MATEMATIČKA ANALIZA 1

Prvi kolokvij – 19. studenog 2024.

Zadatak 1. *(ukupno 13 bodova)*

(a) Odredite prirodnu domenu funkcije zadane formulom

$$f(x) = \log\left(\operatorname{Arch}\frac{2x-1}{x+1}\right)$$

(b) Postoji li funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takva da joj je temeljni period $\sqrt{2}$? Dokažite ili opovrgnite.

Rješenje.

(a) Vrijedi da je $x \in \mathcal{D}(f)$ onda i samo onda kada su zadovoljeni svi od dolje navedenih uvjeta:

(i) $\operatorname{Arch}\frac{2x-1}{x+1} > 0$ (argument logaritma je pozitivan)

(ii) $\frac{2x-1}{x+1} \geq 1$ (domena Arch je $[1, \infty\rangle$)

(iii) $x \neq -1$ (nazivnik nije 0)

Raspišimo svaki od navedenih uvjeta:

(i) Slika funkcije Arch je $[0, \infty\rangle$, pa samo trebamo provjeriti za koje x je $\operatorname{Arch}\frac{2x-1}{x+1} = 0$. Računamo:

$$\begin{aligned} \operatorname{Arch}\frac{2x-1}{x+1} &= 0 \quad /ch \\ \frac{2x-1}{x+1} &= \operatorname{ch} 0 = 1 \end{aligned}$$

Zbog (v) je $x \neq -1$, pa iz domene funkcije f jedino moramo izbaciti 2, tj. $x \neq 2$.

(ii) Računamo: $\frac{2x-1}{x+1} - 1 = \frac{x-2}{x+1} \geq 0$. Sada je $x - 2 \geq 0$ i $x + 1 > 0$ ili $x - 2 \leq 0$ i $x + 1 < 0$, tj. $x \in \langle -\infty, -1\rangle \cup [2, \infty\rangle$

(iii) $x \neq -1$.

Konačno, prirodna domena dane funkcije je presjek svih navedenih uvjeta, tj.

$$\mathcal{D}(f) = \langle -\infty, -1\rangle \cup \langle 2, \infty\rangle.$$

(b) Postoji, npr. funkcija $f(x) = \sin(\frac{2\pi}{\sqrt{2}}x)$.

Naime, $f(x + \sqrt{2}) = \sin(\frac{2\pi}{\sqrt{2}}(x + \sqrt{2})) = \sin(\frac{2\pi}{\sqrt{2}}x + 2\pi) = \sin(\frac{2\pi}{\sqrt{2}}x)$,

pa je $\sqrt{2}$ period funkcije f.

Za svaki period τ funkcije f vrijedi da je $\sin(\frac{2\pi}{\sqrt{2}}(x + \tau)) = \sin(\frac{2\pi}{\sqrt{2}}x + \frac{2\pi\tau}{\sqrt{2}}) = \sin(\frac{2\pi}{\sqrt{2}}x)$, za svaki $x \in \mathbb{R}$.

Zato je $\frac{2\pi\tau}{\sqrt{2}} = 2k\pi$, tj. $\tau = k\sqrt{2}$, $k \in \mathbb{N}$.

Sada vidimo da je $\sqrt{2}$ zaista temeljni period.

MATEMATIČKA ANALIZA 1

Prvi kolokvij – 19. studenog 2024.

Zadatak 2. *(ukupno 12 bodova)* Funkcija $f : \langle -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle \to \mathbb{R}$ zadana je formulom

$$f(x) = \operatorname{ctg}(\pi(x^2 + |x| + \frac{1}{4})).$$

(a) Odredite sliku funkcije f.

(b) Pronađite najveći interval I na kojem je funkcija f injekcija, takav da sadrži točku $-\frac{1}{6}$.

(c) Pronađite inverz restrikcije funkcije f na interval I, tj.

$$f^{-1} : f(I) \to I.$$

Rješenje. Definirajmo funkcije

$$\begin{aligned}
g_1 &: \langle -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle \to [0, \frac{1}{2}\rangle, g_1(x) = |x|,\\
g_2 &: [0, \frac{1}{2}\rangle \to [\frac{1}{4}, 1\rangle, g_2(x) = (x + \frac{1}{2})^2\\
g_3 &: [\frac{1}{4}, 1\rangle \to \mathbb{R}, g_3(x) = ctg(\pi x).
\end{aligned}$$

Tada je $f = g_3 \circ g_2 \circ g_1$.

