

MATEMATIKA 1 – druga zadaća
2025./2026.

1. (1) Odredite jednadžbu tangente na graf funkcije $f(x) = \operatorname{arctg}(e^x)$ u točki s apscisom $x_0 = 0$.

Rješenje:

Prvo računamo vrijednost funkcije u $x_0 = 0$:

$$f(0) = \operatorname{arctg}(e^0) = \operatorname{arctg}(1) = \frac{\pi}{4}.$$

Zatim računamo derivaciju funkcije:

$$f'(x) = \frac{1}{1 + (e^x)^2} \cdot (e^x)' = \frac{e^x}{1 + e^{2x}}.$$

Koeficijent smjera tangente je vrijednost derivacije u x_0 :

$$k = f'(0) = \frac{e^0}{1 + e^0} = \frac{1}{2}.$$

Jednadžba tangente glasi $y - y_0 = k(x - x_0)$, pa nakon uvrštavanja imamo:

$$\boxed{y = \frac{1}{2}x + \frac{\pi}{4}}$$

2. (2) Izračunajte sljedeće integrale:

(a) $\int_0^1 (1 - 2x)e^{-x} dx$

Koristimo parcijalnu integraciju: $u = 1 - 2x \implies du = -2 dx$, $dv = e^{-x} dx \implies v = -e^{-x}$.

$$\begin{aligned} I &= \left[-(1 - 2x)e^{-x} \right]_0^1 - \int_0^1 (-e^{-x})(-2) dx \\ &= \left[-(1 - 2)e^{-1} - (-(1 - 0)e^0) \right] - 2 \int_0^1 e^{-x} dx \\ &= (e^{-1} + 1) - 2 \left[-e^{-x} \right]_0^1 \\ &= \frac{1}{e} + 1 - 2(-e^{-1} + 1) = \boxed{\frac{3}{e} - 1}. \end{aligned}$$

(b) $\int \frac{3x}{x^2 - x - 2} dx$

Rastavljamo na parcijalne razlomke. Nazivnik je $(x-2)(x+1)$.

$$\frac{3x}{(x-2)(x+1)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+1}$$

Množenjem s nazivnikom dobivamo $3x = A(x+1) + B(x-2) = (A+B)x + (A-2B)$. Kad izjednačimo koeficijente, dobijemo $3 = A+B$ i $0 = A-2B$, što daje $A=2$ i $B=1$.

$$\int \left(\frac{2}{x-2} + \frac{1}{x+1} \right) dx = \boxed{2 \ln |x-2| + \ln |x+1| + C}.$$

$$(c) \int \frac{\arctg(x)}{(1+x^2)^{3/2}} dx$$

Uvodimo supstituciju $x = \operatorname{tg} t \implies dx = \frac{1}{\cos^2 t} dt$. Tada je $1+x^2 = \frac{1}{\cos^2 t}$ i $\arctg x = t$.

$$\int \frac{t}{\left(\frac{1}{\cos^2 t}\right)^{3/2} \cos^2 t} dt = \int t \cos t dt.$$

Parcijalna integracija: $u = t, dv = \cos t dt \implies du = dt, v = \sin t$.

$$= t \sin t - \int \sin t dt = t \sin t + \cos t + C.$$

Vraćanjem supstitucije ($\sin t = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}, \cos t = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$) dobivamo

$$\boxed{\frac{x \arctg x}{\sqrt{1+x^2}} + \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} + C}$$

$$(d) \int_0^1 x^3 e^{x^2} dx$$

Supstitucija $t = x^2 \implies dt = 2x dx$. Granice: $0 \rightarrow 0, 1 \rightarrow 1$.

