku, kako bismo ih poništili. Tu u priču ulazi racionalizacija. Iako smo u školi naučili racionalizirati nazivnik, sada možemo generalizirati to pravilo:

racionaliziramo ono što nam je „problematično”. Ovdje je to očito brojnik, pa množenjem brojnika i nazivnika faktorom koji će nam dopuniti brojnik na razliku kvadrata, imamo:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 7}\frac{2-\sqrt{x-3}}{x^2-49}\,\begin{matrix}/\cdot(2+\sqrt{x-3})\\ /\cdot(2+\sqrt{x-3})\end{matrix} &= \lim_{x\to 7}\frac{(2-\sqrt{x-3})(2+\sqrt{x-3})}{(x^2-49)(2+\sqrt{x-3})}\\
&= \lim_{x\to 7}\frac{4-(x-3)}{(x^2-49)(2+\sqrt{x-3})}\\
&= \lim_{x\to 7}\frac{7-x}{(x-7)(x+7)(2+\sqrt{x-3})}\\
&= \lim_{x\to 7}\frac{-1}{(x+7)(2+\sqrt{x-3})} = -\frac{1}{56}.
\end{aligned}$$

b)

$$\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2-2x-1}-\sqrt{x^2-7x+3})$$

Limesi oblika $\infty-\infty$ najčešće se rješavaju svođenjem na zajednički nazivnik. Ovdje nemamo nazivnik, no možemo ga stvoriti, racionalizacijom (ponašamo se kao da imaju zajednički nazivnik jednak 1):

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2-2x-1}-\sqrt{x^2-7x+3}) =\\
&= \frac{(\sqrt{x^2-2x-1}-\sqrt{x^2-7x+3})(\sqrt{x^2-2x-1}+\sqrt{x^2-7x+3})}{\sqrt{x^2-2x-1}+\sqrt{x^2-7x+3}}\\
&= \lim_{x\to+\infty}\frac{(x^2-2x-1)-(x^2-7x+3)}{\sqrt{x^2-2x-1}+\sqrt{x^2-7x+3}}\\
&= \lim_{x\to+\infty}\frac{5x-4}{\sqrt{x^2-2x-1}+\sqrt{x^2-7x+3}}.
\end{aligned}$$

Dovršite primjer (dijeleći s najvećom potencijom u brojniku odnosno nazivniku). Razmislite i sami riješite isti primjer kada $x\to-\infty$.

Naučili smo još jednu metodu:

Metoda 3) Racionalizacija, brojnika ili nazivnika (neovisno o potrebama), čak i kada naoko nemamo razlomak u izrazu. Nakon toga primijenjujemo neku od prijašnjih metoda.

Prisjetite se: kako biste racionalizirali izraze kada nemate drugi korijen, nego recimo treći ili četvrti? S kojim tada izrazima proširujemo razlomak?

**Zadatak 6.4** (DZ). Odredite limese

(a) $\displaystyle\lim_{x\to\pm\infty}\frac{(x-3)^5(3x+1)^3(2x^2-5x+3)}{(1-x)^7(6x^3+2x+3x+1)}$,

(b) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+\sqrt{x}}}$,

(c) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt[3]{x}+\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}}{\sqrt{2x+1}}$,

(d) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt[3]{1+x}-1}$,

(e) $\displaystyle\lim_{x\to\pm\infty}(x-\sqrt{x^2+1})$,

(f) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x}-1}$,

(g) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1-2x-x^2}-x-1}{x}$,

(h) $\lim\limits_{x\to \pm\infty} \dfrac{\sqrt{x^2-3x}-x+1}{x}$.

## § 6.2. Tablični limesi

Kada se malo odmaknemo od racionalnih i iracionalnih funkcija, preostaje cijela klasa problema rješavanja limesa, od kojih se dobar dio svodi na neki (tj. neke) od poznatih limesa, koje možete koristiti u rješavanju zadataka. Najkorisniji su:

- $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$,
- $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x = e$,
- $\lim\limits_{x\to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$,
- $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x-1}{x} = 1$,
- $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\log_a(1+x)}{x} = \dfrac{1}{\ln a}$.

