Matematička analiza 1
dodatni zadaci

1. Ispitajte je li funkcija $f(x) := x^4 - 4x^2 - 5$ injekcija na intervalu I, te ako jest odredite joj sliku i inverz, ako je

$$\text{(a) } I = [2,3), \quad \text{(b) } I = [1,2], \quad \text{(c) } I = (-1,0].$$

2. Neka je $f : \mathbb{R} \to [2,4]$ funkcija definirana formulom $f(x) := 2^{\frac{4}{\pi}\operatorname{arctg}(|x-1|+1)}$. Odredite $f([0,\infty))$, $f^{-1}(f([0,\infty)))$, te ispitajte je li f surjekcija.

3. Neka je $f : [2,3] \to [1,e]$ definirana formulom $f(x) := e^{\operatorname{tg}(\frac{\pi}{8}(x^2-3x+12))}$. Dokažite da je f bijekcija i odredite f^{-1}.

4. Dokažite:

   (a) $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$, za sve $x \in [-1,1]$,

   (b) $\arcsin(-x) = -\arcsin x$, za sve $x \in [-1,1]$,

   (c) $\arccos(-x) = \pi - \arccos x$, za sve $x \in [-1,1]$,

   (d) $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arcctg} x = \frac{\pi}{2}$, za sve $x \in \mathbb{R}$.

   Rj.

   (a)

$$\begin{aligned}
\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2},\ \forall x \in [-1,1] \quad &\Longleftrightarrow \quad \arcsin x = \frac{\pi}{2} - \arccos x, \forall x \in [-1,1] \\
&\Longleftrightarrow \quad \sin(\arcsin x) = \sin(\frac{\pi}{2} - \arccos x), \forall x \in [-1,1] \\
&\Longleftrightarrow \quad \sin(\arcsin x) = \cos(\arccos x),\ \forall x \in [-1,1] \\
&\Longleftrightarrow \quad x = x,\ \forall x \in [-1,1],
\end{aligned}$$

   gdje druga ekvivalencija slijedi iz činjenice da je $\frac{\pi}{2} - \arccos x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, za sve $x \in [-1,1]$ i injektivnosti restrikcije $\sin|_{[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]}$.

   (b) To je specijalni slučaj sljedeće tvrdnje: Ako su I i J simetrični intervali oko 0 u $\mathbb{R}$, te ako je $f : I \to J$ neparna bijekcija, tada je i f^{-1} neparna bijekcija. Zaista, za $y \in J$ neka je $x \in I$ (jedinstveni) sa svojstvom $y = f(x)$. Tada je

$$f^{-1}(-y) = f^{-1}(-f(x)) = f^{-1}(f(-x)) = -x = -f^{-1}(y).$$

   (c) Iz (a) i (b) slijedi da za $x \in [-1,1]$ imamo:

$$\arccos(-x) = \frac{\pi}{2} - \arcsin(-x) = \frac{\pi}{2} + \arcsin(x) = \frac{\pi}{2} + (\frac{\pi}{2} - \arccos x) = \pi - \arccos x.$$

(d) Budući da je restrikcija $\operatorname{tg}|_{(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})}$ injekcija, te kako je $\frac{\pi}{2} - \operatorname{arcctg} x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, za sve $x \in \mathbb{R}$, imamo:

$$\begin{aligned}
\operatorname{arctg} x + \operatorname{arcctg} x = \frac{\pi}{2},\ \forall x \in \mathbb{R} \quad &\Longleftrightarrow \quad \operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arcctg} x, \forall x \in \mathbb{R} \\
&\Longleftrightarrow \quad \operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x) = \operatorname{tg}(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arcctg} x), \forall x \in \mathbb{R} \\
&\Longleftrightarrow \quad \operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x) = \operatorname{ctg}(\operatorname{arcctg} x),\ \forall x \in \mathbb{R} \\
&\Longleftrightarrow \quad x = x,\ \forall x \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