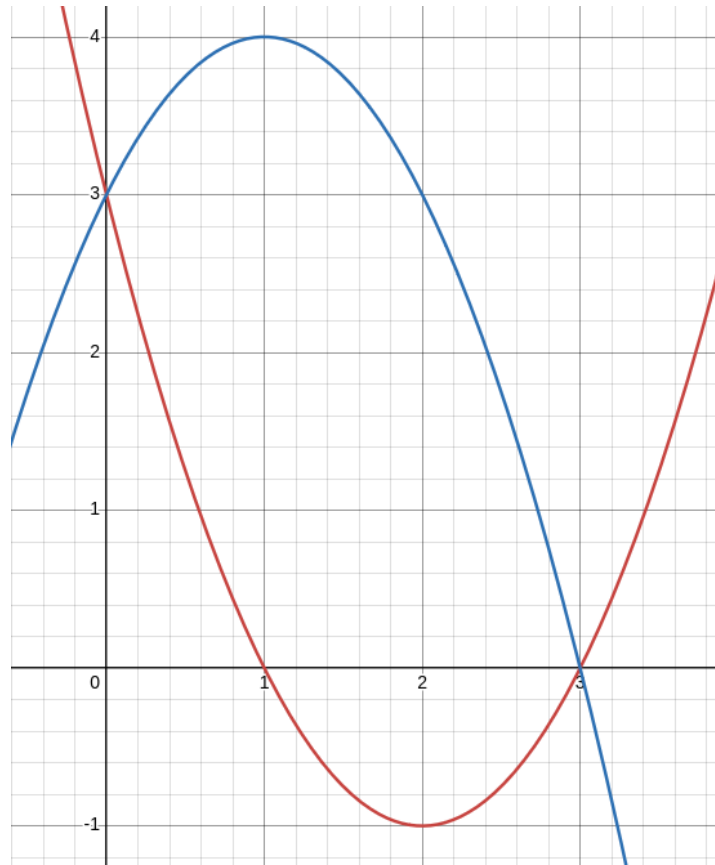
$$\frac{1}{2} \int_0^1 t e^t dt = \frac{1}{2} \left([te^t]_0^1 - \int_0^1 e^t dt \right) = \frac{1}{2} (e - [e^t]_0^1) = \boxed{\frac{1}{2}}.$$

3. (2) Skicirajte dio ravnine omeđen grafovima funkcija $f(x) = x^2 - 4x + 3$ i $g(x) = -x^2 + 2x + 3$ i izračunajte njegovu površinu.

Rješenje:

Presjek krivulja: $2x^2 - 6x = 0 \implies x_1 = 0, x_2 = 3$. Na intervalu $(0, 3)$, $g(x) \geq f(x)$.

$$P = \int_0^3 (g(x) - f(x)) dx = \int_0^3 (-2x^2 + 6x) dx = \left[-\frac{2}{3}x^3 + 3x^2 \right]_0^3 = \boxed{9}.$$



MATEMATIKA 1 – treća zadaća
2025./2026.

1. (1.5) Izračunajte sljedeće limese:

(a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3 - x + 4}{3x^3 + 5x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 - \frac{1}{x^2} + \frac{4}{x^3}}{3 + \frac{5}{x} - \frac{1}{x^3}} = \boxed{\frac{2}{3}}.$

(b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - x - 1}{x^2} \stackrel{L'H}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{2x} \stackrel{L'H}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x}{2} = \boxed{\frac{1}{2}}.$

(c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{1 + e^{\frac{1}{x}}}$. Lijevi limes ($x \rightarrow 0^-$): $\frac{1}{x} \rightarrow -\infty \implies e^{1/x} \rightarrow 0$, pa je limes $\frac{1}{1+0} = 1$. Desni limes ($x \rightarrow 0^+$): $\frac{1}{x} \rightarrow +\infty \implies e^{1/x} \rightarrow +\infty$, pa je limes 0. Budući da se lijevi i desni limes razlikuju, limes ne postoji.

2. (3.5) Detaljno ispitajte tok funkcije $f(x) = \frac{x^2}{x^2-4}$.

Rješenje:

(a) **Domena:** $x^2 - 4 \neq 0 \implies \boxed{\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}}.$

(b) **Parnost:** $f(-x) = f(x)$, funkcija je parna.

(c) **Nultočke:** $f(x) = 0 \implies x^2 = 0 \implies \boxed{x = 0}$ (točka $T(0, 0)$).