Posljednji od navedenih je u ponešto standardnijoj formi:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1.$$

To su limesi koje smatramo „poznatima", „tabličnima", i smijemo ih koristiti. Zato u sljedećim primjerima imamo novu metodu:

Metoda 4) Korištenje „tabličnih" limesa: pokušat ćemo faktorizirati izraz tako da neki faktori budu upravo neki od gore navedenih izraza.

**Primjer 6.5.** Odredimo sljedeće limese:

a)

$$\lim_{x\to\infty} x \sin\frac{1}{x}$$

Kod limesa koji uključuju trigonometrijske funkcije, u pozadini je najčešće limes $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x} = 1$, te iz njega izvedeni limesi.
Kada $x \to \infty$, očito $\frac{1}{x} \to 0$. Dakle, argument funkcije sin teži ka 0, što nas podsjeća na gore naveden limes. Možemo samo transformirati izraz:

$$\lim_{x\to\infty} x \sin\frac{1}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\sin\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}.$$

Posljednji je limes jednak 1. Zaista, ako uzmemo supstituciju $t = \frac{1}{x}$, tada limes postaje

$$\lim_{t\to 0} \frac{\sin t}{t} = 1.$$

b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(13x)x}{\sin^2(12x)\cos(4x)}$.

Ponovo krećemo s analizom kao u prethodnom primjeru. Kada $x \to 0$, očito i $13x \to 0$ i $12x \to 0$. Primijetite da je $\lim\limits_{x\to 0} \cos(4x) = \cos 0 = 1$, tako da nam taj dio ne radi nikakve probleme. Slijedi

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0} \frac{\sin(13x)x}{\sin^2(12x)\cos(4x)} &= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{\sin(13x)}{13x}(13x)x}{\frac{\sin^2(12x)}{(12x)^2}(12x)^2\cos(4x)} \\ &= \frac{13\cdot\frac{\sin(13x)}{13x}}{\frac{\sin^2(12x)}{(12x)^2}\cdot 12^2\cdot\cos(4x)} \\ &= \frac{\sin(13x)}{13x}\cdot\left(\frac{\sin(12x)}{12x}\right)^{-2}\cdot\frac{13}{144\cdot\cos(4x)}.\end{aligned}$$

Sada smo u poziciji iskoristiti

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(13x)}{13x} = 1, \quad \lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin(12x)}{12x}\right)^{-2} = 1$$

(u pozadini ovih tvrdnji su supstitucije $t = 13x$ odnosno $t = 12x$). Sada znamo kamo svaki faktor teži, pa onda i kamo teži njihov umnožak. Rezultat je $\dfrac{13}{144}$.

Kratka digresija: primijetite da smo ovdje komplicirani izraz rastavili na faktore, pa iskoristili da je umnožak limesa jednak limesu umnoška. Savjetujemo da to i inače radite, a ne da neke limese sredite ranije, jer može doći do pogrešaka. Jedna takva bi bila

$$(?!) \quad \lim_{x\to 0} x\cdot\frac{1}{x} = \lim_{x\to 0} x\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{x} = 0\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{x} = 0. \quad (?!)$$

Sami zaključite gdje je pogreška.

c)

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos x - 1}{x^2}$$

Ovo je limes koji je korisno za zapamtiti i ubuduće.
Iskoristit ćemo formulu za dvostruki kut funkcije kosinus. Vrijedi

$$\cos x = \cos^2\left(\frac{x}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{x}{2}\right) = 1 - 2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right).$$

Uvrstite u početni limes i iskoristite

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{\left(\frac{x}{2}\right)^2} = 1,$$

uvjerite se da znate zašto je to ispunjeno. Rezultat koji treba dobiti je $\frac{-1}{2}$.

