TRIKOVI IZ LINEARNE ALGEBRE

Matija Bašić

7. ožujka 2025.

Na početku ćemo riješiti nekoliko zadataka koristeći pojmove s kolegija *Linearna algebra 1*, poput *linearno nezavisan skup vektora*, *rang matrice*, *invertibilni linearni operator* itd. Nakon toga ćemo govoriti o invarijantama sličnosti i kako ih koristiti u zadacima. Teoremi koje ćemo koristiti se dokazuju na kolegijima *Linearna algebra 2* i *Vektorski prostori*.

Invarijante sličnosti

Neka je V konačnodimenzionalni vektorski prostor nad nekim poljem k i $A\colon V \to V$ linearni operator. Ako je $e = (e_i)$ neka baza prostora V, onda operatoru A možemo pridružiti matricu $A_e = (a_{ij})$, pri čemu je

$$Ae_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} e_i.$$

Ako su e i f dvije baze prostora V onda su matrice A_e i A_f *slične* , tj. postoji invertibilna matrica P takva da je $A_f = P^{-1} A_e P$. Slične matrice imaju isti trag i istu determinantu. Kažemo da su trag i determinanta *invarijante sličnosti.*

Trag linearnog operatora A možemo definirati kao trag matrice A_e za bilo koju bazu e. Ta definicija je dobra jer za bilo koje dvije matrice X i Y vrijedi $\mathrm{tr}(XY) = \mathrm{tr}(YX)$, pa posebno

$$\mathrm{tr}(A_f) = \mathrm{tr}(P^{-1} A_e P) = \mathrm{tr}(A_e).$$

Slično, koristeći *Binet-Cauchyev teorem* vidimo da je dobro definiran pojam determinante linearnog operatora A. U nastavku ćemo proučavati još neke invarijante.

Minimalni i karakteristični polinom

Za svaki polinom $p \in k[x]$ definiran je linearni operator $p(A)\colon V \to V$.

Definicija. Polinom p *poništava* A ako je $p(A) = 0$. *Minimalni polinom* linearnog operatora $A\colon V \to V$ je normirani polinom najmanjeg stupnja koji poništava A.

Propozicija 1. Ako je V konačnodimenzionalan vektorski prostor, onda za svaki linearni operator $A\colon V \to V$ postoji jedinstveni minimalni polinom $m_A \in k[x]$.
Propozicija 2. Neka je $p \in k[x]$. Polinom p poništava linearni operator $A\colon V \to V$ ako i samo ako minimalni polinom m_A dijeli polinom A.

Definicija. *Karakteristični polinom* linearnog operatora $A\colon V \to V$ definiramo formulom $k_A(\lambda) = \det(\lambda I - A)$. Nultočke karakterističnog polinoma k_A su *svojstvene vrijednosti* operatora A. Skup $\sigma(A)$ svih svojstvenih vrijednosti nazivamo *spektar* operatora A. Kratnost svojstvene vrijednosti $\lambda \in \sigma(A)$ nazivamo *algebarska kratnost* od λ.

Propozicija 3. Karakteristični polinom matrice je invarijanta sličnosti.
Teorem 4 (Hamilton-Cayley). Karakteristični polinom k_A poništava operator A.
Korolar 5. Minimalni polinom m_A dijeli karakteristični polinom k_A.
Propozicija 6. Svaka nultočka karakterističnog polinoma k_A je i nultočka minimalnog polinoma m_A. Linearni operator A je dijagonalizabilan ako i samo ako je kratnost svake nultočke minimalnog polinoma m_A jednaka 1.

Jordanova forma i teorem o preslikavanju spektra

Definicija. *Jordanova klijetka* $J_\lambda^{(d)}$ je kvadratna matrica reda d kojoj je na glavnoj dijagonali λ, neposredno iznad glavne dijagonale 1, a svi ostali elementi su 0.

Teorem 7 (Jordanova forma). Neka je k **algebarski zatvoreno polje** (npr. $\mathbb{C}$). Za svaku matricu $A \in M_n(k)$ postoji jedinstvena matrica J_A oblika

$$J_A = J_{\lambda_1}^{(d_1)} \oplus \cdots \oplus J_{\lambda_m}^{(d_m)}$$

slična matrici A.

Korolar 8. Matrice A i B su slične ako i samo ako su im pripadne Jordanove forme J_A i J_B jednake (do na poredak klijetki). Svakom linearnom operatoru A jednoznačno je (do na poredak elemenata) priružena baza e vektorskog prostora takva da je matrica A_e u Jordanovoj formi.

