MATEMATIČKA ANALIZA 2

Pismeni ispit – 29. kolovoza 2025.

Zadatak 1. (25 bodova) Odredite prirodnu domenu, nultočke, intervale monotonosti, lokalne ekstreme, intervale konveksnosti i konkavnosti, točke infleksije i sve asimptote funkcije

$$f(x) = \frac{x^2 - 4}{x^2 - 1}$$

te skicirajte njen graf.

Rješenje. Vidimo da je x u prirodnoj domeni ako i samo ako $x^2 - 1 \neq 0$. Dakle, prirodna domena je $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$.

Nultočke funkcije su x takvi da je $x^2 - 4 = 0$, tj. $x \in \{-2, 2\}$.

Derivacija funkcije je

$$f'(x) = \frac{2x(x^2-1) - (x^2-4)2x}{(x^2-1)^2} = \frac{2x(x^2 - 1 - x^2 + 4)}{(x^2-1)^2} = \frac{6x}{(x^2-1)^2}.$$

Vidimo da je $f(x) > 0$ ako i samo ako je $x \in \langle 0, 1\rangle \cup \langle 1, +\infty\rangle$, a $f(x) < 0$ ako i samo ako je $x \in \langle -\infty, -1\rangle \cup \langle -1, 0\rangle$. Zaključujemo da je f strogo rastuća na $[0, 1\rangle$ i $\langle 1, +\infty\rangle$, a strogo padajuća na $\langle -\infty, -1\rangle$ i $\langle -1, 0]$. Dodatno, jer je $f'(x) = 0$ ako i samo ako je $x = 0$ te je f strogo padajuća na $\langle -1, 0]$ i strogo rastuća na $[0, 1\rangle$, zaključujemo da je $x = 0$ jedini lokalni ekstrem, i to lokalni minimum sa vrijednosti $f(0) = 4$.

Druga derivacija funkcije je

$$f''(x) = \frac{6(x^2-1)^2 - 6x \cdot 2(x^2-1)2x}{(x^2-1)^4} = \frac{6(x^2 - 1 - 4x^2)}{(x^2-1)^3} = \frac{-6(3x^2+1)}{(x^2-1)^3}.$$

Vidimo da je $f''(x) > 0$ ako i samo ako je $x^2 - 1 < 0$, tj. $x \in \langle -1, 1\rangle$. Slično vidimo da je $f''(x) < 0$ ako i samo ako je $x^2 - 1 > 0$, tj. $x \in \langle -\infty, -1\rangle \cup \langle 1, +\infty\rangle$. Slijedi da je f strogo konveksna na $\langle -1, 1\rangle$, a strogo konkavna na $\langle -\infty, -1\rangle$ i $\langle 1, +\infty\rangle$. Dodatno, f nema točke infleksije jer je $f''(x) \neq 0$ za sve x u prirodnoj domeni od f.

Kandidati za vertikalne asimptote su $x = -1$ i $x = 1$:

