MATEMATIČKA ANALIZA 2

Prvi kolokvij – 30. travnja 2025.

Zadatak 1. (12 bodova)

(a) Neka je $f(x) = (x^2 + x - 1)\cos(3x)$. Odredite $f^{(2025)}(0)$.

(b) Neka je $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takva da je $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x+1} = 1$. Je li $y = x + 1$ nužno desna kosa asimptota od f?

Rješenje.

(a)

$$
\begin{aligned}
f^{(2025)}(0) &= \sum_{i=0}^{2025} \binom{2025}{i} \left(x^2 + x - 1\right)^{(i)} (\cos(3x))^{(2025-i)} \\
&= (x^2 + x - 1)3^{2025} \cos^{(2025)}(3x) + 2025(2x + 1)3^{2024} \cos^{(2024)}(3x) \\
&\quad + \frac{2025 \cdot 2024}{2} \cdot 2 \cdot 3^{2023} \cos^{(2023)}(3x) \\
&= [2024 = 4 \cdot 506] \\
&= -(x^2 + x - 1)3^{2025} \sin(3x) + 2025(2x + 1) \cdot 3^{2024} \cos(3x) + 2025 \cdot 2024 \cdot 3^{2023} \sin(3x)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
f^{(2025)}(0) &= 3^{2025} \sin(3x) + 2025 \cdot 3^{2024} \cos(3x) + 2025 \cdot 2024 \cdot 3^{2023} \sin(3x) \\
&= 2025 \cdot 3^{2024}
\end{aligned}
$$

(b) Ne nužno, npr. za $f(x) = x$ vrijedi $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x+1} = 1$, ali $\lim_{x\to+\infty}(f(x) - (x + 1)) = -1 \neq 0$.

Zadatak 2. (12 bodova)

(a) Odredite limes, ako postoji
$$\lim_{x\to 0} \cos(x^{10}\sin x)\frac{\arcsin x - \operatorname{Arsh} x}{x^3}.$$

(b) Postoji li funkcija $f : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ klase C^1 takva da vrijedi $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$, ali da $f'(x)$ nije ograničena?

Rješenje.

(a) Budući da $x^{10}\sin x \to 0$, po limesu kompozicije slijedi $\cos(x^{10}\sin x) \to 1$ za $x \to 0$ pa je dovoljno pokazati da postoji i limes izraza $\frac{\arcsin x - \operatorname{Arsh} x}{x^3}$. Za to koristimo L'Hopitalovo pravio:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin x - \operatorname{Arsh} x}{x^3} = (\frac{0}{0}) \overset{L'H}{=} \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}}{3x^2} = (\frac{0}{0})$$
$$\overset{L'H}{=} \lim_{x\to 0}\frac{\frac{x}{(1-x^2)^{3/2}} + \frac{x}{(1+x^2)^{3/2}}}{6x} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{(1-x^2)^{3/2}} + \frac{1}{(1+x^2)^{3/2}}}{6} = \frac{1}{3}.$$

Konačno, po limesu produkta slijedi da je i početni limes jednak $\frac{1}{3}$.

(b) Postoji. Primjer takve funkcije je
$$f(x) = \frac{\sin(x^3)}{1+x}.$$

Kako je $|f(x)| \leq \frac{1}{x+1}$, po teoremu o sendviču slijedi $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$. S druge strane,
$$f'(x) = \frac{3x^2\cos(x^3)}{1+x} - \frac{\sin(x^3)}{(1+x)^2}$$

Promatranjem $x_n = \sqrt[3]{2\pi n}$, $n \in \mathbb{N}$ slijedi
$$\lim_{n\to\infty} f'(x_n) = \lim_{n\to\infty}\frac{3(2n\pi)^{\frac{2}{3}}}{1+(2n\pi)^{1/3}} = +\infty$$

pa zaključujemo da f' nije ograničena funkcija.