(a) Računamo:

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}(f) = f(\langle -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle) &= g_3(g_2(g_1(\langle -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle)))\\
&= g_3(g_2([0, \frac{1}{2}\rangle)) = g_3([\frac{1}{4}, 1\rangle) = \langle -\infty, 1].
\end{aligned}$$

(b) Tražimo interval $I \subseteq \langle -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle$ takav da je $-\frac{1}{6} \in I$ te je f injekcija na I.

Funkcija g_1 je strogo padajuća na $\langle -\frac{1}{2}, 0]$ i strogo rastuća na $[0, \frac{1}{2}\rangle$, pa je $I \subseteq \langle -\frac{1}{2}, 0]$.

Vrijedi: $g_1(I) \subseteq g_1(\langle -\frac{1}{2}, 0]) = [0, \frac{1}{2}\rangle$.

Funkcija g_2 je strogo rastuća na $[0, \frac{1}{2}\rangle$.

Vrijedi: $g_2([0, \frac{1}{2}\rangle = [\frac{1}{4}, 1\rangle$.

Funkcija g_3 je dobro definirana i strogo padajuća na $[\frac{1}{4}, 1\rangle$, pa je i injekcija.

Slijedi da je $I = \langle -\frac{1}{2}, 0]$.

(c) Računamo $f(I) = g_3(g_2(g_1(I))) = \langle -\infty, 1]$.

Neka je sada $y \in \langle -\infty, 1]$.

Računamo:

$$\begin{aligned}
f^{-1}(y) &= x \quad /f \\
y &= f(x) = ctg(\pi(x^2+|x|+\frac{1}{4})) \quad /\text{arcctg} \quad (\text{u redu jer } (\pi(x^2+|x|+\frac{1}{4})) \in \mathcal{R}(\text{arcctg})) \\
\text{arcctg}(y) &= \pi(x^2+|x|+\frac{1}{4}) \\
\frac{1}{\pi}\text{arcctg}(y) &= (|x|+\frac{1}{2})^2 = (-x+\frac{1}{2})^2 \\
-x+\frac{1}{2} &= \sqrt{\frac{1}{\pi}\text{arcctg } y} \quad (\text{pozitivan predznak zbog } x \in I) \\
x &= -\sqrt{\frac{1}{\pi}\text{arcctg } y}+\frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Dakle, $f^{-1}(y) = -\sqrt{\frac{1}{\pi}\text{arcctg } y}+\frac{1}{2}$.

MATEMATIČKA ANALIZA 1

Prvi kolokvij – 19. studenog 2024.

Zadatak 3. *(ukupno 13 bodova)*

(a) Zadana je funkcija

$$f\colon \mathbb{R} \to \langle 0, \infty\rangle, \quad f(x) = 2^{\sqrt[3]{7x+1}}.$$

Odredite $f([-4,1])$. Postoji li pravi podskup $A \subset \mathbb{R}$ takav da je $f|_A\colon A \to \langle 0,\infty\rangle$ surjekcija?

(b) Neka je $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funkcija takva da vrijedi sljedeće. Za svaku injekciju $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, funkcija

$$f + g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad (f+g)(x) = f(x) + g(x)$$

također je injekcija. Dokažite da je g konstantna funkcija.

Rješenje.

(a) Uočimo da je $f = f_3 \circ f_2 \circ f_1$, pri čemu definiramo funkcije

$$f_1\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f_1(x) = 7x + 1,$$

$$f_2\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f_2(x) = \sqrt[3]{x},$$

$$f_3\colon \mathbb{R} \to \langle 0,\infty\rangle, \quad f_3(x) = 2^x.$$

Dakle, imamo

$$f([-4,1]) = f_3(f_2(f_1([-4,1]))) = f_3(f_2([-27,8])) = f_3([-3,2]) = \left[\frac{1}{8}, 4\right].$$

Takav podskup A ne postoji. Naime, kako su funkcije f_1, f_2, f_3 injekcije, to je f također injekcija. Sada ako je $A \subseteq \mathbb{R}$ takav da je $f|_A\colon A \to \langle 0,\infty\rangle$ surjekcija, tada za svaki $x \in \mathbb{R}$ postoji $x' \in A$ takav da je $f(x') = f(x)$. Zbog injektivnosti funkcije f sada slijedi $x' = x$, dakle $x \in A$. Budući da je $x \in \mathbb{R}$ proizvoljan, slijedi $A = \mathbb{R}$.