Definicija. *Geometrijska kratnost* svojstvene vrijednosti $\lambda \in \sigma(A)$ operatora A je dimenzija A–invarijantnog potprostora $\mathrm{Ker}(A - \lambda I)$ od V.

Korolar 9. Geometrijska kratnost svojstvene vrijednosti $\lambda \in \sigma(A)$ je broj klijetki $J_\lambda^{(d)}$, a kratnost u minimalnom polinomu m_A je jednaka maksimalnoj veličini d klijetke $J_\lambda^{(d)}$ koja se pojavljuje u Jordanovoj formi J_A.

Teorem 10 (o preslikavanju spektra). Neka je $p \in k[x]$. Tada je

$$\sigma(p(A)) = p(\sigma(A)) = \{p(\lambda) : \lambda \in \sigma(A)\}.$$

Štoviše, kratnosti su očuvane, tj. ako je λ nultočka polinoma k_A kratnosti n, onda je $p(\lambda)$ nultočka polinoma $k_{p(A)}$ kratnosti n.

Ideja dokaza. Možemo koristiti matricu A_e u Jordanovoj formi jer vrijedi $P^{-1}p(A_e)P = p(P^{-1}A_eP)$. Na dijagonali od $p(A_e)$ dobivamo upravo $p(\lambda)$ za $\lambda \in \sigma(A)$.

Napomena. Bitno je primjetiti da iako polinomijalna preslikavanja čuvaju svojstvene vrijednosti (dijagonalu), ona općenito ne čuvaju strukturu invarijantnih potprostora! Promotrite primjer $\dim V = 4$, $A(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_2, x_3, x_4, 0)$, $m_A(x) = x^4$, $p(A) = A^2$, $m_{p(A)}(x) = x^2$.

Napomena. Teorem o preslikavanju spektra vrijedi i nad poljima koja nisu algebarski zatvorena jer vektorski prostor V možemo promatrati i kao prostor nad algebarski zatvorenim proširenjem početnog polja kako bismo dobili matricu A_e u Jordanovu formi.

Hermitske i unitarne matrice

Definicija. Ako je $A = (a_{ij})$ kompleksna matrica, onda kažemo da je matrica $A^* = (\overline{a_{ji}})$ *adjungirana* matrici A. Ako je $A = A^*$, kažemo da je A *hermitska matrica.* Ako je $A^* = A^{-1}$, kažemo da je A *unitarna matrica.*

Propozicija 11. Za $\lambda \in \mathbb{C}$ i vektor v vrijedi $Av = \lambda v$ ako i samo ako vrijedi $A^*v = \overline{\lambda} v$.
Propozicija 12. Hermitska matrica A se može dijagonalizirati i $\sigma(A) \subset \mathbb{R}$.
Propozicija 13. Sve svojstvene vrijednosti unitarne matrice imaju modul 1.

Definicija. Za $w, v \in \mathbb{R}^n$, označavamo

$$w^t v = \begin{bmatrix} w_1 & \ldots & w_n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_1 \\ \ldots \\ v_n \end{bmatrix} = w_1 v_1 + \ldots + w_n v_n.$$

Kažemo da su w i v ortogonalni ako je $w^t v = 0$. Ortogonalni komplement $W^\perp$ vektorskog potprostora $W \leqslant \mathbb{R}^n$ je

$$W^\perp = \{v \in \mathbb{R}^n : w^t v = 0 \text{ za sve } w \in W\}.$$

Skup $W^\perp$ je vektorski potprostor i ako je $\dim W = k$, onda je $\dim W^\perp = n - k$. Također vrijedi $(W^\perp)^\perp = W$. Dokažite ove tvrdnje!

Lema 14. Ako Z nije oblika λI, onda postoji invertibilna matrica P takva da matrica $P^{-1}ZP$ ima 0 na mjestu $(1, 1)$.

Dokaz. Neka je $Z \neq 0$ i pretpostavimo da ne postoji invertibilna matrica P takva da matrica $P^{-1}ZP$ ima 0 na mjestu $(1, 1)$.

Neka je $w \in \mathbb{R}^n$ takav vektor da je $w^t Z \neq 0$. Neka je $W = [\{w\}]$ i $Z = [\{(w^t Z)^t\}]$.