Drugi način rješavanja originalnog limesa bi bilo proširiti razlomak izrazom $1 + \cos x$. Pokušajte riješiti i na taj način.

d)

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}(x^2 + x)}{x^2 + x}$$

Budući da nemamo „tabličnih” limesa koji uključuju $\operatorname{tg} x$, iskoristit ćemo definiciju funkcije $\operatorname{tg} x$. Slijedi

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}(x^2+x)}{x^2+x} &= \lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sin(x^2+x)}{\cos(x^2+x)}}{x^2+x}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{\sin(x^2+x)}{\cos(x^2+x)\cdot(x^2+x)}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{\sin(x^2+x)}{x^2+x}\cdot\frac{1}{\cos(x^2+x)}.\end{aligned}$$

Prvi faktor na limesu iznosi 1 (zašto?), dok je drugi definiran u nuli, i također iznosi 1. Zato je traženi limes jednak $1\cdot 1 = 1$.

e)

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{arctg}(5x)}{x}$$

Kod ciklometrijskih funkcija, najčešći početak je supstitucija. Ako supstituiramo $t = \operatorname{arctg}(5x)$, tada dobivamo da za $x\to 0$ slijedi $t\to 0$. Također, iz supstitucije slijedi $\operatorname{tg} t = 5x$, odnosno $x = \frac{1}{5}\operatorname{tg} t$. Ako sve dobiveno uvrstimo u početni limes, slijedi

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{arctg}(5x)}{x} = \lim_{t\to 0}\frac{t}{\frac{1}{5}\operatorname{tg} t} = \lim_{t\to 0}\frac{5\cos t}{\frac{\sin t}{t}} = 5.$$

Kod izraza oblika $f(x)^{g(x)}$, kao i kod drugih oblika, prvo primijenimo metodu 1) (uvrstimo $c$). Ako ne dobijemo neodređeni izraz, odlično, ali najčešće ćemo ga dobiti (vjerojatno $1^{\pm\infty}$, $0^0$ ili $\infty^0$). Tada je dobro iskoristiti limes $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ (ili njemu ekvivalentni limes $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{1/x}$).

**Primjer 6.6.** Odredimo sljedeće limese:

a)

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x+3}{2x+1}\right)^{x+1}$$

Kada $x\to\infty$, nije teško vidjeti da izraz $\frac{2x+3}{2x+1}$ teži u 1, a eksponent $x+1$ u beskonačno. Kod limesa oblika $1^\infty$, izraz treba transformirati kako bismo mogli iskoristiti

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$$

Prvo se bavimo izrazom u zagradi, i taj izraz treba napisati u obliku $1+\frac{1}{\text{nešto}}$, gdje „nešto” teži u beskonačnost. Imamo

$$\frac{2x+3}{2x+1} = \frac{2x+1+2}{2x+1} = 1+\frac{2}{2x+1} = 1+\frac{1}{\frac{2x+1}{2}} = 1+\frac{1}{x+\frac{1}{2}}.$$

Dakle, to „nešto” je $t := x+\frac{1}{2}$. To zaista teži u $+\infty$ kada i $x$ tamo teži. Iduće što radimo je da taj isti broj napišemo u eksponent, i vidimo što nam je preostalo. Kako je

$$x+1 = t+\frac{1}{2} = \frac{t+\frac{1}{2}}{t}\cdot t,$$

imamo

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x+3}{2x+1}\right)^{x+1} = \lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{\frac{t+\frac{1}{2}}{t}\cdot t} = \lim_{t\to+\infty}\left[\left(1+\frac{1}{t}\right)^t\right]^{\frac{t+\frac{1}{2}}{t}}.$$

Uspjeli smo izraz s početka zapisati kao tablični izraz koji teži u $e$ potenciran s nekim izrazom koji još trebamo odrediti kamo teži, a to je lagan zadatak. Znamo da racionalna funkcija iz eksponenta teži k 1. Zato je