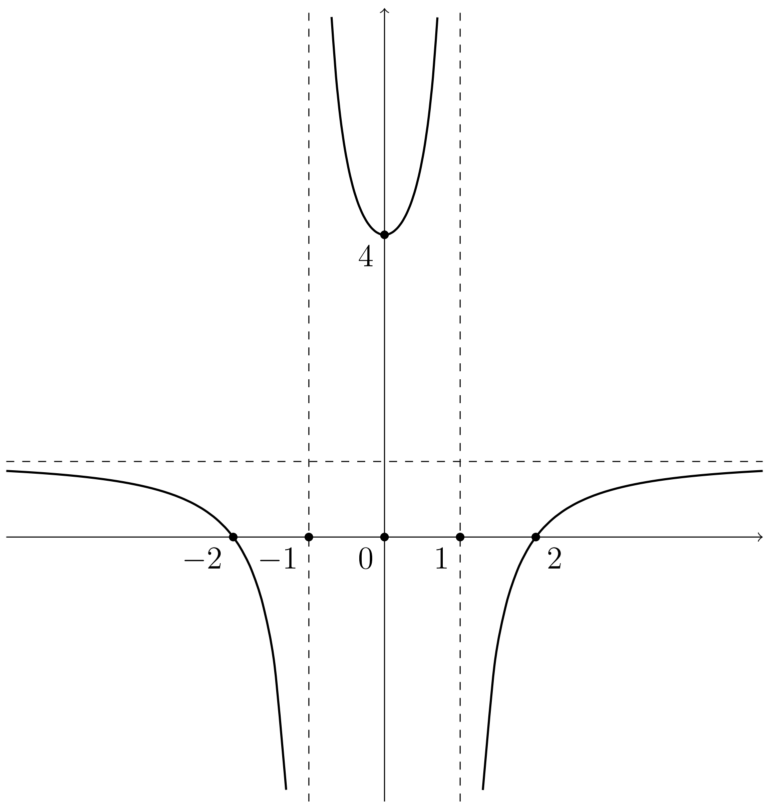
$$\lim_{x \to -1-} f(x) = \lim_{x \to -1-} \frac{x^2 - 4}{(x-1)(x+1)} = -\infty,$$
$$\lim_{x \to -1+} f(x) = \lim_{x \to -1+} \frac{x^2 - 4}{(x-1)(x+1)} = +\infty,$$
$$\lim_{x \to 1-} f(x) = \lim_{x \to 1-} \frac{x^2 - 4}{(x-1)(x+1)} = +\infty,$$
$$\lim_{x \to 1+} f(x) = \lim_{x \to 1+} \frac{x^2 - 4}{(x-1)(x+1)} = -\infty.$$

Dakle, $x = -1$ i $x = 1$ su vertikalne asimptote. Zatim provjeravamo ima li funkcija kose ili horizontalne asimptote:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to \infty} \frac{x^2 - 4}{x^3 - x} = 0,$$
$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \lim_{x \to \infty} \frac{x^2 - 4}{x^2 - 1} = 1.$$

Slijedi da je $y = 1$ jedina kosa (ujedno i horizontalna) asimptota od f, i to slijeva i zdesna.

Skica funkcije:


4
−2
−1
0
1
2

Zadatak 2. (25 bodova)

(a) Odredite neodređeni integral

$$\int \sqrt{1-\frac{1}{x}}\,dx$$

(b) Neka je $f:[0,2\pi]\to[0,\infty\rangle$ padajuća funkcija. Dokažite da vrijedi

$$\int_0^{2\pi} f(x)\sin(x)\,dx \geq 0.$$

Rješenje.

1. Vrijedi

$$\begin{aligned}\int \sqrt{1-\frac{1}{x}}\,dx &= \left|\begin{matrix} u=\sqrt{1-\frac{1}{x}} \\ dx=\frac{2udu}{(1-u^2)^2}\end{matrix}\right| = \int \frac{2u^2}{1-u^2}du = \frac{u}{1-u^2} - \int \frac{1}{1-u^2}du \\ &= \frac{u}{1-u^2} - \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+u}{1-u}\right| + C = \sqrt{x^2-x} - \frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{x}+\sqrt{x-1}}{\sqrt{x}-\sqrt{x-1}}\right| + C\end{aligned}$$

2. Rastavimo područje integracije i iskoristimo $\sin(x+\pi)=-\sin(x)$:

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} f(x)\sin(x)\,dx &= \int_0^{\pi} f(x)\sin(x)dx + \int_{\pi}^{2\pi} f(x)\sin(x)dx \\ &= \int_0^{\pi} \underbrace{(f(x)-f(x+\pi))}_{\geq 0}\underbrace{\sin(x)}_{\geq 0}\,dx \geq 0.\end{aligned}$$

Zadatak 3. (25 bodova)

(a) Ispitajte konvergenciju nepravog integrala

$$\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x^2}\,\mathrm{d}x.$$

Ako konvergira, odredite mu vrijednost.