Pretpostavimo da postoji vektor $v \in \mathbb{R}^n$ takav da je $w^t v \neq 0$ i $w^t Z v = 0$. Neka je $\{p_2, p_3, \ldots, p_n\}$ baza za $W^\perp$. Označimo $\alpha = w^t v$ i $v' = \frac{1}{\alpha} v$. Tada je matrica P kojoj su stupci v', p_2, …, p_n invertibilna. Zbog $w^t v' = 1$ i $w^t p_j = 0$ za $j = 2$, …, n prvi redak inverza P^{-1} je w^t. Slijedi da je na prvom mjestu matrice $P^{-1}ZP$ upravo element $w^t Z v' = \frac{1}{\alpha} w^t Z v = 0$, što je kontradikcija. Dakle, za svaki vektor $v \in \mathbb{R}^n$ vrijedi implikacija:

$$w^t Z v = 0 \implies w^t v = 0.$$

Ovo pokazuje da je$Z^\perp$ sadržan u potprostoru $W^\perp$. Budući da ti potprostori imaju istu dimenziju $(n - 1)$, zaključujemo da su oni jednaki. No, tada je

$$[\{w\}] = (W^\perp)^\perp = (Z^\perp)^\perp = [\{(w^t Z)^t\}]$$

iz čega zaključujemo da su w^t i $w^t Z$ kolinearni.

Pokazali smo da za svaki vektor $w \in \mathbb{R}^n$ vrijedi $w^t Z = 0$ ili $w^t Z = \mu_w w^t$ za neki $\mu_w \in \mathbb{R}$. Ova tvrdnja primijenjena na vektore kanonske baze na $\mathbb{R}^n$ povlači da je Z dijagonalna matrica. Neka je $e_i^t Z = z_{ii} e_i^t$. Budući da je

$$(e_i - e_j)^t Z = z_{ii} e_i^t - z_{jj} e_j^t = \mu_{e_i - e_j}(e_i^t - e_j^t)$$

zbog jedinstvenosti zapisa u bazi slijedi $z_{ii} = \mu_{e_i - e_j} = z_{jj}$ za svaki par i, j. Dakle, svi elementi na dijagonali su jednaki, tj. Z je oblika λI.

Lema 15. Neka je $Z = AB - BA \in M_{n-1}(\mathbb{R})$ i $Z' \in M_n(\mathbb{R})$ matrica oblika

$$Z' = \begin{bmatrix} 0 & w^t \\ v & Z \end{bmatrix}$$

za neke vektore $w, v \in \mathbb{R}^{n-1}$. Tada postoje $A', B' \in M_n(\mathbb{R})$ takve da je $Z' = A'B' - B'A'$.

Dokaz. Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je A invertibilna matrica jer inače možemo odabrati $\alpha \in \mathbb{R}$ takav da su sve svojstvene vrijednosti od $A + \alpha I$ različite od 0, tj. da je $A + \alpha I$ invertibilna, te vrijedi

$$(A + \alpha I)B - B(A + \alpha I) = AB - BA = Z'.$$

Sada definiramo

$$A' = \begin{bmatrix} 0 & 0^t \\ 0 & A \end{bmatrix}, \quad B' = \begin{bmatrix} 0 & -w^t A^{-1} \\ A^{-1}v & B \end{bmatrix}.$$

Teorem 16. Matrica $Z \in M_n(\mathbb{R})$ ima trag 0 ako i samo ako postoje matrice A i B takve da je $Z = AB - BA$.

Dokaz. Znamo da je $\operatorname{tr}(AB - BA) = \operatorname{tr}(AB) - \operatorname{tr}(BA)0$. Obrat dokazujemo indukcijom po dimenziji matrice $Z \in M_n(\mathbb{R})$. Za $n = 1$, tvrdnja očito vrijedi jer je $Z = 0$ i možemo staviti $A = B = 0$. Neka je $k \in \mathbb{N}$ i pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za sve $n < k$. Neka je $Z' \in M_k(\mathbb{R})$ matrica traga 0. Tada prema Lemi 14 postoji invertibilna matrica $P \in M_k(\mathbb{R})$, te vektori $w, v \in \mathbb{R}^{k-1}$ i matrica $Z \in M_{k-1}(\mathbb{R})$ takvi da je

$$P^{-1}Z'P = \begin{bmatrix} 0 & w^t \\ v & Z \end{bmatrix}.$$

Budući da je $\operatorname{tr} Z' = 0$, slijedi $\operatorname{tr}(P^{-1}Z'P) = 0$ i $\operatorname{tr} Z = 0$. Prema pretpostavci indukcije postoje matrice A i B takve da je $Z = AB - BA$. Prema Lemi 2 postoje matrice A' i B' takve da je $P^{-1}Z'P = A'B' - B'A'$. Konačno zaključujemo da je

$$Z' = (PA'P^{-1})(PB'P^{-1}) - (PB'P^{-1})(PA'P^{-1}).$$

Time je dokaz završen.