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x+3}{2x+1}\right)^{x+1}=\lim_{t\to+\infty}\left[\left(1+\frac{1}{t}\right)^{t}\right]^{\frac{t+\frac{1}{2}}{t}}=e^1=e.$$

Ovaj algoritam možemo i inače izvoditi kod limesa oblika $1^{\pm\infty}$: prvo bazu zapišemo kao $1+\frac{1}{\text{„nešto"}}$, zatim izmislimo „nešto" u eksponentu, i onda vidimo kamo ostatak eksponenta teži.
Slično smo mogli iskoristiti i tablični limes $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$, da smo uveli supstituciju $t=\frac{2}{2x+1}$.

b)

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+2}{2x^2+1}\right)^{x^2}$$

Iako ovaj limes možda izgleda kao da ćemo ga namještati kao prošli, to je samo optička varka. Limes uopće nije nedefiniran, uvjerite se da baza teži u $\frac{1}{2}$, a eksponent očito u $\infty$. Zato cijeli izraz evidentno teži u 0.

c)

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\ln\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$$

Limes je oblika $\infty\cdot 0$. Ako izraz transformiramo na način da sve ubacimo pod funkciju ln, slijedi

$$\frac{1}{x}\ln\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}=\frac{1}{x}\ln\left[\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{\frac{1}{2}}\right]=\ln\left[\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x}}\right]=$$

$$=\ln\left[\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{\frac{1}{2x}}\right].$$

Dovoljno je izračunati limes

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{\frac{1}{2x}},$$

jer vrijedi da $\ln\left(\lim\limits_{x\to c}f(x)\right)=\lim\limits_{x\to c}\ln(f(x))$ (ovo vrijedi i za ostale „lijepe" elementarne funkcije, što je posljedica neprekidnosti - spomenut ćemo to u nastavku lekcije). Primijetite da je ovo limes oblika $1^{\infty}$. Sada ga treba riješiti kao primjeru a). Kako je

$$\frac{1+x}{1-x}=\frac{1-x+2x}{1-x}=1+\frac{2x}{1-x},$$

i kako $\frac{2x}{1-x}$ teži k nuli, znamo kako treba srediti eksponent. Imamo

$$\frac{1}{2x}=\frac{1-x}{2x}\cdot\frac{1}{1-x},$$

pa imamo

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{\frac{1}{2x}}=\lim_{x\to 0}\left[\left(1+\frac{2x}{1-x}\right)^{\frac{1-x}{2x}}\right]^{\frac{1}{1-x}}.$$

Izraz u uglatim zagradama teži ka $e$ (zbog $\lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x} = e$), a eksponent teži k 1, pa cijeli izraz teži ka $e^1 = e$. Konačno, primjer s početka teži ka $\ln(e) = 1$.

Postoji još jedan način kako riješiti zadatak: zapišite izraz s početka na drugačiji način:

$$\frac{1}{x}\ln\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} = \frac{\ln(1+x)-\ln(1-x)}{2x}$$

i iskoristite tablični limes koji uključuje funkciju ln.

d)

$$\lim_{x\to 0}\frac{2^x-1}{x}$$

Zadatak podsjeća na poznati limes

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x} = 1.$$

Treba se samo sjetiti da je općenito $a^b = e^{b\ln a}$. Za nas konkretno, $2^x = e^{x\ln 2}$. Zato imamo

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{2^x-1}{x} &= \lim_{x\to 0}\frac{e^{x\ln 2}-1}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{e^{x\ln 2}-1}{\frac{x\ln 2}{\ln 2}}\\ &= \lim_{x\to 0}\ln 2\cdot\frac{e^{x\ln 2}-1}{x\ln 2} = \ln 2\cdot\lim_{x\to 0}\frac{e^{x\ln 2}-1}{x\ln 2} = \ln 2.\end{aligned}$$

