MATEMATIČKA ANALIZA 2

Pismeni ispit – 9. srpnja 2025.

Zadatak 1. (25 bodova) Odredite prirodnu domenu i nultočke, intervale monotonosti, lokalne ekstreme, intervale konveksnosti i konkavnosti, točke infleksije, sve asimptote funkcije

$$f(x) = \ln\left(\frac{x^3 - x}{6}\right)$$

te skicirajte njen graf.

Rješenje. Vidimo da je $x \in \mathbb{R}$ u prirodnoj domeni funkcije f ako i samo ako $x^3 - x > 0$, tj. $x(x-1)(x+1) > 0$. Dakle, prirodna domena je $D = \langle -1, 0\rangle \cup \langle 1, +\infty\rangle$.

Nultočke funkcije f su x takvi da $\frac{x^3-x}{6} = 1$, tj. $x^3 - x - 6 = (x-2)(x^2+2x+3) = 0$. Slijedi da je jedina nultočka $x = 2$.

Derivacija je

$$f'(x) = \frac{3x^2 - 1}{x^3 - x}.$$

Vidimo da je $f'(x) = 0$ ako i samo ako je $x = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$. S obzirom da $-\frac{1}{\sqrt{3}} \in \langle -1, 0\rangle \subset D$, a $\frac{1}{\sqrt{3}} \notin D$, slijedi da je $x = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ jedina stacionarna točka. Također vidimo da je $f'(x) > 0$ ako i samo ako je $x \in \left\langle -1, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right\rangle \cup \left\langle 0, \frac{1}{\sqrt{3}}\right\rangle \cup \langle 1, +\infty\rangle$, a $f'(x) < 0$ ako i samo ako je $x \in \langle -\infty, -1\rangle \cup \left\langle -\frac{1}{\sqrt{3}}, 0\right\rangle \cup \left\langle \frac{1}{\sqrt{3}}, 1\right\rangle$. Dakle, f je strogo rastuća na $\left\langle -1, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right]$ i $\langle 1, +\infty\rangle$, a strogo padajuća na $\left[-\frac{1}{\sqrt{3}}, 0\right\rangle$. Slijedi da je $x = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ je lokalni maksimum sa vrijednosti

$$f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \ln\left(\frac{-\frac{1}{3\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}}}{6}\right) = \ln\left(\frac{\frac{2}{3\sqrt{3}}}{6}\right) = \ln\left(\frac{1}{9\sqrt{3}}\right) = -\ln\left(9\sqrt{3}\right) = -\frac{5}{2}\ln(3).$$

Druga derivacija je

$$f''(x) = \frac{(6x)(x^3 - x) - (3x^2 - 1)(3x^2 - 1)}{(x^3 - x)^2} = \frac{6x^4 - 6x^2 - 9x^4 + 6x^2 - 1}{(x^3 - x)^2} = \frac{-3x^4 - 1}{(x^3 - x)^2}.$$

Vidimo da je $f(x) < 0$ za sve $x \in D$. Dakle, f je strogo konkavna na $\langle -1, 0\rangle$ i $\langle 1, +\infty\rangle$, i nema točke infleksije.

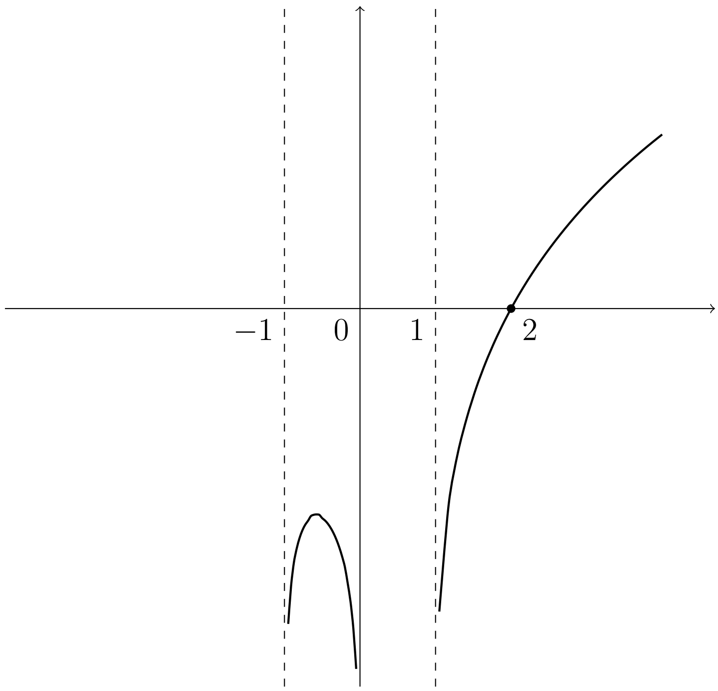
Kandidati za vertikalne asimptote su $x = -1$, $x = 0$ i $x = 1$,

$$\lim_{x \to -1+} f(x) = \lim_{x \to -1+} \ln\left(\frac{x(x-1)(x+1)}{6}\right) = -\infty,$$
$$\lim_{x \to 0-} f(x) = \lim_{x \to 0-} \ln\left(\frac{x(x-1)(x+1)}{6}\right) = -\infty,$$
$$\lim_{x \to 1+} f(x) = \lim_{x \to 1+} \ln\left(\frac{x(x-1)(x+1)}{6}\right) = -\infty.$$

Doista, sve su to vertikalne asimptote. Provjeravamo ima li funkcija kose asimptote:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} \overset{\text{L'H}}{=} \lim_{x \to +\infty} f'(x) = 0, \qquad \lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty.$$

Dakle, f nema kose ili horizontalne asimptote.