(b) Pretpostavimo suprotno, tj. da postoje različiti $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ takvi da $g(x_1) \neq g(x_2)$. Neka je $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jedinstvena afina funkcija takva da $f(x_1) = -g(x_1)$ i $f(x_2) = -g(x_2)$, odnosno čiji je graf pravac određen točkama $(x_1, -g(x_1))$ i $(x_2, -g(x_2))$. Tada je f injekcija, no $(f+g)(x_1) = 0 = (f+g)(x_2)$ pa $f+g$ nije injekcija. Dakle, dobili smo kontradikciju s početnom pretpostavkom te je time tvrdnja dokazana.

Napomena. Naravno, postoji i mnogo drugih valjanih odabira za funkciju f, primjerice

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} x_2 + d & \text{ako } x = x_1 \\ x_1 & \text{ako } x = x_2 + d \\ x & \text{ako } x \notin \{x_1, x_2 + d\} \end{cases},$$

pri čemu označavamo $d = g(x_2) - g(x_1)$.

MATEMATIČKA ANALIZA 1

Prvi kolokvij – 19. studenog 2024.

Zadatak 4. *(ukupno 12 bodova)*

(a) Je li funkcija $f : [2, \infty) \to \mathbb{R}$ zadana s

$$f(x) = x + \frac{4}{x}$$

monotona?

(b) Postoji li strogo rastuća funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takva da je funkcija $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zadana s

$$g(x) = \sin(f(x)) \cos(f(x))$$

strogo padajuća?

Rješenje.

(a) Neka su $x, y \in [2, \infty)$ takvi da je $x < y$. Tada je

$$f(y) - f(x) = y + \frac{4}{y} - x - \frac{4}{x} = \underbrace{(y - x)}_{\geq 0} \cdot \frac{\overbrace{xy - 4}^{\geq 0}}{xy} \geq 0.$$

Dakle, f je rastuća.

(b) Primijetimo da je

$$g(x) = \frac{1}{2} \sin(2f(x))$$

pa vrijedi

$$g = f_2 \circ f_1 \circ f, \quad f_1(x) = 2x, \quad f_2(x) = \sin(x).$$

Funkcija f_1 je strogo rastuća na $\mathbb{R}$, a funkcija f_2 je strogo padajuća na $[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$. Ako nađemo strogo rastuću funkciju f za koju vrijedi $f_1 \circ f(\mathbb{R}) \subset [\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$, tada će vrijediti

$$g = f_2|_{[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]} \circ f_1 \circ f$$

pa će tada g biti strogo padajuća funkcija kao kompozicija funkcija u kojoj je neparan broj strogo padajućih funkcija.

Preostaje naći primjer strogo rastuće funkcije f takve da je $f_1 \circ f(\mathbb{R}) \subset [\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$, tj. $f(\mathbb{R}) \subset [\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}]$. Jedan primjer strogo rastuće funkcije na $\mathbb{R}$ čija je slika podskup nekog omeđenog intervala je $\operatorname{arctg} x$. Kako je $\operatorname{arctg}(\mathbb{R}) = (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, množenjem sa $\frac{1}{2}$ dobijemo interval $(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4})$ duljine $\frac{\pi}{2}$ pa ga je potrebno još pomaknuti za $\frac{\pi}{2}$ u pozitivnom smjeru. Dakle, funkcija

$$f(x) = \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2} \operatorname{arctg}(x)$$

je strogo rastuća i zadovoljava $f(\mathbb{R}) \subset [\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}]$. Za tu funkciju f je dana funkcija g strogo padajuća po prethodnom računu.

