

MATEMATIČKA ANALIZA 1

Pismeni ispit - 4. rok – 7. rujna 2026.

- Dozvoljeno je koristiti samo pribor za pisanje i brisanje. Dozvoljeno je pozvati se na sljedeće limese:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1.$$
$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^p}{e^{ax}} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x^p} = 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n}{n!} = 0, \quad p, a > 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = e^x, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Zadatak 1. (ukupno 25 bodova)

- (a) (15 bodova) Dana je funkcija zadana formulom

$$f(x) = \arccos \left(2^{-x^2+2x-1} \right).$$

Odredite prirodnu domenu $\mathcal{D}_f$ i sliku $\mathcal{R}_f$ funkcije f . Zatim odredite najveći interval $I \subseteq \mathcal{D}_f$ koji sadrži točku 2 takav da je $f|_I$ injekcija te odredite $f|_I^{-1}$.

- (b) (10 bodova) Postoji li funkcija $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ koja *nije* injekcija, a takva da je za svaki interval $I \subseteq \mathbb{R}$ duljine 1 restrikcija $g|_I$ injekcija?

Rješenje.

- (a) Nadopunjavanjem do potpunog kvadrata dobivamo $-x^2 + 2x - 1 = -(x-1)^2$, pa je

$$f(x) = \arccos \left(2^{-(x-1)^2} \right).$$

Zapišimo f kao kompoziciju $f = g_3 \circ g_2 \circ g_1$, gdje je

$$g_1(x) = -(x-1)^2, \quad g_2(u) = 2^u, \quad g_3(v) = \arccos v.$$

Domena. Funkcija g_1 definirana je na cijelom $\mathbb{R}$, a g_2 na cijelom $\mathbb{R}$, pa je jedini uvjet $g_2(g_1(x)) \in [-1, 1] = \mathcal{D}(\arccos)$. Kako je $-(x-1)^2 \leq 0$ i kako je $u \mapsto 2^u$ strogo rastuća, vrijedi

$$0 < 2^{-(x-1)^2} \leq 2^0 = 1,$$

dakle $g_2(g_1(x)) \in \langle 0, 1 \rangle \subseteq [-1, 1]$ za svaki $x \in \mathbb{R}$. Zaključujemo $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$.

Slika. Računamo sliku „sloj po sloj“:

$$g_1(\mathbb{R}) = \langle -\infty, 0 \rangle, \quad g_2(\langle -\infty, 0 \rangle) = \langle 0, 1 \rangle, \quad g_3(\langle 0, 1 \rangle) = \left[0, \frac{\pi}{2} \right),$$

pri čemu smo koristili da je g_2 strogo rastuća bijekcija s $\langle -\infty, 0 \rangle$ na $\langle 0, 1 \rangle$, a g_3 strogo padajuća bijekcija s $[-1, 1]$ na $[0, \pi]$ (pa se rubovi zamjenjuju: $\arccos 1 = 0$, $\arccos 0 = \frac{\pi}{2}$). Dakle

$$\mathcal{R}_f = \left[0, \frac{\pi}{2} \right).$$

f nije injekcija. Za svaki $x \in \mathbb{R}$ vrijedi $g_1(2-x) = -(1-x)^2 = -(x-1)^2 = g_1(x)$, pa je $f(2-x) = f(x)$. Posebno, $f(0) = f(2)$, a $0 \neq 2$.

Interval I . Tvrdimo da je $I = [1, +\infty)$. Na tom intervalu je $x \mapsto (x-1)^2$ strogo rastuća, pa je g_1 strogo padajuća; g_2 je strogo rastuća, a g_3 strogo padajuća. Dakle $f|_{[1, +\infty)} = g_3 \circ g_2 \circ g_1|_{[1, +\infty)}$ je strogo rastuća, dakle injekcija, i sadrži točku 2.

Neka je sada I interval koji sadrži 2 i neku točku $x_0 < 1$. Tada je $[x_0, 2] \subseteq I$. Stavimo $\delta := \min\{1 - x_0, 1\} > 0$. Tada je $1 - \delta \geq x_0$ i $1 + \delta \leq 2$, pa su $1 - \delta, 1 + \delta \in [x_0, 2] \subseteq I$. Kako je $f(1 - \delta) = f(1 + \delta)$ i $1 - \delta \neq 1 + \delta$, restrikcija $f|_I$ nije injekcija. Dakle $I = [1, +\infty)$ je najveći traženi interval.