Pokušajte na isti način odrediti

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}$$

za neki realan broj $a > 0$.

e)

$$\lim_{x\to 0}\frac{8^x-7^x}{6^x-5^x}$$

Kad rješavamo limese u nuli, a javlja se eksponencijalna funkcija, često je trik u tome da pokušamo, kao u prethodnom primjeru, „navući” limes na poznati

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x} = 1.$$

To se nerijetko radi tako da se dodaje i oduzima 1 na mjestima gdje je to potrebno. Konkretno,

$$\lim_{x\to 0}\frac{8^x-7^x}{6^x-5^x} = \lim_{x\to 0}\frac{8^x-1+1-(7^x-1+1)}{6^x-1+1-(5^x-1+1)} = \lim_{x\to 0}\frac{(8^x-1)-(7^x-1)}{(6^x-1)-(5^x-1)} = (*).$$

Preostaje samo, da bismo iskoristili limes spomenut na početku, podijeliti brojnik i nazivnik sa $x$,

$$(*) = \lim_{x\to 0}\frac{\left(\frac{8^x-1}{x}\right)-\left(\frac{7^x-1}{x}\right)}{\left(\frac{6^x-1}{x}\right)-\left(\frac{5^x-1}{x}\right)} = (**).$$

Ako ste riješili prethodni primjer, znat ćete da je konačno

$$(**) = \frac{\ln 8-\ln 7}{\ln 6-\ln 5} = \frac{\ln\frac{8}{7}}{\ln\frac{6}{5}}.$$

**Zadatak 6.7** (DZ). Odredite limese:

(a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg} x - \sin x}{x^3}$,

(b) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sin(x-1)}{1-x^3}$,

(c) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\cos x - \cos 2}{x-2}$,

(d) $\lim\limits_{x\to +\infty} x(\ln(1+x) - \ln x)$,

(e) $\lim\limits_{x\to 5} \dfrac{\ln x - \ln 5}{x-5}$,

(f) $\lim\limits_{x\to \pm\infty} x(e^{\frac{1}{x}} - 1)$,

(g) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{2} - \sqrt{1+\cos x}}{\sin^2 x}$,

(h) $\lim\limits_{x\to 0} \sqrt[x]{1+\sin x}$,

(i) $\lim\limits_{x\to 0} (\cos x)^{\frac{1}{x \sin x}}$,

(j) $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\ln(\cos x)}{x^2}$.

U posljednjem primjeru mogli bismo pisati i $\lim\limits_{x\to 0}$, jer je funkcija $\ln(\cos x)$ definirana u nekoj okolini nule. Što se praktičnih potreba tiče, račun je isti.
Postoji još jedna metoda rješavanja limesa, L'Hospitalovo pravilo, koja zahtijeva poznavanje deriviranja pa ju sada ne spominjemo.

## § 6.3. Neprekidnost

**Definicija 6.2**

Kažemo da je funkcija $f : I \to \mathbb{R}$ neprekidna u točki $c \in I$ ako

$$\lim_{x\to c} f(x) = f(c).$$

Kažemo da je neprekidna ako je neprekidna u svakoj točki domene.

Sada je jasno da smo pod pojmom „lijepe" funkcije skrivali da se zapravo radi o neprekidnim funkcijama. Elementarne funkcije su neprekidne na domenama na kojima su definirane. Iz svojstva limesa, znamo i da su njihovi zbrojevi, razlike, umnošci, kvocijenti i kompozicije takvi.
U zadatcima koji slijede trebat ćemo odrediti za koji realni parametar je funkcija neprekidna. Kao u definiciji, trebat će provjeriti kada je limes u nekoj točki $c$ jednak vrijednosti funkcije $f$ u toj točki. Uzimajući u obzir da će nam biti lakše odvojeno gledati ponašanje funkcije slijeva i zdesna, zapravo ćemo trebati provjeriti postoje li tri broja

$$\lim_{x\to c^+} f(x), \quad \lim_{x\to c^-} f(x) \quad \text{i} \quad f(c),$$

i poklapaju li se. Nije dovoljno samo da se prva dva broja poklapaju, pogledajte funkciju koja je svugdje jednaka nuli osim za $x = 0$ gdje je jednaka 1. Ona nije neprekidna.