MATEMATIČKA ANALIZA 1

Prvi kolokvij – 19. studenog 2024.

Zadatak 1. *(ukupno 13 bodova)*

(a) Odredite prirodnu domenu funkcije zadane formulom

$$f(x) = \log\left(\operatorname{Arch}\frac{2x+1}{x-1}\right)$$

(b) Postoji li funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takva da joj je temeljni period $\sqrt{3}$? Dokažite ili opovrgnite.

Rješenje.

(a) Vrijedi da je $x \in \mathcal{D}(f)$ onda i samo onda kada su zadovoljeni svi od dolje navedenih uvjeta:

(i) $\operatorname{Arch}\frac{2x+1}{x-1} > 0$ (argument logaritma je pozitivan)

(ii) $\frac{2x+1}{x-1} \geq 1$ (domena Arch je $[1, \infty\rangle$)

(iii) $x \neq 1$ (nazivnik nije 0)

Raspišimo svaki od navedenih uvjeta:

(i) Slika funkcije Arch je $[0, \infty\rangle$, pa samo trebamo provjeriti za koje x je $\operatorname{Arch}\frac{2x+1}{x-1} = 0$. Računamo:

$$\begin{aligned}\operatorname{Arch}\frac{2x+1}{x-1} &= 0 \quad /ch\\ \frac{2x+1}{x-1} &= \operatorname{ch} 0 = 1\end{aligned}$$

Zbog (v) je $x \neq 1$, pa iz domene funkcije f jedino moramo izbaciti -2, tj. $x \neq -2$.

(ii) Računamo: $\frac{2x+1}{x-1} - 1 = \frac{x+2}{x-1} \geq 0$. Sada je $x+2 \geq 0$ i $x-1 > 0$ ili $x+2 \leq 0$ i $x-1 < 0$, tj. $x \in \langle -\infty, -2] \cup \langle 1, \infty\rangle$

(iii) $x \neq -1$.

Konačno, prirodna domena dane funkcije je presjek svih navedenih uvjeta, tj.

$$\mathcal{D}(f) = \langle -\infty, -2\rangle \cup \langle 1, \infty\rangle$$

(b) Postoji, npr. funkcija $f(x) = \sin(\frac{2\pi}{\sqrt{3}}x)$.

Naime, $f(x+\sqrt{3}) = \sin(\frac{2\pi}{\sqrt{3}}(x+\sqrt{3})) = \sin(\frac{2\pi}{\sqrt{3}}x + 2\pi) = \sin(\frac{2\pi}{\sqrt{3}}x)$,

pa je $\sqrt{3}$ period funkcije f.

Za svaki period τ funkcije f vrijedi da je $\sin(\frac{2\pi}{\sqrt{3}}(x+\tau)) = \sin(\frac{2\pi}{\sqrt{3}}x + \frac{2\pi\tau}{\sqrt{3}}) = \sin(\frac{2\pi}{\sqrt{3}}x)$, za svaki $x \in \mathbb{R}$.

Zato je $\frac{2\pi\tau}{\sqrt{3}} = 2k\pi$, tj. $\tau = k\sqrt{3}$, $k \in \mathbb{N}$.

Sada vidimo da je $\sqrt{3}$ zaista temeljni period.

MATEMATIČKA ANALIZA 1

Prvi kolokvij – 19. studenog 2024.

Zadatak 2. *(ukupno 12 bodova)* Funkcija $f : \langle -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \rangle \to \mathbb{R}$ zadana je formulom

$$f(x) = \operatorname{ctg}(\pi(x^2 + |x| + \frac{1}{4})).$$

(a) Odredite sliku funkcije f.

(b) Pronađite najveći interval I na kojem je funkcija f injekcija, takav da sadrži točku $\frac{1}{4}$.

(c) Pronađite inverz restrikcije funkcije f na interval I, tj.

$$f^{-1} : f(I) \to I.$$

Rješenje. Definirajmo funkcije

$$\begin{aligned} g_1 &: \langle -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \rangle \to [0, \frac{1}{2} \rangle, g_1(x) = |x|, \\ g_2 &: [0, \frac{1}{2} \rangle \to [\frac{1}{4}, 1 \rangle, g_2(x) = (x + \frac{1}{2})^2 \\ g_3 &: [\frac{1}{4}, 1 \rangle \to \mathbb{R}, g_3(x) = ctg(\pi x). \end{aligned}$$

Tada je $f = g_3 \circ g_2 \circ g_1$.