Zadatak 3. (13 bodova) Odredite prirodnu domenu i nultočke, intervale monotonosti, lokalne ekstreme, intervale konveksnosti i konkavnosti, točke infleksije, sve asimptote funkcije

$$f(x) = \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x}$$

te skicirajte njen graf.

Rješenje. Domena funkcije f je $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Funkcija nema nultočka.

Jedini kandidat za vertikalnu asimptotu je $x = 0$. Provjerimo je li doista vertikalna asimptota:

$$\lim_{x\to 0-} f(x) = \lim_{x\to 0-} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{y\to -\infty} ye^y = \lim_{y\to -\infty} \frac{y}{e^{-y}} \overset{\text{L'H}}{=} \lim_{y\to -\infty} \frac{1}{-e^{-y}} = 0,$$

$$\lim_{x\to 0+} f(x) = \lim_{x\to 0+} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x} = +\infty.$$

Dakle, $x = 0$ je vertikalna asimptota zdesna.

Derivacije od f su

$$f'(x) = \frac{e^{\frac{1}{x}} \cdot \frac{-1}{x^2} \cdot x - e^{\frac{1}{x}}}{x^2} = -\frac{e^{\frac{1}{x}}(x+1)}{x^3},$$

$$f''(x) = -\frac{\left(e^{\frac{1}{x}} \cdot \frac{-1}{x^2}(x+1) + e^{\frac{1}{x}}\right)x^3 - e^{\frac{1}{x}}(x+1)\cdot 3x^2}{x^6} = -e^{\frac{1}{x}}\frac{-x^2 - x + x^3 - 3x^3 - 3x^2}{x^6}$$

$$= e^{\frac{1}{x}}\frac{2x^2 + 4x + 1}{x^5}.$$

Vidimo da f ima stacionarnu točku u -1, strogo raste na $[-1, 0)$ i strogo pada na $(-\infty, -1]$ i $(0, +\infty)$. Dakle, f ima lokalni minimum u -1. Druga derivacija je nula za $x = \frac{-4\pm\sqrt{16-8}}{4} = \frac{-4\pm 2\sqrt{2}}{4} = -1 \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$ i vidimo da je f strogo konveksna na $[-1 - \frac{\sqrt{2}}{2}, -1 + \frac{\sqrt{2}}{2}]$ i $(0, +\infty)$ te strogo konkavna na $(-\infty, -1 - \frac{\sqrt{2}}{2}]$ i $[-1 + \frac{\sqrt{2}}{2}, 0)$. Dakle, točke infleksije su $-1 \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Sljedeće tražimo kose asimptote:

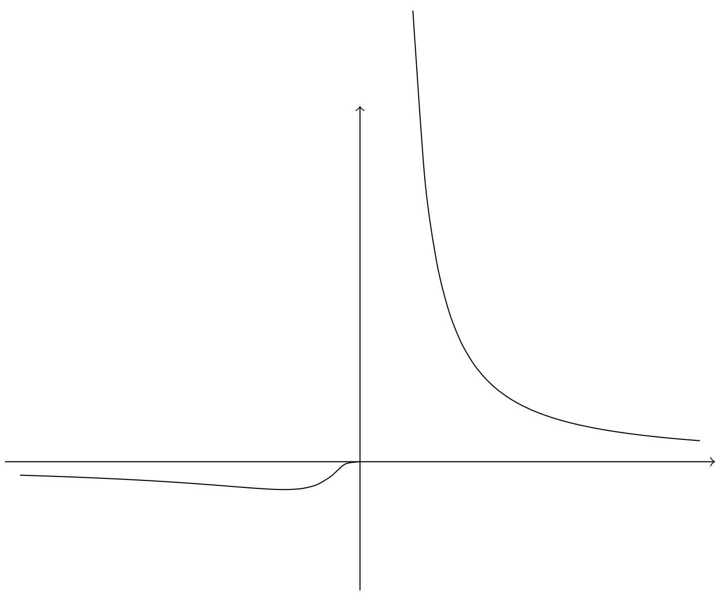
$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2} = 0,$$

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x} = 0.$$

Dakle, $y = 0$ je lijeva i desna horizontalna asimptota.