5. Dokažite:
$$\arcsin x = 2\operatorname{arctg}\frac{x}{1+\sqrt{1-x^2}},\ \text{za sve } x \in (-1,1),$$

Rj. Prisjetimo se da za svako $x \in \mathbb{R} \setminus \{(2k+1)\pi : \ k \in \mathbb{Z}\}$ vrijedi formula
$$\operatorname{tg}\frac{x}{2} = \frac{\sin x}{1+\cos x}.$$
Koristeći tu formulu imamo:
$$\begin{aligned}
\arcsin x = 2\operatorname{arctg}\frac{x}{1+\sqrt{1-x^2}},\ \forall x \in (-1,1) \quad &\Longleftrightarrow \\
\frac{1}{2}\arcsin x = \operatorname{arctg}\frac{x}{1+\sqrt{1-x^2}},\ \forall x \in (-1,1) \quad &\Longleftrightarrow \\
\operatorname{tg}(\frac{1}{2}\arcsin x) = \operatorname{tg}(\operatorname{arctg}\frac{x}{1+\sqrt{1-x^2}}),\ \forall x \in (-1,1) \quad &\Longleftrightarrow \\
\frac{\sin(\arcsin x)}{1+\cos(\arcsin x)} = \frac{x}{1+\sqrt{1-x^2}},\ \forall x \in (-1,1) \quad &\Longleftrightarrow \\
\frac{x}{1+\sqrt{1-\sin^2(\arcsin x)}} = \frac{x}{1+\sqrt{1-x^2}},\ \forall x \in (-1,1) \quad &\Longleftrightarrow \\
\frac{x}{1+\sqrt{1-x^2}} = \frac{x}{1+\sqrt{1-x^2}},\ \forall x \in (-1,1).&
\end{aligned}$$

6. Za $k \in \mathbb{Z}$ definiramo bijekcije
$$\mathrm{Sin}_k := \sin|_{[-\frac{\pi}{2}+k\pi,\frac{\pi}{2}+k\pi]} : [-\frac{\pi}{2}+k\pi, \frac{\pi}{2}+k\pi] \to [-1,1],$$
$$\mathrm{Cos}_k := \cos|_{[k\pi,(k+1)\pi]} : [k\pi,(k+1)\pi] \to [-1,1],$$
$$\mathrm{Tg}_k := \operatorname{tg}|_{(-\frac{\pi}{2}+k\pi,\frac{\pi}{2}+k\pi)} : (-\frac{\pi}{2}+k\pi, \frac{\pi}{2}+k\pi) \to \mathbb{R},$$
$$\mathrm{Ctg}_k := \operatorname{ctg}|_{(k\pi,(k+1)\pi)} : (k\pi,(k+1)\pi) \to \mathbb{R}.$$
Odredite njihove inverze.

Rj. Primijetimo da za $x \in \mathbb{R}$ i $k \in \mathbb{Z}$ vrijedi
$$\sin x = (-1)^k \sin(x-k\pi) \quad \text{i} \quad \cos x = (-1)^k\cos(x-k\pi).$$
Stoga, za $x \in [-\frac{\pi}{2}+k\pi, \frac{\pi}{2}+k\pi]$ i $y \in [-1,1]$ imamo:
$$\begin{aligned}
\mathrm{Sin}_k x = y \quad &\Longleftrightarrow \quad \sin x = y \\
&\Longleftrightarrow \quad (-1)^k\sin(x-k\pi) = y \\
&\Longleftrightarrow \quad \sin(x-k\pi) = (-1)^k y \\
&\Longleftrightarrow \quad \arcsin(\sin(x-k\pi)) = \arcsin((-1)^k y) \\
&\Longleftrightarrow \quad x - k\pi = (-1)^k \arcsin y \\
&\Longleftrightarrow \quad x = (-1)^k\arcsin y + k\pi.
\end{aligned}$$
Dakle
$$(\mathrm{Sin}_k)^{-1}(x) = (-1)^k \arcsin x + k\pi,\ \text{za sve } x \in [-1,1].$$

Slično, za $x \in [k\pi, (k+1)\pi]$ i $y \in [-1,1]$ imamo:

$$\begin{aligned}
\mathrm{Cos}_k x = y \quad &\iff \quad \cos x = y \\
&\iff \quad (-1)^k \cos(x - k\pi) = y \\
&\iff \quad \cos(x - k\pi) = (-1)^k y \\
&\iff \quad x - k\pi = \arccos((-1)^k y) \\
&\iff \quad x - k\pi = \frac{1-(-1)^k}{2}\pi + (-1)^k \arccos y \\
&\iff \quad x = (-1)^k(\arccos y - \frac{\pi}{2}) + k\pi + \frac{\pi}{2}.
\end{aligned}$$

Dakle

$$(\mathrm{Cos}_k)^{-1}(x) = (-1)^k(\arccos x - \frac{\pi}{2}) + k\pi + \frac{\pi}{2}, \text{ za sve } x \in [-1,1].$$