**Primjer 6.8.** Odredimo parametar $\lambda \in \mathbb{R}$ tako da je funkcija $f$ neprekidna.

$$f(x) = \begin{cases} -x, & x < 0, \\ \lambda + x, & x \geq 0. \end{cases}$$

Pokušajte nacrtati graf ove funkcije za razne odabire parametra $\lambda$. Vidjet ćete da je funkcija neprekidna samo za $\lambda = 0$. Pokažimo to.
Prvi korak u ovim zadatcima je da opravdamo da je funkcija neprekidna osim u točki gdje imamo neki problem, a to radimo skoro uvijek na isti način. Evidentno je funkcija neprekidna u svakoj točki intervala $\langle -\infty, 0 \rangle$ (jer je tu zadana sa $f(x) = -x$), te analogno u svakoj točki intervala $\langle 0, +\infty \rangle$ (jer je tu zadana sa $f(x) = \lambda + x$).
Dakle preostaje provjeriti neprekidnost u nuli. Za to treba provjeriti tri vrijednosti: limese slijeva i zdesna u nuli, te samu vrijednost u nuli. Redom imamo:

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} \lambda + x = \lambda + \lim_{x \to 0^+} x = \lambda,$$
$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} -x = 0.$$

Primijetite da smo koristili činjenicu da ovi limesi ovise samo o vrijednostima funkcije $f$ različitima od nule, dakle iksevi koji su strogo veći ili strogo manji od nule. Konačno, treba nam i broj $f(0) = \lambda$.
Dakle, limesi slijeva i zdesna postoje. Tri broja koja se trebaju poklapati su $\lambda$, 0 i $\lambda$. Oni se poklapaju kada je $\lambda = 0$. Funkcija je neprekidna samo u tom slučaju.

**Zadatak 6.9.** Odredite parametar $\lambda \in \mathbb{R}$ takav da funkcija bude neprekidna.

(a) $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-4}{x-2}, & x \neq 2, \\ \lambda, & x = 2. \end{cases}$

(b) $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & x < 0, \\ 5x^2 - 2x + \lambda, & x \geq 0. \end{cases}$

**Rješenje 6.9.** a) Funkcija je neprekidna u svakoj točki osim možda u $x = 2$, pa provjeravamo samo tu točku. Za $x \neq 2$ vrijedi

$$\frac{x^2 - 4}{x - 2} = \frac{(x-2)(x+2)}{x-2} = x + 2.$$

Zato je

$$\lim_{x \to 2} f(x) = \lim_{x \to 2} (x + 2) = 4.$$

Budući da je $f(2) = \lambda$, funkcija je neprekidna ako i samo ako je $\lambda = 4$.

b) Funkcija je neprekidna na intervalima $\langle -\infty, 0 \rangle$ i $\langle 0, +\infty \rangle$, pa preostaje provjeriti neprekidnost u nuli. Redom imamo

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} \frac{\sin x}{x} = 1,$$

te

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} (5x^2 - 2x + \lambda) = \lambda.$$

Konačno, iz definicije funkcije je $f(0) = \lambda$. Dakle, tri vrijednosti koje se trebaju poklapati su 1, $\lambda$ i $\lambda$, pa funkcija postaje neprekidna točno za $\lambda = 1$.

