

MATEMATIČKA ANALIZA 2

Treći ispit – 28. kolovoza 2026.

Zadatak 1. (12+12=24 boda)

- (a) Izračunajte limes $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}}{e} \right)^{\frac{1}{x}}$.
- (b) Dokažite da za svaki $x > 0$ vrijedi $\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) < \frac{1}{x}$.

Rješenje.

- (a) Koristeći oznaku $\exp(x) = e^x$, izraz je jednak

$$\exp\left(\frac{1}{x} \ln\left(\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}}{e}\right)\right) = \exp\left(\frac{1}{x} \left(\frac{\ln(1+x)}{x} - 1\right)\right) = \exp\left(\frac{\ln(1+x) - x}{x^2}\right).$$

Izračunajmo limes unutar eksponencijalne funkcije. Dvostrukom primjenom L'Hospitalovog pravila slijedi

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x) - x}{x^2} \stackrel{\text{L'H}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{1+x} - 1}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-x}{2x(1+x)} = -\frac{1}{2}.$$

Zbog neprekidnosti eksponencijalne funkcije konačno je

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}}{e} \right)^{\frac{1}{x}} = e^{-\frac{1}{2}}.$$

- (b) Supstitucijom $t = \frac{1}{x}$ (gdje je $t > 0$), tvrdnja je ekvivalentna dokazivanju da za svaki $t > 0$ vrijedi:

$$\ln(1+t) < t.$$

Definirajmo funkciju $f: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ s

$$f(t) = t - \ln(1+t).$$

Deriviranjem funkcije dobivamo:

$$f'(t) = 1 - \frac{1}{1+t} = \frac{t}{1+t}.$$

Za svaki $t > 0$ očito vrijedi $f'(t) > 0$, što znači da je funkcija f strogo rastuća na intervalu $(0, \infty)$.

Kako je $f(0) = 0 - \ln(1) = 0$, iz strogog rasta slijedi da za svaki $t > 0$ vrijedi $f(t) > f(0)$, odnosno:

$$t - \ln(1+t) > 0 \implies \ln(1+t) < t.$$

Time je ekvivalentna nejednakost dokazana.

Zadatak 2. (16+8=24 boda)

- (a) U ovisnosti o parametru
- $a \in \mathbb{R}$
- odredite broj nultočaka funkcije

$$f(x) = xe^x - a.$$

- (b) Neka je
- $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
- dva puta diferencijabilna funkcija takva da je
- $f(0) = f'(0) = 0$
- i
- $f(1) = 1$
- . Dokažite da postoji
- $c \in \langle 0, 1 \rangle$
- takav da je
- $f''(c) = 2$
- .

Rješenje.

- (a) Broj nultočaka funkcije
- $f(x)$
- odgovara broju realnih rješenja jednadžbe
- $xe^x = a$
- , tj. broju sjecišta grafa funkcije
- $g(x) = xe^x$
- i pravca
- $y = a$
- .

Vrijedi

$$g'(x) = (x+1)e^x,$$

pa je g strogo padajuća na $\langle -\infty, -1 \rangle$, a strogo rastuća na $[-1, +\infty)$. U točki $x = -1$ funkcija postiže lokalni (i globalni) minimum i on iznosi $g(-1) = -\frac{1}{e}$.

Odredimo još horizontalne asimptote funkcije g :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} xe^x = +\infty.$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} xe^x = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{e^{-x}} \stackrel{(L'H)}{=} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{-e^{-x}} = 0.$$

Dakle, pravac $y = 0$ je lijeva horizontalna asimptota funkcije g .

Sada možemo odrediti broj sjecišta grafa od $g(x)$ s pravcem $y = a$ (tj. broj nultočaka funkcije f):

- $a < -\frac{1}{e}$: Budući da je globalni minimum funkcije $g(x)$ jednak $-\frac{1}{e}$, pravac $y = a$ nema zajedničkih točaka s grafom (0 nultočaka).
- $a = -\frac{1}{e}$: Pravac $y = a$ dodiruje graf funkcije točno u točki globalnog minimuma $x = -1$ (1 nultočka).
- $-\frac{1}{e} < a < 0$: Budući da je funkcija strogo padajuća na $\langle -\infty, -1 \rangle$ i strogo rastuća na $\langle -1, 0 \rangle$, pravac $y = a$ siječe graf funkcije u dvije različite točke: jednoj na intervalu $\langle -\infty, -1 \rangle$ i jednoj na $\langle -1, 0 \rangle$ (2 nultočke).
- $a \geq 0$: Na intervalu $\langle -\infty, 0 \rangle$ funkcija $g(x)$ poprima vrijednosti iz $[-\frac{1}{e}, 0)$, pa graf ne siječe pravac $y = a$. Na intervalu $[0, +\infty)$ funkcija strogo raste od 0 do $+\infty$, pa siječe pravac $y = a$ u točno jednoj točki (1 nultočka).

- (b) Promotrimo funkciju
- $g(x) := f(x) - x^2$
- . Ona je također dva puta diferencijabilna na
- $\mathbb{R}$
- i vrijedi

$$g'(x) = f'(x) - 2x, \quad g''(x) = f''(x) - 2, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Kako je $g(0) = f(0) - 0 = 0$ i $g(1) = f(1) - 1 = 0$, prema Rolleovom teoremu postoji $x_1 \in \langle 0, 1 \rangle$ takav da je $g'(x_1) = 0$. Kako je $g'(0) = f'(0) - 0 = 0$, još jednom primjenom Rolleovog teorema dobivamo $c \in \langle 0, x_1 \rangle \subseteq \langle 0, 1 \rangle$ takav da je $g''(c) = 0$, tj. $f''(c) = 2$.