Koristeći slične argumente, također dobivamo

$$(\mathrm{Tg}_k)^{-1}(x) = \mathrm{arctg}\, x + k\pi, \text{ za sve } x \in \mathbb{R},$$

$$(\mathrm{Ctg}_k)^{-1}(x) = \mathrm{arcctg}\, x + k\pi, \text{ za sve } x \in \mathbb{R}.$$

7. Dokažite da za svako $x \in \mathbb{R}$ vrijedi

   (a) $\arcsin(\sin x) = (-1)^{\lfloor \frac{x}{\pi} + \frac{1}{2} \rfloor}(x - \lfloor \frac{x}{\pi} + \frac{1}{2} \rfloor \pi)$,

   (b) $\arccos(\cos x) = \frac{1-(-1)^{\lfloor \frac{x}{\pi} \rfloor}}{2}\pi + (-1)^{\lfloor \frac{x}{\pi} \rfloor}(x - \lfloor \frac{x}{\pi} \rfloor \pi)$.

   Rj.

   (a) Za $x \in \mathbb{R}$ neka je $k(x) \in \mathbb{Z}$ (jedinstven) takav da je $x - k(x)\pi \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Primijetimo da je

$$\begin{aligned}
-\frac{\pi}{2} \le x - k(x)\pi < \frac{\pi}{2} \quad &\iff \quad x - \frac{\pi}{2} < k(x)\pi \le x + \frac{\pi}{2} \\
&\iff \quad \frac{x}{\pi} - \frac{1}{2} < k(x) \le \frac{x}{\pi} + \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

   Dakle, $k(x) = \lfloor \frac{x}{\pi} + \frac{1}{2} \rfloor$. Slijedi:

$$\begin{aligned}
\arcsin(\sin x) &= \arcsin((-1)^{k(x)} \sin(x - k(x)\pi)) \\
&= (-1)^{k(x)} \arcsin(\sin(x - k(x)\pi)) \\
&= (-1)^{k(x)}(x - k(x)\pi).
\end{aligned}$$

   (b) Za $x \in \mathbb{R}$ neka je $k(x) \in \mathbb{Z}$ (jedinstven) takav da je $x - k(x)\pi \in [0, \pi)$. Slično kao u (a) dobivamo $k(x) = \lfloor \frac{x}{\pi} \rfloor$. Slijedi

$$\begin{aligned}
\arccos(\cos x) &= \arccos((-1)^{k(x)} \cos(x - k(x)\pi)) \\
&= \frac{1-(-1)^{k(x)}}{2}\pi + (-1)^{k(x)} \arccos(x - k(x)\pi) \\
&= \frac{1-(-1)^{k(x)}}{2}\pi + (-1)^{k(x)}(x - k(x)\pi).
\end{aligned}$$

8. Neka je $f : [\frac{\pi}{2}, \pi] \to [0, 2]$ funkcija definirana formulom $f(x) := \cos(\pi 2^{\sin x}) + \lfloor \sqrt{x} \rfloor$. Dokažite da je f bijekcija i odredite joj inverz.

Rj. Za $\frac{\pi}{2} \le x \le \pi$ imamo

$$1 \le \sqrt{\frac{\pi}{2}} \le \sqrt{x} \le \sqrt{\pi} < 2,$$

pa je $\lfloor \sqrt{x} \rfloor = 1$. Dakle, $f(x) = \cos(\pi 2^{\sin x}) + 1$, za sve $x \in [\frac{\pi}{2}, \pi]$. Neka su $f_1, f_2, f_3 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funkcije definirane formulom $f_1(x) := \sin x$, $f_2(x) := 2^x$, $f_3(x) := \pi x$ i $f_4(x) := \cos x + 1$. Redom imamo

$$f_1([\frac{\pi}{2}, \pi]) = [\sin \pi, \sin \frac{\pi}{2}] = [0, 1];$$

jer je $f_1|_{[\frac{\pi}{2}, \pi]}$ neprekidna i (strogo) padajuća funkcija,

$$f_2([0, 1]) = [2^0, 2^1] = [1, 2];$$

jer je $f_2|_{[0,1]}$ neprekidna i (strogo) rastuća funkcija,

$$f_3([1, 2]) = [\pi, 2\pi];$$

jer je $f_3|_{[1,2]}$ neprekdina i (strogo) rastuća funkcija, te

$$f_4([\pi, 2\pi]) = [\cos \pi + 1, \cos 2\pi + 1] = [0, 2];$$

jer je $f_4|_{[\pi,2\pi]}$ neprekidna i (strogo) rastuća funkcija. Kako je

$$f = (f_4 \circ f_3 \circ f_2 \circ f_1)|_{[\frac{\pi}{2},\pi]} = f_4|_{[\pi,2\pi]} \circ f_3|_{[1,2]} \circ f_2|_{[0,1]} \circ f_1|_{[\frac{\pi}{2},\pi]},$$