Zadaci

1. Neka su $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ takve da je $AB + A + B = 0$. Dokažite da je $AB = BA$.
2. Neka je $A \in M_n(\mathbb{C})$ hermitska matrica takva da vrijedi $A^5 + A^3 + A = 3I$. Dokažite da je $A = I$.
3. Neka su A i B unitarne kompleksne matrice. Dokažite $|\det(A + B)| \leq 2^n$.
4. Neka su $A, B \in M_n(\mathbb{C})$. Dokažite da vrijedi $\det(I + AB) = \det(I + BA)$.

Domaća zadaća

Treba točno riješiti barem 8 zadataka. Zadaće predajte do petka 28. ožujka 2025.

1. Neka je $A = (a_{ij})$ matrica dimenzija $n \times n$ takva da vrijedi
$$|a_{ii}| > \sum_{j \neq i} |a_{ji}|$$
za sve $1 \leqslant i \leqslant n$. Dokažite da je A invertibilna matrica.

2. Neka su $A, B, C \in M_n(\mathbb{R})$ pri čemu je A invertibilna matrica. Ako je $(A-B)C = BA^{-1}$, dokažite da je $C(A-B) = A^{-1}B$.

3. Odredite jedan maksimalan skup nesličnih matrica A za koje je $k_A(x) = (x-1)^5(x+1)$ i $m_A(x) = (x-1)^2(x+1)$.

4. Neka je $A \in M_n(\mathbb{R})$ takva da vrijedi $A^3 - 4A^2 + 8A - 8I = 0$. Odredite $\det A$.

5. Neka su A, B i $A + B$ regularne kompleksne matrice takve da vrijedi $(A+B)^{-1} = A^{-1} + B^{-1}$. Dokažite da je tada $\det^3(A) = \det^3(B)$.

6. Neka su A i B realne 3×3 matrice. Dokažte
$$3\det(AB - BA) = \operatorname{tr}((AB - BA)^3).$$

7. Neka su $A, B, C, D \in M_n(\mathbb{C})$ pri čemu su A i C regularne takve da vrijedi $A^kB = C^kD$ za svaki prirodan broj k. Dokažite da je $B = D$.

8. Neka su $A, B \in M_n(\mathbb{C})$ takve da je $A^2B + BA^2 = 2ABA$. Dokažite da postoji prirodni broj k takav da je $(AB - BA)^k = 0$.

9. Neka je $A = (a_{ij}), a_{ij} > 0$ takva da vrijedi $\sum_{j=1}^n a_{ij} = 1$ za sve $1 \leq i \leq n$. Dokažite da za svaki $\lambda \in \sigma(A)$ vrijedi $|\lambda| \leqslant 1$.

10. Neka su $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ takve da $A^{2016} = B^{2017} = I$ i $AB = BA$. Dokažite da je $A+B+I$ invertibilna matrica.

11. Neka je n neparan prirodni broj i A realna $n \times n$ matrica takva da je $A^2 = 0$ i $A^2 = I$. Dokažite da je
$$\det(A + I) \geqslant \det(A - I).$$

12. Neka su A i B cjelobrojne $n \times n$ matrice takve da su matrice
$$A,\ A + B,\ A + 2B,\ \ldots,\ A + 2nB$$
invertibilne i inverzi imaju cjelobrojne koeficijente. Dokažite da je i $A + (2n+1)B$ invertibilna matrica te da joj inverz ima cjelobrojne koeficijente.

13. Neka su $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ i pretpostavimo da postoje različiti realni brojevi $t_1, t_2, ..., t_{n+1}$ takvi da su matrice $A + t_iB$ nilpotentne za sve $1 \leq i \leq n+1$. Dokažite da su matrice A i B također nilpotentne.

   Kažemo da je matrica A nilpotentna ako postoji prirodni broj k takav da je $A^k = 0$.

14. Neka je $A = (a_{ij})$ matrica dimenzija $n \times n$ s pozitivnim elementima takva da je

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} = n.$$

   (a) Dokažite da je $|\det A| \leqslant 1$.

   (b) Ako je $|\det A| = 1$ i $\lambda \in \mathbb{C}$ je proizvoljna svojstvena vrijednost matrice A, dokažite da vrijedi $|\lambda| = 1$.

15. Dana je matrica $A = (a_{jk})$ pri čemu je

$$a_{jk} = \begin{cases} 1, & \text{ako } |j-k| = 1, \\ 0, & \text{inače.} \end{cases}$$

Dokažite da je spektar $\sigma(A)$ centralosimetričan skup obzirom na ishodište u kompleksnoj ravnini.