□

**Zadatak 6.10.** Odredite parametar $\lambda \in \mathbb{R}$ tako da funkcija bude neprekidna.

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-1}{x-1}, & x < 1, \\ \lambda x + 1, & x \geq 1. \end{cases}$$

**Rješenje 6.10.** Funkcija je neprekidna na intervalima $\langle -\infty, 1\rangle$ i $\langle 1, +\infty\rangle$, pa treba provjeriti samo točku $x = 1$. Za $x < 1$ vrijedi

$$\frac{x^2-1}{x-1} = x + 1,$$

pa je

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = 2.$$

S druge strane,

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lambda + 1, \qquad f(1) = \lambda + 1.$$

Funkcija je neprekidna ako i samo ako se sve tri vrijednosti poklapaju, dakle ako je $\lambda + 1 = 2$. Zato je $\lambda = 1$. □

**Zadatak 6.11.** Odredite parametar $\lambda \in \mathbb{R}$ tako da funkciju $f : \mathbb{R} \setminus \{2\} \to \mathbb{R}$ zadanu s

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-4}{x-2}, & x < 2, \\ \lambda + \dfrac{\sqrt{x+2}-2}{x-2}, & x > 2 \end{cases}$$

možemo proširiti do neprekidne funkcije na $\mathbb{R}$.

**Rješenje 6.11.** Takvo proširenje postoji točno onda kada postoji limes funkcije u točki 2, odnosno kada se lijevi i desni limes poklapaju. Za $x < 2$ vrijedi

$$\frac{x^2-4}{x-2} = x + 2,$$

pa je

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = 4.$$

Za desni limes racionaliziramo:

$$\frac{\sqrt{x+2}-2}{x-2} = \frac{(\sqrt{x+2}-2)(\sqrt{x+2}+2)}{(x-2)(\sqrt{x+2}+2)} = \frac{1}{\sqrt{x+2}+2}.$$

Zato je

$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lambda + \frac{1}{4}.$$

Lijevi i desni limes se poklapaju ako i samo ako je

$$4 = \lambda + \frac{1}{4},$$

odnosno ako je $\lambda = \frac{15}{4}$. Tada neprekidno proširenje dobivamo tako da definiramo $f(2) = 4$. □

**Zadatak 6.12.** Je li moguće proširiti funkciju $f : \mathbb{R} \setminus \{1\} \to \mathbb{R}$ zadanu s

$$f(x) = \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{x-1}\right)$$

do neprekidne funkcije na $\mathbb{R}$?

**Rješenje 6.12.** Takvo proširenje bilo bi moguće točno onda kada bi postojao limes funkcije u točki 1. Međutim,

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{1}{x-1} = -\infty, \qquad \lim_{x\to 1^+} \frac{1}{x-1} = +\infty.$$

Zato su jednostrani limesi

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = -\frac{\pi}{2}, \qquad \lim_{x\to 1^+} f(x) = \frac{\pi}{2}.$$

Budući da se jednostrani limesi ne poklapaju, limes u točki 1 ne postoji. Zato funkciju nije moguće proširiti do neprekidne funkcije na $\mathbb{R}$. $\square$

**Zadatak 6.13.** Koristeći $\varepsilon$-$\delta$ definiciju limesa, dokažite sljedeće tvrdnje. U svakom zadatku eksplicitno odredite $\delta = \delta(\varepsilon)$.

(a) $\lim\limits_{x\to 2} x^2 = 4$,

(b) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{1}{x} = 1$.

**Rješenje 6.13.** a) Neka je $\varepsilon > 0$. Želimo postići

$$|x^2 - 4| < \varepsilon.$$

Vrijedi

$$|x^2 - 4| = |x-2||x+2|.$$

Ako dodatno pretpostavimo da je $|x-2| < 1$, tada je $1 < x < 3$, pa je $|x+2| < 5$. Zato je dovoljno uzeti