zaključujemo da je $\mathcal{R}_f = [0, 2]$, te da je f strogo padajuća funkcija (kao kompozicija od tri strogo rastuće i jedne strogo padajuće funkcije). Kako je kodomena of f jednaka $\mathcal{R}_f$, slijedi da je f bijekcija. Nadalje, imamo

$$f^{-1} = (f_1|_{[\frac{\pi}{2},\pi]})^{-1} \circ (f_2|_{[0,1]})^{-1} \circ (f_3|_{[1,2]})^{-1} \circ (f_4|_{[\pi,2\pi]})^{-1}.$$

- $f_4|_{[\pi,2\pi]} : [\pi, 2\pi] \to [0, 2] \Rightarrow (f_4|_{[\pi,2\pi]})^{-1} : [0, 2] \to [\pi, 2\pi]$. Neka je $y \in [0, 2]$ i $x \in [\pi, 2\pi]$ jedinstveni takav da je $y = f_4(x)$. Imamo:

$$\begin{aligned} y = f_4(x) \quad &\Longleftrightarrow \quad y = \cos x + 1 \\ &\Longleftrightarrow \quad y - 1 = \cos x \\ &\Longleftrightarrow \quad y - 1 = -\cos(x - \pi) \\ &\Longleftrightarrow \quad 1 - y = \cos(x - \pi) \\ &\Longleftrightarrow \quad x - \pi = \arccos(1 - y) \\ &\Longleftrightarrow \quad x = \pi + \arccos(1 - y). \end{aligned}$$

  Dakle,

$$(f_4|_{[\pi,2\pi]})^{-1}(x) = \pi + \arccos(1 - x), \text{ za sve } x \in [0, 2].$$

- $f_3|_{[1,2]} : [1, 2] \to [\pi, 2\pi] \Rightarrow (f_3|_{[1,2]})^{-1} : [\pi, 2\pi] \to [1, 2]$. Očito je

$$(f_3|_{[1,2]})^{-1}(x) = \frac{x}{\pi}, \text{ za sve } x \in [\pi, 2\pi].$$

- $f_2|_{[0,1]} : [0,1] \to [1,2] \Rightarrow (f_2|_{[0,1]})^{-1} : [1,2] \to [0,1]$. Očito je
$$(f_2|_{[0,1]})^{-1}(x) = \log_2 x, \text{ za sve } x \in [1,2].$$

- $f_1|_{[\frac{\pi}{2},\pi]} : [\frac{\pi}{2},\pi] \to [0,1] \Rightarrow (f_1|_{[\frac{\pi}{2},\pi]})^{-1} : [0,1] \to [\frac{\pi}{2},\pi]$. Neka je $y \in [0,1]$ i $x \in [\frac{\pi}{2},\pi]$ jedinstveni takav da je $y = f_1(x)$. Imamo:
$$\begin{aligned} y = f_1(x) &\iff y = \sin x \\ &\iff y = -\sin(x-\pi) \\ &\iff -y = \sin(x-\pi) \\ &\iff x-\pi = \arcsin(-y) \\ &\iff x = \pi - \arcsin y. \end{aligned}$$
Dakle,
$$(f_1|_{[\frac{\pi}{2},\pi]})^{-1}(x) = \pi - \arcsin x, \text{ za sve } x \in [0,1].$$

Napokon, dobivamo
$$f^{-1}(x) = \pi - \arcsin(\log_2(1 + \frac{1}{\pi}\arccos(1-x))), \text{ za sve } x \in [0,2].$$

9. Neka su $f, g : D \to K$ realne funkcije realne varijable.
   - Ako su f i g (strogo) rastuće / (strogo) padajuće, tada je i $\alpha f + \beta g$ (strogo) rastuća / (strogo) padajuća, za sve $\alpha, \beta > 0$.
   - Ako su f i g (strogo) rastuće / (strogo) padajuće, te ako je $f, g \geq 0$, tada je i fg (strogo) rastuća / (strogo) padajuća.

10. Koliko rješenja ima svaka od sljedećih jednadžbi:
   (a) $2^{3^{4^{5^x}}} = 6$,
   (b) $2^x + \log_2 x + x = 7$,
   (c) $e^{\operatorname{arctg} x^2} = \cos x^3 - \operatorname{ch} x$.