Inverz. Promotrimo restrikcije komponentnih funkcija

$$\begin{aligned} g_1|_I : [1, +\infty) &\rightarrow \langle -\infty, 0], & g_1(x) &= -(x-1)^2, \\ g_2 : \langle -\infty, 0] &\rightarrow \langle 0, 1], & g_2(u) &= 2^u, \\ g_3 : \langle 0, 1] &\rightarrow \left[0, \frac{\pi}{2}\right), & g_3(v) &= \arccos v. \end{aligned}$$

Sve tri su bijekcije (prva je strogo padajuća sa slikom $\langle -\infty, 0]$, a druge dvije su restrikcije bijekcija $u \mapsto 2^u$, odnosno $\arccos$), pa je i $f|_I = g_3 \circ g_2 \circ g_1|_I$ bijekcija kao kompozicija bijekcija te vrijedi

$$f|_I^{-1} = (g_3 \circ g_2 \circ g_1|_I)^{-1} = (g_1|_I)^{-1} \circ g_2^{-1} \circ g_3^{-1}.$$

Odredimo inverze pojedinih komponenti.

- $g_3^{-1} : [0, \frac{\pi}{2}) \rightarrow \langle 0, 1]$, $g_3^{-1}(y) = \cos y$.
- $g_2^{-1} : \langle 0, 1] \rightarrow \langle -\infty, 0]$, $g_2^{-1}(v) = \log_2 v$.
- $(g_1|_I)^{-1} : \langle -\infty, 0] \rightarrow [1, +\infty)$: iz $u = -(x-1)^2$ slijedi $(x-1)^2 = -u$, tj. $|x-1| = \sqrt{-u}$, a zbog $x \geq 1$ je $|x-1| = x-1$, pa je

$$(g_1|_I)^{-1}(u) = 1 + \sqrt{-u}.$$

Konačno, za $y \in [0, \frac{\pi}{2})$ dobivamo

$$f|_I^{-1}(y) = (g_1|_I)^{-1} \left(g_2^{-1} (g_3^{-1}(y)) \right) = (g_1|_I)^{-1} (\log_2(\cos y)) = 1 + \sqrt{-\log_2(\cos y)}.$$

(Izraz ima smisla: za $y \in [0, \frac{\pi}{2})$ je $\cos y \in \langle 0, 1]$, pa je $\log_2(\cos y) \leq 0$. Provjera: $f|_I^{-1}(0) = 1 + \sqrt{-\log_2 1} = 1$.)

(b) Postoji. Promotrimo funkciju

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} x, & x \neq 10, \\ 0, & x = 10. \end{cases}$$

Funkcija f nije injekcija jer je $f(0) = f(10) = 0$, a $0 \neq 10$.

Pretpostavimo sada da postoje interval I duljine 1 te $a, b \in I$ takvi da je $a \neq b$ i $f(a) = f(b)$. Kako postoji samo jedan $x \in \mathbb{R}$ za koji ne vrijedi jednakost $f(x) = x$ (naime $x = 10$), barem jedna od jednakosti $f(a) = a$ i $f(b) = b$ mora vrijediti. Bez smanjenja općenitosti pretpostavimo da je $f(b) = b$. Tada je

$$f(a) = f(b) = b \neq a,$$

pa je $f(a) \neq a$, a to je moguće samo za $a = 10$. Sada iz $b = f(a) = f(10) = 0$ slijedi $b = 0$.

Međutim, za svake dvije točke a, b intervala duljine 1 vrijedi $|a - b| \leq 1$, dok je u našem slučaju $|a - b| = |10 - 0| = 10 > 1$, što je kontradikcija. Dakle, $f|_I$ je injekcija za svaki interval I duljine 1, a f nije injekcija.

Zadatak 2. (ukupno 25 bodova)

(a) (12 bodova) Niz (a_n) zadan je rekurzivno formulama

$$a_1 = 1, \quad a_{n+1} = \frac{3a_n + 4}{a_n + 3}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Dokažite da niz (a_n) konvergira i odredite njegov limes.

(b) (13 bodova) Odredite sva gomilišta niza (x_n) zadanog formulom

$$x_n = \sin^2\left(\frac{n\pi}{2}\right) \left(1 + \frac{2}{n+1}\right)^{n-1} + \cos^2\left(\frac{n\pi}{2}\right) \sqrt[n]{2^n + 2 \cdot 3^n}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Rješenje.