(a) Računamo:

$$\begin{aligned} \mathcal{R}(f) = f(\langle -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \rangle) &= g_3(g_2(g_1(\langle -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \rangle))) \\ &= g_3(g_2([0, \frac{1}{2} \rangle)) = g_3([\frac{1}{4}, 1 \rangle) = \langle -\infty, 1]. \end{aligned}$$

(b) Tražimo interval $I \subseteq \langle -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \rangle$ takav da je $\frac{1}{4} \in I$ te je f injekcija na I.

Funkcija g_1 je strogo padajuća na $\langle -\frac{1}{2}, 0]$ i strogo rastuća na $[0, \frac{1}{2} \rangle$, pa je $I \subseteq [0, \frac{1}{2} \rangle$.

Vrijedi: $g_1(I) \subseteq g_1([0, \frac{1}{2} \rangle) = [0, \frac{1}{2} \rangle$.

Funkcija g_2 je strogo rastuća na $[0, \frac{1}{2} \rangle$.

Vrijedi: $g_2([0, \frac{1}{2} \rangle = [\frac{1}{4}, 1 \rangle$.

Funkcija g_3 je dobro definirana i strogo padajuća na $[\frac{1}{4}, 1 \rangle$, pa je i injekcija.

Slijedi da je $I = [0, \frac{1}{2} \rangle$.

(c) Računamo $f(I) = g_3(g_2(g_1(I))) = \langle -\infty, 1]$.

Neka je sada $y \in \langle -\infty, 1]$.

Računamo:

$$\begin{aligned}
f^{-1}(y) &= x \quad /f \\
y &= f(x) = ctg(\pi(x^2+|x|+\frac{1}{4})) \quad /\text{arcctg} \quad (\text{u redu jer } (\pi(x^2+|x|+\frac{1}{4})) \in \mathcal{R}(\text{arcctg})) \\
\text{arcctg}(y) &= \pi(x^2+|x|+\frac{1}{4}) \\
\frac{1}{\pi}\text{arcctg}(y) &= (|x|+\frac{1}{2})^2 = (x+\frac{1}{2})^2 \\
x+\frac{1}{2} &= \sqrt{\frac{1}{\pi}\text{arcctg } y} \quad (\text{pozitivan predznak zbog } x \in I) \\
x &= \sqrt{\frac{1}{\pi}\text{arcctg } y} - \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Dakle, $f^{-1}(y) = \sqrt{\frac{1}{\pi}\text{arcctg } y} - \frac{1}{2}$.

MATEMATIČKA ANALIZA 1

Prvi kolokvij – 19. studenog 2024.

Zadatak 3. *(ukupno 13 bodova)*

(a) Zadana je funkcija

$$f\colon \mathbb{R} \to \langle 0, \infty\rangle, \quad f(x) = 2^{\sqrt[3]{13x-1}}.$$

Odredite $f([-2,5])$. Postoji li pravi podskup $A \subset \mathbb{R}$ takav da je $f|_A\colon A \to \langle 0,\infty\rangle$ surjekcija?

(b) Neka je $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funkcija takva da vrijedi sljedeće. Za svaku injekciju $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, funkcija

$$f - g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad (f-g)(x) = f(x) - g(x)$$

također je injekcija. Dokažite da je g konstantna funkcija.

Rješenje.