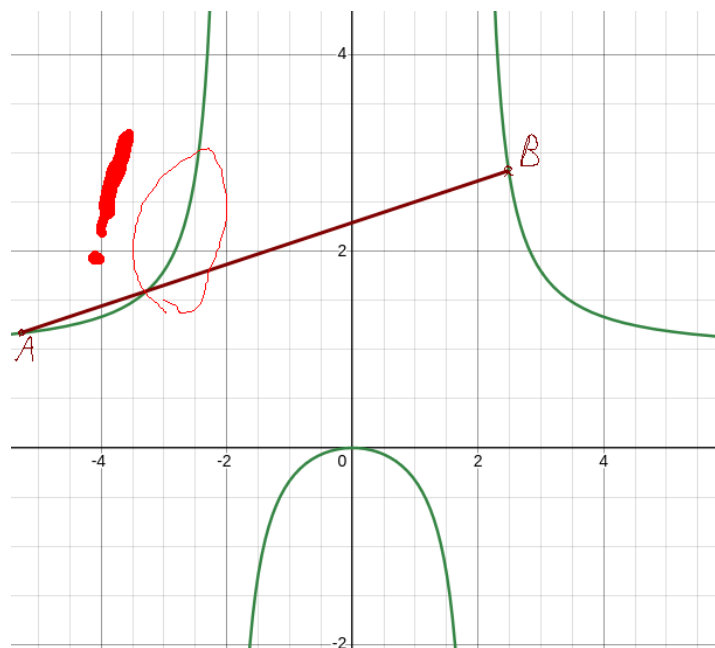
(d) **Ekstremi i monotonost:** $f'(x) = \frac{-8x}{(x^2-4)^2}$. Funkcija raste na intervalima $(-\infty, -2)$ i $(-2, 0)$ (tu imamo $f'(x) > 0$), a pada na intervalima $(0, 2)$ i $(2, +\infty)$ (gdje je $f'(x) < 0$). Lokalni maksimum u $T(0, 0)$.

(e) **Konveksnost i konkavnost:** $f''(x) = \frac{8(3x^2+4)}{(x^2-4)^3}$. Uočimo da je izraz $\frac{8(3x^2+4)}{(x^2-4)^2} > 0$, pa $f''(x)$ uvijek ima isti predznak kao $x^2 - 4$. Iz toga zaključujemo:

Funkcija je konveksna na $(-\infty, -2)$ i $(2, +\infty)$ (tu imamo $f''(x) > 0$), a konkavna na $(-2, 2)$. (gdje vrijedi $f''(x) < 0$)

(f) **Asimptote:** Vertikalne: $x = -2, x = 2$. Horizontalna: $y = 1$.

Napomena. Važno je uočiti razliku između unije intervala i nabiranja intervala. Primjerice $f(x) = \frac{x^2}{x^2-4}$ je konveksna na $(-\infty, -2)$, te je također konveksna na $(2, \infty)$. Ali **nije konveksna na skupu** $(-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$. To možemo uočiti geometrijski:



Dakle ako kao na slici izaberemo dvije točke A, B iz grafa Γ_f za $x \in (-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$, vidimo da graf nije ispod dužine koja je određena s A i B (a to je geometrijski kriterij za konveksnost).

Slično vrijedi da je f rastuća na intervalima $(-\infty, -2)$ i $(-2, 0)$, ali **nije rastuća na** $(-\infty, -2) \cup (-2, 0)$. Primjerice, imamo $f(-3) = 1.8$ i $f(-1) = -0.333\dots$. Vidimo da ne vrijedi $f(-3) < f(-1)$ pa funkcija nije rastuća.

Pogrešno navođenje intervala rasta i konveksnosti s unijom $\cup$ umjesto nabranjanjem intervala je kažnjeno oduzimanjem bodova u ovom zadatku (većina studenata je napravila ovu grešku pa je 4/5 čest rezultat).

Navodimo i točnu verziju kriterija za rastućost/ konveksnost:

- (a) Neka je $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ funkcija takva da $f'(x) > 0 \forall x \in I$ gdje je $I \subseteq D$ interval. Tada je f rastuća na I .
- (b) Neka je $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ funkcija takva da $f''(x) > 0 \forall x \in I$ gdje je $I \subseteq D$ interval. Tada je f konveksna na I .

Dakle ovi kriteriji se mogu primijeniti samo na dijelu domene koji je neprekinut interval. Primjerice, imali smo $D := \mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}$ te $f'(x) > 0$ za $x \in (-\infty, -2) \cup (-2, 0)$. Ali $(-\infty, -2) \cup (-2, 0)$ nije interval stoga je navedeni kriterij za rastućost neprimjenjiv (i zato je krivo zaključiti da je f rastuća na $(-\infty, -2) \cup (-2, 0)$).