   Rj.

   (a) Redom imamo
$$\begin{aligned} 5^x > 0,\ \forall x \in \mathbb{R} &\Rightarrow 4^{5^x} > 4^0 = 1,\ \forall x \in \mathbb{R} \\ &\Rightarrow 3^{4^{5^x}} > 3^1 = 3,\ \forall x \in \mathbb{R} \\ &\Rightarrow 2^{3^{4^{5^x}}} > 2^3 = 8,\ \forall x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$
   Dakle, jednadžba $2^{3^{4^{5^x}}} = 6$ nema realnih rješenja.

   (b) Neka je $f : (0,+\infty) \to \mathbb{R}$ funkcija definirana formulom $f(x) := 2^x + \log_2 x + x$. Primijetimo da je f strogo rastuća funkcija, kao zbroj strogo rastućih funkcija. Specijalno, f je injekcija, pa je skup $f^{-1}(\{y\})$ ili prazan ili jednočlan, za svako $y \in \mathbb{R}$. Kako je $f(2) = 4 + 1 + 2 = 7$, zaključujemo da je $f^{-1}(\{7\}) = \{2\}$. Stoga, jednadžba $2^x + \log_2 x + x = 7$ ima jedinstveno rješenje, $x = 2$.

- (c) Kako je $\operatorname{arctg} x^2 > -\frac{\pi}{2}$, za sve $x \in \mathbb{R}$, to je

$$e^{\operatorname{arctg} x^2} > e^{-\pi^2} > 0.$$

S druge strane, kako je $\cos x^3 \leq 1$ i $\operatorname{ch} x \geq 1$, za sve $x \in \mathbb{R}$, to je

$$\cos x^3 - \operatorname{ch} x \leq 0, \text{ za sve } x \in \mathbb{R}.$$

Stoga, jednadžba $e^{\operatorname{arctg} x^2} = \cos x^3 - \operatorname{ch} x$ nema realnih rješenja.

11. Odredite $\mathcal{D}_f$ ako je:

(a) $f(x) := \arccos(\operatorname{tg} \frac{x+1}{x})$,
(b) $f(x) := \arcsin(\log_{0.5} \frac{2+x}{1+x})$,
(c) $f(x) := \ln(\log_x(2x^2 - 5x + 3))$.

12. (a) Postoji li surjekcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takva da vrijedi $f(\operatorname{sh} x) - \operatorname{ch}(f(x)) \geq \cos x$, za sve $x \in \mathbb{R}$?
(b) Nađite sve funkcije $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ za koje vrijedi $f(xy) = xf(x) + yf(y)$, za sve $x, y \in \mathbb{R}$.
(c) Postoji li funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ za koju vrijedi $f(1 + f(x)) = 1 - x$ i $f(f(x)) = x$, za sve $x \in \mathbb{R}$?

Rj.

(a) Pretpostavimo da takva surjekcija postoji. Tada je i funkcija $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definirana formulom $g(x) := f(\operatorname{sh} x)$ također surjekcija, kao kompozicija surjekcija. S druge strane, kako je $\cos x \geq -1$ i $\operatorname{ch} x \geq 1$ za sve $x \in \mathbb{R}$, imamo

$$g(x) = f(\operatorname{sh} x) \geq \operatorname{ch}(f(x)) + \cos x \geq 1 + (-1) = 0, \text{ za sve } x \in \mathbb{R};$$

kontradikcija s činjenicom da je $\mathcal{R}_g = \mathbb{R}$.

(b) Uvrštavanjem $y = 0$ u danu funkcijsku jednadžbu dobivamo

$$f(0) = xf(x), \text{ za sve } x \in \mathbb{R}.$$

Nadalje, uvrštavanjem $y = 1$, dobivamo

$$f(x) = xf(x) + f(1) = f(0) + f(1), \text{ za sve } x \in \mathbb{R}.$$

Dakle, f je konstantna funckcija na $\mathbb{R}$. Očito je $f(0) = 0$, pa je nužno $f(x) = 0$, za sve $x \in \mathbb{R}$. Budući da ta funkcija očito zadovoljava početnu jednadžbu, zaključujemo da je ona njeno jedinstveno rješenje.

(c) Pretpostavimo da postoji takva funkcija. Tada je

$$1 + f(x) = f(f(1 + f(x))) = f(1 - x), \text{ za sve } x \in \mathbb{R}.$$

Specijalno za $x = \frac{1}{2}$ dobivamo

$$1 + f(\frac{1}{2}) = f(\frac{1}{2}) \Rightarrow 1 = 0;$$

kontradikcija.