(b) Ispitajte konvergenciju reda

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{(2n)!}.$$

Rješenje.

(a)

$$\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x^2}\,\mathrm{d}x = \lim_{\xi\to+\infty} \int_1^{\xi} \frac{\ln x}{x^2}\,\mathrm{d}x = \begin{bmatrix} u = \ln x & \mathrm{d}u = \frac{\mathrm{d}x}{x} \\ \mathrm{d}v = \frac{\mathrm{d}x}{x^2} & v = -\frac{1}{x} \end{bmatrix} = \lim_{\xi\to+\infty} \left(-\frac{\ln x}{x}\Big|_1^{\xi} + \int_1^{\xi} \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x \right)$$
$$= \lim_{\xi\to+\infty} \left(-\frac{\ln \xi}{\xi} - \frac{1}{\xi} + 1 \right) = 1.$$

Dakle, integral konvergira i vrijednost mu je 1.

(b) Promatramo omjer članova reda $a_n = \frac{n^n}{(2n)!}$:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{(n+1)^{n+1}}{(2n+2)!}}{\frac{n^n}{(2n)!}} = \frac{(n+1)^n}{n^n} \cdot \frac{n+1}{(2n+2)(2n+1)} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \frac{n+1}{(2n+2)(2n+1)}.$$

Dakle

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = e \cdot 0 = 0.$$

Prema D'Alembertovom kriteriju, red konvergira.

Zadatak 4. (25 bodova)

(a) Odredite Taylorov red funkcije $f(x) = (x-2)\ln x$ oko točke $c = 2$ i odredite mu interval konvergencije.

(b) Postoje li funkcija $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ i nenul polinom p takvi da Maclaurinovi redovi funkcija f i g, gdje je $g(x) := p(x)f(x)$, imaju različite radijuse konvergencije?

Rješenje.

(a) Označimo $y = x - 2$. Koristeći tablični razvoj:

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n \quad x \in \langle -1, 1\rangle,$$

za $y \in \langle -1, 1\rangle$ slijedi:

$$\begin{aligned}
(x-2)\ln x = y\ln(y+2) &= y\ln(2(1+\frac{y}{2})) = y\ln 2 + y \cdot \ln\left(1+\frac{y}{2}\right) \\
&= y\ln 2 + y\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}y^n}{n2^n} \\
&= y\ln 2 + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n-2}}{(n-1)2^{n-1}} y^n \\
&= (x-2)\ln 2 + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n-1)2^{n-1}} (x-2)^n.
\end{aligned}$$

Znamo ddoatno da Maclaurinov red za $\ln(1+x)$ konvergira na intervalu $\langle -1, 1]$ budući da je za $x = 1$ dani red jednak redu $\sum_{n=1}^\infty \frac{(-1)^{n-1}}{n}$, koji konvergira po Leibnizovom kriteriju, dok je za $x = -1$ red jednak redu $-\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n}$, koji je poznati harmonijski red za koji smo pokazali da divergira. Dakle, gornji red konvergira ako i samo ako je $y/2 \in \langle -1, 1]$, tj. ako je $y \in \langle -2, 2]$. Prema tome, traženi Taylorov red konvergira ako i samo ako je $x \in 2 + \langle -2, 2] = \langle 0, 4]$.

(b) Postoje. Neka je $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ i $p(x) = 1 + x^2$. Iz razvoja

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

slijedi

$$\frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}.$$

Dakle, $f(x) = \sum_{n=0}^\infty a_n x^n$, gdje je

$$a_n = \begin{cases} (-1)^m, & n = 2m \\ 0, & \text{inače}, \end{cases}$$

iz čega je očito $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 1$, tj. radijus konvergencije jednak je 1. S druge strane, $g(x) = 1$ pa Maclaurinov red ima radijus konvergencije jednak $+\infty$.