(a) Najprije ćemo dokazati da za svaki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi $1 \leq a_n < 2$. Tvrdnja vrijedi za $n = 1$. Pretpostavimo da je $1 \leq a_n < 2$. Budući da je $a_n + 3 > 0$, imamo

$$\begin{aligned} a_{n+1} - 1 &= \frac{3a_n + 4}{a_n + 3} - 1 = \frac{2a_n + 1}{a_n + 3} > 0, \\ 2 - a_{n+1} &= 2 - \frac{3a_n + 4}{a_n + 3} = \frac{2 - a_n}{a_n + 3} > 0. \end{aligned}$$

Time je induksijski korak dokazan, pa je niz odozgo omeđen brojem 2. Za svaki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$a_{n+1} - a_n = \frac{3a_n + 4}{a_n + 3} - a_n = \frac{4 - a_n^2}{a_n + 3} > 0,$$

jer je $1 \leq a_n < 2$. Dakle, (a_n) je rastući i odozgo omeđen niz, pa konvergira. Označimo njegov limes s L . Iz $1 \leq a_n < 2$ slijedi $L \in [1, 2]$. Prelaskom na limes u rekurziji iz zadatka dobivamo

$$L = \frac{3L + 4}{L + 3}, \quad L^2 = 4.$$

Budući da je $L \in [1, 2]$, zaključujemo da je

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 2.$$

(b) Ako je n neparan, tada je $\sin^2(n\pi/2) = 1$ i $\cos^2(n\pi/2) = 0$, pa se formula iz teksta zadatka svodi na

$$x_n = \left(1 + \frac{2}{n+1}\right)^{n-1}.$$

Iz teorema

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = e^x, \quad x \in \mathbb{R},$$

primijenjenog za $x = 2$ slijedi

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{n+1}\right)^{n+1} = e^2.$$

Za neparni podniz zato imamo

$$\begin{aligned} \lim_{j \rightarrow \infty} x_{2j-1} &= \lim_{j \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{2}{2j}\right)^{2j} \right]^{\frac{2j-2}{2j}} \\ &= (e^2)^1 = e^2. \end{aligned}$$

Ako je n paran, tada je $\sin^2(n\pi/2) = 0$ i $\cos^2(n\pi/2) = 1$, pa vrijedi

$$x_n = \sqrt[n]{2^n + 2 \cdot 3^n} = 3 \sqrt[n]{\left(\frac{2}{3}\right)^n + 2}.$$

Kako je $0 < (2/3)^n \leq 1$, za svaki paran n imamo

$$3 \sqrt[n]{2} \leq x_n \leq 3 \sqrt[n]{3}.$$

Vrijedi

$$\lim_{j \rightarrow \infty} 3 \sqrt[2j]{2} = 3 = \lim_{j \rightarrow \infty} 3 \sqrt[2j]{3}.$$

Stoga iz teorema o sendviču slijedi

$$\lim_{j \rightarrow \infty} x_{2j} = 3.$$

Svaki podniz niza (x_n) koji sadrži beskonačno mnogo parnih ili beskonačno mnogo neparnih indeksa ima podniz koji konvergira prema 3, odnosno prema e^2 . Ako je početni podniz konvergentan, svi njegovi podnizovi imaju isti limes, pa drugih gomilišta nema. Skup svih gomilišta stoga je $\{3, e^2\}$.

Zadatak 3. (ukupno 25 bodova)

(a) (10 bodova) Neka je $A \subseteq \mathbb{R}$ neprazan i omeđen skup. Dokažite da vrijedi

$$\sup\{|x - y| : x, y \in A\} = \sup A - \inf A.$$

(b) (15 bodova) Neka su

$$A = \left\{ \frac{n-m}{n+m} + \frac{1}{k} : n, m, k \in \mathbb{N} \right\}, \quad S = \{|x - y| : x, y \in A\}.$$

Odredite infimum i supremum skupa S . Ima li skup S minimum, odnosno maksimum?

Tvrdnju iz dijela (a) smijete koristiti i ako je niste dokazali.

Rješenje.

(a) Označimo

$$\alpha = \inf A, \quad \beta = \sup A, \quad D = \{|x - y| : x, y \in A\}.$$

Za sve $x, y \in A$ vrijedi $\alpha \leq x, y \leq \beta$, pa je

$$-(\beta - \alpha) \leq x - y \leq \beta - \alpha.$$

Stoga je $|x - y| \leq \beta - \alpha$, što pokazuje da je $\beta - \alpha$ gornja međa skupa D .

Neka je $\varepsilon > 0$. Po karakterizaciji supremuma i infimuma postoje $x_\varepsilon, y_\varepsilon \in A$ takvi da vrijedi

$$\beta - \frac{\varepsilon}{2} < x_\varepsilon \leq \beta, \quad \alpha \leq y_\varepsilon < \alpha + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Iz toga slijedi

$$|x_\varepsilon - y_\varepsilon| \geq x_\varepsilon - y_\varepsilon > \beta - \alpha - \varepsilon.$$

Dakle, elementi skupa D mogu se proizvoljno približiti njegovoj gornjoj međi $\beta - \alpha$. Prema karakterizaciji supremuma vrijedi

$$\sup D = \beta - \alpha = \sup A - \inf A.$$

(b) Najprije ćemo odrediti infimum i supremum pomoćnog skupa A . Za sve $n, m, k \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$-1 < \frac{n-m}{n+m} < 1, \quad 0 < \frac{1}{k} \leq 1. \quad (1)$$

Prema tome, svaki $a \in A$ zadovoljava $-1 < a < 2$, pa je -1 donja, a 2 gornja međa skupa A .