13. **Napomena**: Neka su $f : X \to Y$ i $g : Y \to Z$ funkcije. Tada vrijedi:

- $g \circ f$ je injekcija ako i samo ako su f i $g|_{\mathcal{R}_f}$ injekcije.
- $g \circ f$ je surjekcija ako i samo ako je $g|_{\mathcal{R}_f}$ surjekcija.

Nadalje, Ako su $X, Y, Z \subseteq \mathbb{R}$, tada vrijedi:

- Ako su f i $g|_{\mathcal{R}_f}$ (strogo) rastuće / (strogo) padajuće, tada je i $g \circ f$ (strogo) rastuća.
- Ako je f strogo padajuća / (strogo) rastuća i ako je $g|_{\mathcal{R}_f}$ (strogo) rastuća / (strogo) padajuća, tada je i $g \circ f$ (strogo) padajuća.

Također napomenimo da iz (stroge) monotnosti kompozicije $g \circ f$ općenito ne slijedi (stroga) monotonost of f ili od g. Zaista, promotrimo funkciju $f : [0, 2] \to [0, 2]$ definiranu s

$$f(x) := \begin{cases} x, & \text{za } x \in [0, 1] \\ 3 - x, & \text{za } x \in [1, 2), \end{cases}$$

Očito f nije strogo monotona, no $f \circ f = \mathrm{id}_{[0,2]}$ je strogo rastuća. Također postoje i mnogo "radikalniji" primjeri (npr. za funkciju f zadatka 15 također vrijedi $f \circ f = \mathrm{id}_{\mathbb{R}}$).

14. (a) Postoji li padajuća funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takva da je funkcija $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definirana formulom $g(x) := 4^{f(x)} - 2^{f(x)}$ strogo rastuća?

    (b) Postoji li surjekcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takava da je funkcija $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definirana formulom $g(x) := f(x)^5 + f(x)^2$ strogo padajuća?

    Rj.

    (a) Neka je $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funkcija definirana formulom $h(x) := 4^x - 2^x$. Lako se provjeri da je h strogo padajuća funkcija na intervalu $(-\infty, -1]$. Naime, imamo $h|_{(-\infty,-1]} = h_2|_{(0,\frac{1}{2}]} \circ h_1|_{(-\infty,-1]}$, gdje je $h_1(x) := 2^x$ strogo rastuća na $(-\infty, -1]$, te $h_2(x) := x^2 - x$ strogo padajuća na $(0, \frac{1}{2}]$. Stoga, da bi funkcija $g = h \circ f$ bila strogo rastuća, dovoljno je zahtjevati da f strogo pada na $\mathbb{R}$ i $\mathcal{R}_f \subseteq (-\infty, -1]$. Primjer takve funkcije je

    $$f(x) := -2^x - 1.$$

    (b) Pretpostavimo da takva surjekcija postoji. Tada postoje $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ takvi da je $f(x_1) = -1$ i $f(x_2) = 0$. Očito je $x_1 \neq x_2$. Imamo

    $$g(x_1) = f(x_1)^5 + f(x_1)^2 = 0,$$

    $$g(x_2) = f(x_2)^5 + f(x_2)^2 = 0,$$

    pa je $g(x_1) = g(x_2)$. Budući da je g strogo padajuća, ona je injekcija, pa je nužno $x_1 = x_2$; kontradikcija.

15. Postoji li bijekcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takva da za svaki otvoreni interval $I \subseteq \mathbb{R}$ restrikcija $f|_I$ nije strogo monotona?

    Rj. Postoji. Neka je $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definirana s

$$f(x) := \begin{cases} x, & \text{za } x \in \mathbb{Q} \\ -x, & \text{za } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Očito je f bijekcija. Neka je $I \subseteq \mathbb{R}$ (proizvoljni) otvoreni interval. Budući da su $\mathbb{Q}$ i $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ gusti u $\mathbb{R}$, postoje $x, y, z \in I$ takvi da vrijedi:

- $x, z \in \mathbb{Q}$ i $y \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$,
- $x < y < z$,
- x, y i z su istog predznaka.

Tada je ili $f(x) > f(y)$ i $f(y) < f(z)$ (ako $x, y, z > 0$) ili $f(x) < f(y)$ i $f(y) > f(z)$ (ako $x, y, z < 0$). Dakle, $f|_I$ nije strogo monotona.