(a) Uočimo da je $f = f_3 \circ f_2 \circ f_1$, pri čemu definiramo funkcije

$$f_1\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f_1(x) = 13x - 1,$$

$$f_2\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f_2(x) = \sqrt[3]{x},$$

$$f_3\colon \mathbb{R} \to \langle 0,\infty\rangle, \quad f_3(x) = 2^x.$$

Dakle, imamo

$$f([-2,5]) = f_3(f_2(f_1([-2,5]))) = f_3(f_2([-27,64])) = f_3([-3,4]) = \left[\frac{1}{8}, 16\right].$$

Takav podskup A ne postoji. Naime, kako su funkcije f_1, f_2, f_3 injekcije, to je f također injekcija. Sada ako je $A \subseteq \mathbb{R}$ takav da je $f|_A\colon A \to \langle 0,\infty\rangle$ surjekcija, tada za svaki $x \in \mathbb{R}$ postoji $x' \in A$ takav da je $f(x') = f(x)$. Zbog injektivnosti funkcije f sada slijedi $x' = x$, dakle $x \in A$. Budući da je $x \in \mathbb{R}$ proizvoljan, slijedi $A = \mathbb{R}$.

(b) Pretpostavimo suprotno, tj. da postoje različiti $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ takvi da $g(x_1) \neq g(x_2)$. Neka je $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jedinstvena afina funkcija takva da $f(x_1) = g(x_1)$ i $f(x_2) = g(x_2)$, odnosno čiji je graf pravac određen točkama $(x_1, g(x_1))$ i $(x_2, g(x_2))$. Tada je f injekcija, no $(f-g)(x_1) = 0 = (f-g)(x_2)$ pa $f - g$ nije injekcija. Dakle, dobili smo kontradikciju s početnom pretpostavkom te je time tvrdnja dokazana.

Napomena. Naravno, postoji i mnogo drugih valjanih odabira za funkciju f, primjerice

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} x_2 + d & \text{ako } x = x_1 \\ x_1 & \text{ako } x = x_2 + d \\ x & \text{ako } x \notin \{x_1, x_2 + d\} \end{cases},$$

pri čemu označavamo $d = g(x_1) - g(x_2)$.

MATEMATIČKA ANALIZA 1

Prvi kolokvij – 19. studenog 2024.

Zadatak 4. *(ukupno 12 bodova)*

(a) Je li funkcija $f : [3, \infty) \to \mathbb{R}$ zadana s

$$f(x) = x + \frac{9}{x}$$

monotona?

(b) Postoji li strogo padajuća funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takva da je funkcija $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zadana s

$$g(x) = \sin(f(x)) \cos(f(x))$$

strogo rastuća?

Rješenje.

(a) Neka su $x, y \in [3, \infty)$ takvi da je $x < y$. Tada je

$$f(y) - f(x) = y + \frac{9}{y} - x - \frac{9}{x} = \underbrace{(y - x)}_{\geq 0} \cdot \frac{\overbrace{xy - 9}^{\geq 0}}{xy} \geq 0.$$

Dakle, f je rastuća.

(b) Primijetimo da je

$$g(x) = \frac{1}{2} \sin(2f(x))$$

pa vrijedi

$$g = f_2 \circ f_1 \circ f, \quad f_1(x) = 2x, \quad f_2(x) = \sin(x).$$

Funkcija f_1 je strogo rastuća na $\mathbb{R}$, a funkcija f_2 je strogo padajuća na $[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$. Ako nađemo strogo padajuću funkciju f za koju vrijedi $f_1 \circ f(\mathbb{R}) \subset [\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$, tada će vrijediti

$$g = f_2|_{[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]} \circ f_1 \circ f$$

pa će tada g biti strogo rastuća funkcija kao kompozicija funkcija u kojoj je paran broj strogo padajućih funkcija.

Preostaje naći primjer strogo padajuće funkcije f takve da je $f_1 \circ f(\mathbb{R}) \subset [\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$, tj. $f(\mathbb{R}) \subset [\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}]$. Jedan primjer strogo padajuće funkcije na $\mathbb{R}$ čija je slika podksup nekog omeđenog intervala je $-\operatorname{arctg} x$. Kako je $-\operatorname{arctg}(\mathbb{R}) = (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, množenjem sa $\frac{1}{2}$ dobijemo interval $(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4})$ duljine $\frac{\pi}{2}$ pa ga je potrebno još pomaknuti za $\frac{\pi}{2}$ u pozitivnom smjeru. Dakle, funkcija

$$f(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} \operatorname{arctg}(x)$$

je strogo rastuća i zadovoljava $f(\mathbb{R}) \subset [\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}]$. Za tu funkciju f je dana funkcija g strogo padajuća po prethodnom računu.