

MATEMATIKA 1 – prva zadaća
2025./2026.

1. (1+1) Zadana je funkcija $f : (-1, 1) \rightarrow (-2, 2)$, $f(x) = x - x^2$.
- (a) Odredite skup $A \subseteq (-2, 2)$ takav da funkcija $g : (-1, 1) \rightarrow A$ zadana istim pravilom kao f bude surjekcija.
- (b) Odredite skup $B \subseteq (-1, 1)$ takav da funkcija $h : B \rightarrow A$ zadana istim pravilom bude bijekcija.

Rješenje:

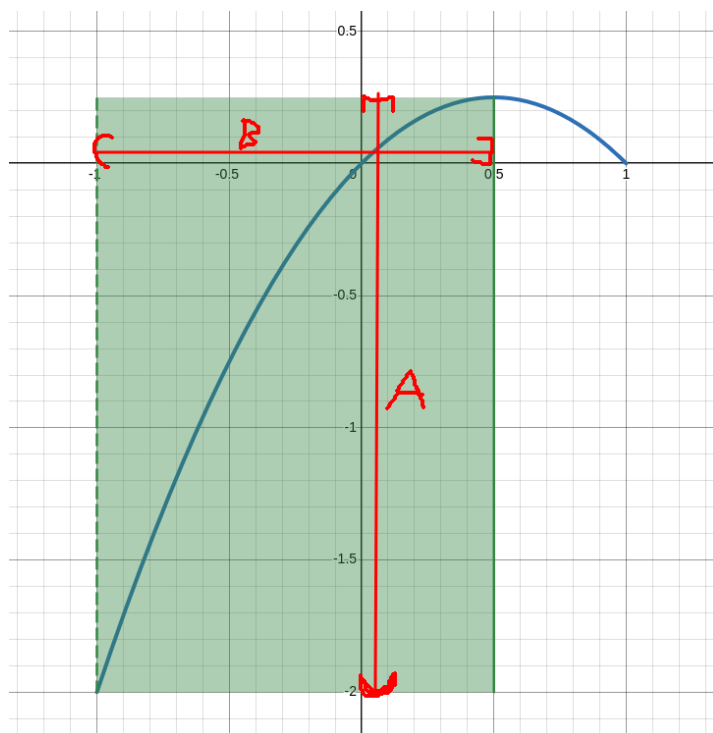
Graf funkcije $f(x) = -x^2 + x$ je parabola okrenuta prema dolje. Nultočke su 0 i 1, pa je tjeme u $x_0 = \frac{1}{2}$. Vrijednost u tjemenu je $y_0 = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$.

(a) Da bi funkcija bila surjekcija, skup A mora biti slika funkcije. Promatranjem grafa na intervalu $(-1, 1)$, funkcija raste od lijeve granice prema tjemenu, a zatim pada. U točki $x = -1$ (koja nije u domeni, ali je rub) funkcija bi imala vrijednost -2 , a najveću vrijednost postiže u tjemenu.

$$A = \text{Im} f = \left(-2, \frac{1}{4}\right]$$

(b) Da bi funkcija bila bijekcija, osim što je surjektivna, mora biti i injekcija. Trebamo odabrati interval koji preslikavanjem daje cijeli skup A . Lijevi dio parabole (od ruba do tjemena, tj. $x \in (-1, \frac{1}{2})$) pokriva sve vrijednosti od -2 do $1/4$. Nadalje, f je strogo rastuća na tom intervalu što osigurava injektivnost.

$$B = \left(-1, \frac{1}{2}\right]$$



Napomena. Studentima koji su dobili $A = (-2, \frac{1}{4})$ i $B = (-1, \frac{1}{2})$ kao rješenje (nisu dobro odredili desni rub tih skupova), a sve ostalo su dobro napravili je zadatak bodovan sa $1.5/2$.

2. (1) Odredite sve $x \in \mathbb{R}$ za koje vrijedi

$$\frac{x^2 - 2x - 2}{x^2 - x - 6} > 1.$$

Rješenje:

Prebacimo 1 na lijevu stranu:

$$\frac{x^2 - 2x - 2}{x^2 - x - 6} - 1 > 0 \implies \frac{x^2 - 2x - 2 - (x^2 - x - 6)}{x^2 - x - 6} > 0$$

$$\frac{4 - x}{(x - 3)(x + 2)} > 0$$

Nultočke brojnika i nazivnika su 4, 3, -2. Tablica predznaka:

Interval	$(-\infty, -2)$	$(-2, 3)$	$(3, 4)$	$(4, +\infty)$
$4 - x$	+	+	+	-
$x - 3$	-	-	+	+
$x + 2$	-	+	+	+
Izraz	+	-	+	-

Rješenje je unija intervala gdje je ukupan izraz pozitivan:

$$x \in (-\infty, -2) \cup (3, 4)$$

Napomena. Studenti koji su dobili $x \in (-\infty, -2) \cup (3, 4]$ kao rješenje su tu izgubili 0.5 bodova.

3. (1) Riješite

$$\log_2(x^2) \cdot \log_4(x) + \log_2(8x) = 9.$$

Rješenje:

Uvjet: $x > 0$. Koristimo svojstva logaritama: $\log_2(x^2) = 2 \log_2 x$, $\log_4 x = \frac{1}{2} \log_2 x$, $\log_2(8x) = 3 + \log_2 x$. Jednadžba postaje

$$(2 \log_2 x) \cdot \left(\frac{1}{2} \log_2 x \right) + 3 + \log_2 x = 9 \implies (\log_2 x)^2 + \log_2 x - 6 = 0.$$

Uz supstituciju $t = \log_2 x$, rješavamo $t^2 + t - 6 = 0$. Rješenja su $t_1 = -3$, $t_2 = 2$.

$$\log_2 x = -3 \implies x_1 = \frac{1}{8}, \quad \log_2 x = 2 \implies x_2 = 4$$

Oba rješenja zadovoljavaju uvjet.

$$x \in \left\{ \frac{1}{8}, 4 \right\}$$

4. (1) Odredite sva rješenja sljedeće jednadžbe:

$$\cos(2x) + 3 \sin(x) - 2 = 0.$$

Rješenje:

Koristimo identitet $\cos(2x) = 1 - 2 \sin^2 x$:

$$1 - 2 \sin^2 x + 3 \sin x - 2 = 0 \implies 2 \sin^2 x - 3 \sin x + 1 = 0$$

Supstitucija $u = \sin x$ daje $2u^2 - 3u + 1 = 0$ s rješenjima $u_1 = 1$, $u_2 = \frac{1}{2}$.

$$1) \quad \sin x = 1 \implies x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi,$$

$$2) \quad \sin x = \frac{1}{2} \implies x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \quad \text{ili} \quad x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi.$$

$$x \in \left\{ \frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{6} + 2k\pi, \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$$

Napomena. Studenti koji nisu pronašli rješenje $\frac{5\pi}{6} + 2k\pi$ su tu izgubili 0.5 bodova.