−1
0
1
2

Zadatak 2. (25 bodova)

(a) (15 bodova) Odredite

$$\int x^3 e^{-x^2}\,\mathrm{d}x.$$

(b) (10 bodova) Ispitajte konvergenciju nepravog integrala

$$\int_{0\leftarrow}^{\rightarrow 1} \frac{1}{\sqrt{-\ln x}}\,\mathrm{d}x.$$

Rješenje.

(a)

$$\int x^3 e^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \begin{bmatrix} t = x^2 \\ \mathrm{d}t = 2x\,\mathrm{d}x \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\int t e^{-t}\,\mathrm{d}t = \begin{bmatrix} u = t & \mathrm{d}u = \mathrm{d}t \\ \mathrm{d}v = e^{-t}\,\mathrm{d}t & v = -e^{-t} \end{bmatrix} = -\frac{1}{2}te^{-t} + \frac{1}{2}\int e^{-t}\,\mathrm{d}t$$
$$= -\frac{1}{2}te^{-t} - \frac{1}{2}e^{-t} + C = -\frac{1}{2}e^{-t}(t+1) + C = -\frac{1}{2}e^{-x^2}(x^2+1) + C$$

(b) Prema definiciji, nepravi integral konvergira ako i samo ako konvergiraju slijedeći nepravi integrali:

$$\int_{0\leftarrow}^{1/2} \frac{1}{\sqrt{-\ln x}}\,\mathrm{d}x, \qquad (1) \qquad\qquad \int_{1/2}^{\rightarrow 1} \frac{1}{\sqrt{-\ln x}}\,\mathrm{d}x. \qquad (2)$$

Vidimo da je

$$\lim_{x\to 0+} \frac{1}{\sqrt{-\ln x}} = 0,$$

iz čega slijedi da (1) konvergira jer je $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{-\ln x}}$ neprekidna i ograničena funkcija na intervalu $\langle 0, 1/2]$. Zatim vidimo

$$\int_{1/2}^{\rightarrow 1} \frac{1}{\sqrt{-\ln x}}\,\mathrm{d}x = \lim_{\xi\to 1}\int_{1/2}^{\xi} \frac{1}{\sqrt{-\ln x}}\,\mathrm{d}x = \begin{bmatrix} t = 1-x & \frac{1}{2} \mapsto \frac{1}{2} \\ \mathrm{d}t = -\,\mathrm{d}x & \xi \mapsto 1-\xi \end{bmatrix} = \lim_{\xi\to 1}\int_{1-\xi}^{1/2} \frac{1}{\sqrt{-\ln(1-t)}}\,\mathrm{d}t$$
$$= \int_{0\leftarrow}^{1/2} \frac{1}{\sqrt{-\ln(1-t)}}\,\mathrm{d}t. \qquad (3)$$

Koristeći da je $\ln(1+x) \leq x$ za sve $x > -1$, slijedi da je $\ln(1-t) \leq -t$ za sve $t < 1$, a time i $-\ln(1-t) \geq t$ za sve $t < 1$. Stoga je

$$\frac{1}{\sqrt{-\ln(1-t)}} \leq \frac{1}{\sqrt{t}}, \quad \forall t \in \langle 0, 1\rangle.$$

S obzirom da nepravi integral $\int_{0\leftarrow}^{1/2} \frac{1}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$ konvergira, prema usporednom kriteriju, konvergira i (3), čime i (2). Dakle, jer (1) i (2) konvergiraju, zaključujemo da konvergira i zadani nepravi integral.

Zadatak 3. (25 bodova)

(a) (20 bodova) Razvijte funkciju u red potencija oko 0 i odredite radijus i interval konvergencije

$$f(x) = \left(\frac{x}{5+x^3}\right)^2.$$

(b) (5 bodova) Nađite primjer reda potencija koji ima interval konvergencije jednak $[-1,1]$.

Rješenje.