Za aproksimaciju donje međe uzmimo $n = 1$ i $m = k = j$. Tada

$$a_j = \frac{1-j}{1+j} + \frac{1}{j}, \quad \lim_{j \rightarrow \infty} a_j = -1.$$

Zato je $\inf A = -1$. Za aproksimaciju gornje međe uzmimo $m = k = 1$. Tada

$$b_n = \frac{n-1}{n+1} + 1, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 2.$$

Stoga je $\sup A = 2$. Primjenom rezultata iz dijela (a) dobivamo

$$\sup S = \sup A - \inf A = 2 - (-1) = 3.$$

Budući da je svaki element skupa S nenegativan i da za svaki $x \in A$ vrijedi $|x - x| = 0 \in S$, imamo

$$\inf S = \min S = 0.$$

Preostaje ispitati postoji li maksimum. Iz strogih nejednakosti u (1) slijedi $A \subset (-1, 2)$. Zato za sve $x, y \in A$ vrijedi

$$|x - y| < 3.$$

Dakle, $3 \notin S$. Budući da je $\sup S = 3$, skup S nema maksimum.

Zadatak 4. (ukupno 25 bodova)

(a) (15 bodova) Odredite postoji li limes i, ako postoji, izračunajte ga:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + 2 \sin^2 x)}{1 - \cos x}.$$

(b) (10 bodova) Neka je $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ funkcija neprekidna u točki 0 takva da za svaki $x \in \mathbb{R}$ vrijedi

$$f(2x) = f(x).$$

Dokažite da je f konstantna.

Rješenje.

(a) Limes postoji i jednak je 4. Za $0 < |x| < \pi$ vrijedi $\sin x \neq 0$, pa je i $2 \sin^2 x \neq 0$, te za takve x možemo pisati

$$\frac{\ln(1 + 2 \sin^2 x)}{1 - \cos x} = \underbrace{\frac{\ln(1 + 2 \sin^2 x)}{2 \sin^2 x}}_{=:A(x)} \cdot \underbrace{2 \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2}_{=:B(x)} \cdot \underbrace{\frac{x^2}{1 - \cos x}}_{=:C(x)}.$$

Računamo limese pojedinih faktora.

Uz supstituciju $t = 2 \sin^2 x$ (pri čemu $t \rightarrow 0$ kad $x \rightarrow 0$ te je $t \neq 0$ za $0 < |x| < \pi$) i tablični limes $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\ln(1+t)}{t} = 1$ dobivamo $\lim_{x \rightarrow 0} A(x) = 1$.

Iz $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ i teorema o limesu produkta slijedi $\lim_{x \rightarrow 0} B(x) = 2$.

Iz $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$ i teorema o limesu kvocijenta (limes nazivnika je različit od nule) slijedi $\lim_{x \rightarrow 0} C(x) = 2$.

Konačno, po teoremu o limesu produkta,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + 2 \sin^2 x)}{1 - \cos x} = 1 \cdot 2 \cdot 2 = 4.$$

(b) Neka je $x \in \mathbb{R}$ proizvoljan. Primjenom pretpostavke na broj $\frac{x}{2}$ dobivamo

$$f(x) = f\left(2 \cdot \frac{x}{2}\right) = f\left(\frac{x}{2}\right).$$

Indukcijom po n slijedi

$$f(x) = f\left(\frac{x}{2^n}\right) \quad \text{za svaki } n \in \mathbb{N}.$$

Zaista, baza je upravo gornja jednakost, a ako tvrdnja vrijedi za n , tada je $f(x) = f\left(\frac{x}{2^n}\right) = f\left(\frac{x}{2^{n+1}}\right)$, gdje smo u drugoj jednakosti ponovno primijenili pretpostavku na broj $\frac{x}{2^{n+1}}$.

Promotrimo niz $x_n = \frac{x}{2^n}$. Kako je $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^n} = 0$, vrijedi $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$. Budući da je f neprekidna u 0, po karakterizaciji neprekidnosti pomoću nizova slijedi

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(0).$$

S druge strane, po dokazanom je $f(x_n) = f(x)$ za svaki $n \in \mathbb{N}$, tj. $(f(x_n))_n$ je konstantan niz s limesom $f(x)$. Zbog jedinstvenosti limesa niza zaključujemo

$$f(x) = f(0).$$

Kako je $x \in \mathbb{R}$ bio proizvoljan, f je konstantna funkcija (jednaka $f(0)$).