Za skiciranje u okolini nule, računamo

$$\lim_{x\to 0-} f'(x) = \lim_{x\to 0-} -\frac{e^{\frac{1}{x}}(x+1)}{x^3} = \lim_{x\to 0-} -\frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^3} = 0.$$



Zadatak 4. (13 bodova)

(a) Neka je $A = (1, 0)$ i $B = (-2, 0)$. Ako se točka T nalazi na kružnici $x^2 + y^2 = 9$, odredite koje sve vrijednosti može poprimiti izraz $|AT| + |BT|$.

(b) Odredite sve skupove na kojima strogo konveksna funkcija $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ može postizati maksimum.

Rješenje.

(a) Iz Pitagorinog poučka za točku $T = (x, y)$ na kružnici $x^2 + y^2 = 9$ vrijedi

$$|AT| + |BT| = \sqrt{(x-1)^2 + y^2} + \sqrt{(x+2)^2 + y^2} = \sqrt{10 - 2x} + \sqrt{13 + 4x}$$

Budući da se x nalazi na kružnici $x^2 + y^2 = 9$, vrijedi $x^2 \leq 9$, tj. $x \in [-3, 3]$ i za svaki takav x postoji y koji se nalazi na kružnici pa je potrebno odrediti sliku funkcije $f : [-3, 3] \to \mathbb{R}$ zadane s

$$f(x) = \sqrt{10 - 2x} + \sqrt{13 + 4x}$$

Vrijedi:

$$f'(x) = -\frac{1}{\sqrt{10 - 2x}} + \frac{2}{\sqrt{13 + 4x}}$$

Primijetimo da je $f'(x_0) = 0$ za $x_0 = \frac{9}{4}$. Nadalje računamo

$$f''(x) = -\frac{1}{(10 - 2x)^{\frac{3}{2}}} - \frac{4}{(13 + 4x)^{\frac{3}{2}}} < 0$$

pa zaključujemo da je $f'(x)$ strogo padajuća funkcija. Odatle slijedi da je $f'(x) > 0$ za $x < x_0$ i $f'(x) < 0$ za $x > x_0$ pa je funkcija f strogo rastuća na intervalu $[-3, \frac{9}{4}]$ i strogo padajuća na intervalu $[\frac{9}{4}, 7]$. Dakle, maksimum funkcije postiže se u točki $x_0 = \frac{9}{4}$ i jednak je $\frac{3\sqrt{22}}{2}$, dok se minimum postiže u nekom od rubova. Uvrštavanjem dobijemo $f(-3) = 5$ i $f(3) = 7$ pa zaključujemo da je minimum jednak 5. Konačno, budući da je f neprekidna, po teoremu o međuvrijednosti slijedi

$$f([-3, 3]) = \left[5, \frac{3\sqrt{22}}{2}\right].$$

(b) Označimo $M = \max\{f(0), f(1)\}$. Iz definicije strogo konveksne funkcije, za $t \in (0, 1)$ vrijedi

$$f(t) < (1 - t)f(0) + tf(1) \leq (1 - t)M + tM = M.$$

Dakle, vrijednost funkcije u svakoj točki iz $(0, 1)$ manja je od maksimuma vrijednosti u rubovima pa se maksimum sigurno postiže i jednak je M. Odatle slijedi da je skup na kojemu se maksimum positže neprazan podksup od $\{0, 1\}$. Da pokažemo da su moguće sve tri mogućnosti: $\{0\}, \{1\}, \{0, 1\}$, promotrimo funkcije $f_1(x) = (x - 1)^2$, $f_2(x) = x^2$, $f_3(x) = (x - \frac{1}{2})^2$.