(a)

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \quad \Big/' \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) x^n$$

$$f(x) = \frac{x^2}{(5+x^3)^2} = \frac{x^2}{25}\cdot\frac{1}{\left(1+\frac{1}{5}x^3\right)^2} = \frac{x^2}{25}\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\left(-\frac{1}{5}x^3\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(n+1)}{5^{n+2}}x^{3n+2}$$

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[3n+2]{\frac{n+1}{5^{n+2}}} = \lim_{n\to\infty}\frac{\left(\sqrt[n+1]{n+1}\right)^{\frac{n+1}{3n+2}}}{5^{\frac{n+2}{3n+2}}} = \frac{1}{\sqrt[3]{5}} \quad \Rightarrow \quad R = \sqrt[3]{5}$$

Za $x = -\sqrt[3]{5}$ red potencija je

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+3n+2}(n+1)5^{\frac{3n+2}{3}-n-2} = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)5^{-\frac{4}{3}},$$

a za $x = \sqrt[3]{5}$ je

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(n+1)5^{-\frac{4}{3}}.$$

U oba slučaja članovi reda ne konvergiraju u 0 pa nužni uvjet konvergencije nije zadovoljen. Dakle, redovi ne konvergiraju. Konačno, interval konvergencije je $\langle -\sqrt[3]{5}, \sqrt[3]{5}\rangle$.

(b) Promotrimo red potencija

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}x^{2n}.$$

Članovi tog reda su

$$a_n = \begin{cases} \frac{(-1)^k}{k}, & n = 2k, \\ 0, & n = 2k+1 \end{cases}$$

i vrijedi

$$\lim_{k\to\infty}\sqrt[2k]{|a_{2k}|} = \lim_{k\to\infty}\sqrt[2k]{\frac{1}{k}} = \lim_{k\to\infty}\frac{1}{\left(\sqrt[k]{k}\right)^{\frac{k}{2k}}} = 1, \quad \text{i} \quad \lim_{k\to\infty}\sqrt[2k+1]{|a_{2k+1}|} = \lim_{k\to\infty} 0 = 0.$$

Odatle slijedi da je skup gomilišta niza $\sqrt[n]{|a_n|}$ jednak $\{0,1\}$ pa je

$$\limsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|} = 1.$$

Dakle, radijus konvergencije jednak 1. Za $x = \pm 1$ dobijemo red $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$, koji konvergira prema Leibnizovom kriteriju.

Alternativno rješenje. Za red potencija

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$$

vrijedi $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n^2}} = 1$ pa je radijus konvergencije jednak 1.

Za $x = 1$, red $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ konvergira po integralnom kriteriju, zbog toga što je $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} dx < \infty$.

Za $x = -1$ dobijemo red $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$. Kako smo dokazali da je on apsolutno konvergentan, slijedi da je i konvergentan. Dakle, interval konvergencije je $[-1, 1]$.

Zadatak 4. (25 bodova)

(a) (15 bodova) Odredite konvergira li red

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n \ln n + 1}{n^2+1}.$$

(b) (10 bodova) Neka je $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergentan red realnih brojeva.

(b1) Konvergira li nužno red $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$?

(b2) Mijenja li se zaključak ukoliko dodatno pretpostavimo da je $a_n \geq 0$ za sve $n \in \mathbb{N}$?

Rješenje.

(a) Promotrimo najprije funkciju $f(x) = \frac{x \ln x}{x^2+1}$. Vrijedi

$$f'(x) = \frac{-x^2 \ln x + x^2 + \ln x + 1}{(x^2+1)^2} = \frac{2 - (x^2-1)(\ln x - 1)}{(x^2+1)^2}.$$

Zbog $e > 2$, za $x > e^2$ vrijedi

$$2 - (x^2-1)(\ln x - 1) < 2 - (4-1)(2-1) < 0$$

pa je f sigurno padajuća na $[e^2, \infty)$. Po Leibnizovom kriteriju (zbog $e^2 < 9$), to znači da alternirajući red $\sum_{n=9}^{\infty} (-1)^n \frac{n \ln n}{n^2+1}$ konvergira. Po definiciji konvergencije reda slijedi da i red $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n \ln n}{n^2+1}$ konvergira.

Koristeći tvrdnju dokazanu na vježbama, da red $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ konvergira (koja slijedi iz integralnog kriterija), zbog toga što je $\frac{1}{n^2+1} < \frac{1}{n^2}$ slijedi da i red $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+1}$ konvergira.

Konačno, koristeći teorem s predavanja da za konvergentne redove $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ i $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ vrijedi da je i red $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$ konvergentan, slijedi da je i traženi red konvergentan.

(b) (b1) Ne nužno. Promotrimo red za $a_n := \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$. Budući da je $n \mapsto \frac{1}{\sqrt{n}}$ padajuća funkcija (kao kompozicija padajuće i rastuće), red $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergira po Leibnizovom kriteriju. Međutim, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty$ pa zaključujemo da red $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ne konvergira.

(b2) Ukoliko je $a_n \geq 0$ za sve $n \in \mathbb{N}$, tvrdnja vrijedi. Naime, ako red $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergira, tada po teoremu s predavanja vrijedi $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, što znači da postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da je $0 \leq a_n \leq 1$ za sve $n \geq n_0$. Međutim, tada vrijedi $a_n^2 \leq a_n$ pa po usporednom kriteriju vrijedi tvrdnja.