$$\delta = \min\left\{1, \frac{\varepsilon}{5}\right\}.$$

Tada iz $|x-2| < \delta$ slijedi

$$|x^2 - 4| = |x-2||x+2| < 5|x-2| < 5\delta \le \varepsilon.$$

b) Neka je $\varepsilon > 0$. Želimo postići

$$\left|\frac{1}{x} - 1\right| < \varepsilon.$$

Vrijedi

$$\left|\frac{1}{x} - 1\right| = \frac{|x-1|}{|x|}.$$

Ako dodatno pretpostavimo da je $|x-1| < \frac{1}{2}$, tada je $\frac{1}{2} < x < \frac{3}{2}$, pa je $|x| > \frac{1}{2}$. Zato je

$$\left|\frac{1}{x} - 1\right| < 2|x-1|.$$

Sada uzmemo

$$\delta = \min\left\{\frac{1}{2}, \frac{\varepsilon}{2}\right\}.$$

Tada iz $|x-1| < \delta$ slijedi

$$\left|\frac{1}{x} - 1\right| < 2|x-1| < 2\delta \le \varepsilon.$$

$\square$

**Zadatak 6.14.** Neka je $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ zadana s

$$f(x) = \frac{|x|}{x}.$$

Postoje li limesi

$$\lim_{x\to 0} f(x^2), \qquad \lim_{x\to 0} f(x)?$$

**Rješenje 6.14.** Za svaki $x \neq 0$ vrijedi $x^2 > 0$, pa je

$$f(x^2) = \frac{|x^2|}{x^2} = 1.$$

Zato postoji

$$\lim_{x\to 0} f(x^2) = 1.$$

S druge strane, sama funkcija $f$ nema limes u nuli jer je

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = -1, \qquad \lim_{x\to 0^+} f(x) = 1.$$

Dakle, zamjena $x$ s $x^2$ može sakriti ponašanje funkcije slijeva. $\square$

**Zadatak 6.15 (*).** Neka je $a > 0$, neka je $g : \langle -a, a\rangle \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ funkcija i neka je $L \in \mathbb{R}$. Koje su od sljedećih tvrdnji nužno istinite?

a) $\lim_{x\to 0} g(x) = L \iff \lim_{x\to 0} g(\sin x) = L,$

b) $\lim_{x\to 0} g(x) = L \iff \lim_{x\to 0} g(|x|) = L.$

Dokažite ili opovrgnite protuprimjerom.

**Rješenje 6.15.** a) Tvrdnja je istinita. Ako je $\lim_{t\to 0} g(t) = L$, tada iz $\sin x \to 0$ slijedi

$$\lim_{x\to 0} g(\sin x) = L.$$

Obratno, pretpostavimo da je $\lim_{x\to 0} g(\sin x) = L$. Svaki dovoljno mali $t \neq 0$ možemo zapisati kao $t = \sin x$, gdje je $x = \arcsin t$ i $x \to 0$ kada $t \to 0$. Zato iz limesa kompozicije slijedi i

$$\lim_{t\to 0} g(t) = L.$$

b) Tvrdnja nije istinita. Implikacija slijeva nadesno vrijedi, jer $|x| \to 0$. Međutim, obrat ne vrijedi. Uzmimo

$$g(x) = \frac{|x|}{x}.$$

Tada je za $x \neq 0$

$$g(|x|) = 1,$$

pa postoji $\lim_{x\to 0} g(|x|) = 1$. Ipak, $\lim_{x\to 0} g(x)$ ne postoji, jer se lijevi i desni limes razlikuju.

$\square$

**Zadatak 6.16.** Konstruirajte funkciju $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ koja je neprekidna u 0, nije neprekidna u 1, ali ima limes u 1.

**Rješenje 6.16.** Jedan primjer je

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \neq 1, \\ 1, & x = 1. \end{cases}$$

Funkcija je neprekidna u 0 jer je u nekoj okolini nule stalno jednaka nuli. U točki 1 imamo

$$\lim_{x \to 1} f(x) = 0,$$

jer su sve vrijednosti funkcije u okolini jedinice, osim možda u samoj jedinici, jednake nuli. Međutim, $f(1) = 1$, pa nije neprekidna u 1. $\square$