2. način: Koristimo Taylorov teorem srednje vrijednosti za $c = 0$ i $n = 1$. Kako je $R_1(x) = f(x) - f(0) - f'(0) \cdot x = f(x)$, znamo da za svaki $x \in \mathbb{R}$ postoji c_x između 0 i x takav da je

$$f(x) = \frac{f''(c_x)}{2!} x^2.$$

Uvrštavanjem $x = 1$ slijedi tvrdnja zadatka.

Zadatak 3. (14+12 = 26 bodova)

(a) Izračunajte integral

$$\int_0^1 \operatorname{arctg} \sqrt{x} dx.$$

(b) Odredite sve $\alpha \in \mathbb{R}$ za koje nepravilni integral

$$\int_0^1 \frac{\operatorname{tg} x}{x^\alpha} dx$$

konvergira.

Rješenje.

(a) Supstitucijom $t = \sqrt{x}$, tj. $x = t^2$, $dx = 2t dt$, dobivamo

$$\int_0^1 \operatorname{arctg} \sqrt{x} dx = \int_0^1 2t \operatorname{arctg} t dt.$$

Parcijalnom integracijom uz $u = \operatorname{arctg} t$, $dv = 2t dt$, dakle $du = \frac{dt}{1+t^2}$, $v = t^2$, slijedi

$$\begin{aligned} \int_0^1 2t \operatorname{arctg} t dt &= t^2 \operatorname{arctg} t \Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{t^2}{1+t^2} dt = \frac{\pi}{4} - \int_0^1 \left(1 - \frac{1}{1+t^2}\right) dt \\ &= \frac{\pi}{4} - (t - \operatorname{arctg} t) \Big|_0^1 = \frac{\pi}{4} - 1 + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} - 1. \end{aligned}$$

(b) Za $\alpha \leq 0$ podintegralna funkcija je neprekidna na $[0, 1]$, pa integral konvergira. Za $\alpha > 0$ funkcija nije ograničena u 0 pa provjeravamo taj slučaj.

Primijetimo da je

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{\operatorname{tg} x}{x^\alpha}}{\frac{1}{x^{\alpha-1}}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{1}{\cos x} = 1 \in \langle 0, +\infty \rangle,$$

pa po usporednom kriteriju (u graničnom obliku) integral $\int_0^1 \frac{\operatorname{tg} x}{x^\alpha} dx$ konvergira ako i samo ako konvergira $\int_0^1 \frac{dx}{x^{\alpha-1}}$, a to je točno kada je $\alpha - 1 < 1$, tj. $\alpha < 2$.

Dakle, integral konvergira ako i samo ako je $\alpha \in \langle -\infty, 2 \rangle$.

Zadatak 4. (14+12=26 bodova)

(a) Ispitajte konvergenciju i apsolutnu konvergenciju reda

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\sqrt[n]{2} - 1 \right).$$

(b) Odredite Maclaurinov red funkcije $f(x) = \cos^2 x$ i njegov radijus konvergencije te izračunajte $f^{(2026)}(0)$.

Rješenje.

(a) Označimo $a_n = \sqrt[n]{2} - 1 = 2^{\frac{1}{n}} - 1$.

Konvergencija. Kako je $x \mapsto 2^x$ strogo rastuća, a niz $\left(\frac{1}{n}\right)_n$ strogo padajuć, niz $(a_n)_n$ je strogo padajuć. Nadalje je $a_n > 0$ za svaki $n \in \mathbb{N}$ i

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 2^0 - 1 = 0.$$

Dakle, po Leibnizovom kriteriju red $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ konvergira.

Apsolutna konvergencija. Ispitujemo red s pozitivnim članovima

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(2^{\frac{1}{n}} - 1 \right).$$

Zbog $\lim_{s \rightarrow 0} \frac{e^s - 1}{s} = 1$ i $\frac{\ln 2}{n} \rightarrow 0$ vrijedi

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{\frac{1}{n}} - 1}{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \ln 2 \cdot \frac{e^{\frac{\ln 2}{n}} - 1}{\frac{\ln 2}{n}} = \ln 2 \in \langle 0, +\infty \rangle.$$

Po usporednom kriteriju (u graničnom obliku) red $\sum_{n=1}^{\infty} \left(2^{\frac{1}{n}} - 1 \right)$ konvergira ako i samo ako konvergira harmonijski red $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, a on divergira.

Dakle, red konvergira, ali ne konvergira apsolutno, tj. konvergira uvjetno.

(b) Iz formule za dvostruki kut vrijedi

$$\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Uvrštavanjem $s = 2x$ u poznati razvoj $\cos s = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} s^{2n}$, koji vrijedi za svaki $s \in \mathbb{R}$, dobivamo

$$\cos 2x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^{2n}}{(2n)!} x^{2n}, \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

pa je

$$f(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^{2n}}{(2n)!} x^{2n} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^{2n-1}}{(2n)!} x^{2n}, \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

Po teoremu o jedinstvenosti razvoja u red potencija to je Maclaurinov red funkcije f , a radijus konvergencije je $R = +\infty$.

U dobivenom razvoju nastupaju samo parne potencije, a koeficijent uz x^{2026} dobivamo za $n = 1013$. Kako je taj koeficijent jednak $\frac{f^{(2026)}(0)}{2026!}$, slijedi

$$\frac{f^{(2026)}(0)}{2026!} = \frac{(-1)^{1013} 2^{2025}}{2026!} \implies f^{(2026)}(0) = -2^{2025}.$$