MATEMATIKA 1 – četvrta zadaća
2025./2026.

1. (2) Zadani su vektori $\vec{a} = [2, -1, 3]$ i $\vec{b} = [1, -2, -1]$.

Rješenje: Prvo: $\vec{a} \times \vec{b} = [7, 5, -3]$.

(a) $(\vec{a} + \vec{b}) \times (\vec{a} \times \vec{b}) = [3, -3, 2] \times [7, 5, -3] = \boxed{[-1, 23, 36]}.$

(b) $((\vec{a} - 2\vec{b}) \times \vec{b}) \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = |\vec{a} \times \vec{b}|^2 = \boxed{83}.$

2. (1) Odredite kanonski oblik jednadžbe ravnine π koja sadrži pravac $p(t) = (1 + t, -2t, 2 + t)$ i točku $T = (2, 1, 0)$.

Rješenje: Vektor smjera pravca p je $\vec{s} = [1, -2, 1]$, uočimo da je $\pi \parallel \vec{s}$ dakle $\vec{n}_\pi \perp \vec{s}$. Uočimo da za $t = 0$, imamo točku $P = (1, 0, 2)$ koja se nalazi na pravcu p , pa onda i u ravnini π . S obzirom da $T \in \pi$ također, slijedi $\overrightarrow{PT} = [1, 1, -2] \parallel \pi$, tj. $\overrightarrow{PT} \perp \vec{n}_\pi$. Računamo $\vec{s} \times \overrightarrow{PT} = [3, 3, 3] \sim [1, 1, 1]$. Dakle možemo izabrati $\vec{n}_\pi := [1, 1, 1]$ kao vektor normale za π . Kanonski oblik dobivamo iz jednadžbe

$$1(x - 2) + 1(y - 1) + 1(z - 0) = 0 \implies \boxed{x + y + z = 3}.$$

3. (2)

- (a) Odredite točku T koja je presjek ravnina

$$\pi_1 \dots 2x + y - z = -3, \quad \pi_2 \dots x - 3y + z = 10 \quad \text{i} \quad \pi_3 \dots -x + 2y + 2z = 1.$$

Rješenje:

Imamo sustav tri jednadžbe s tri nepoznanice:

$$2x + y - z = -3 \tag{I}$$

$$x - 3y + z = 10 \tag{II}$$

$$-x + 2y + 2z = 1 \tag{III}$$

Zbrajanjem jednadžbi (II) i (III) eliminiramo varijablu x :

$$(x - 3y + z) + (-x + 2y + 2z) = 10 + 1 \implies -y + 3z = 11 \implies y = 3z - 11.$$

Sada izrazimo x iz jednadžbe (II) koristeći dobiveni izraz za y :

$$x = 10 + 3y - z = 10 + 3(3z - 11) - z = 10 + 9z - 33 - z = 8z - 23.$$

Uvrstimo izraze za x i y u jednadžbu (I):

$$2(8z - 23) + (3z - 11) - z = -3$$

$$16z - 46 + 3z - 11 - z = -3$$

$$18z - 57 = -3 \implies 18z = 54 \implies z = 3.$$

Vraćanjem u supstitucije dobivamo koordinate x i y :

$$y = 3(3) - 11 = -2, \quad x = 8(3) - 23 = 1.$$

Tražena točka je $\boxed{T(1, -2, 3)}$.

- (b) Odredite kanonski oblik jednadžbe pravca p koji prolazi točkom T i ortogonalan je na ravninu $3x - 2y + 5z = 4$.

Rješenje:

Budući da je pravac p ortogonalan na zadanu ravninu, njegov vektor smjera $\vec{s}$ mora biti kolinearan s vektorom normale te ravnine. Vektor normale ravnine je $\vec{n} = [3, -2, 5]$, pa uzimamo $\vec{s} = [3, -2, 5]$. Pravac prolazi točkom $T(1, -2, 3)$, pa mu kanonski oblik glasi:

$$\boxed{\frac{x-1}{3} = \frac{y+2}{-2} = \frac{z-3}{5}}$$

Marin Varivoda