MATEMATIČKA ANALIZA 2

Pismeni ispit – 11. rujna 2025.

Zadatak 1. (25 bodova) Odredite prirodnu domenu, nultočke, intervale monotonosti, lokalne ekstreme, intervale konveksnosti i konkavnosti, točke infleksije i sve asimptote funkcije

$$f(x) = \arcsin\left(\frac{1}{\operatorname{ch} x}\right)$$

te skicirajte njen graf.

Rješenje. Vidimo da je prirodna domena funkcije cijeli $\mathbb{R}$ jer je $0 < \frac{1}{\operatorname{ch} x} \leq 1$ za sve $x \in \mathbb{R}$.

S obzirom da je $\frac{1}{\operatorname{ch} x}$ pozitivno za sve $x \in \mathbb{R}$, slijedi da je i $f(x)$ pozitivno za sve $x \in \mathbb{R}$. Dakle, f nema nultočaka.

Derivacija je

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}}} \cdot (-1) \cdot \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x} \cdot \operatorname{sh} x = -\frac{\operatorname{ch} x}{\sqrt{\operatorname{ch}^2 x - 1}} \cdot \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch}^2 x} = -\frac{\operatorname{sh} x}{|\operatorname{sh} x| \operatorname{ch} x} = -\frac{\operatorname{sgn}(\operatorname{sh} x)}{\operatorname{ch} x}$$

za $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Vidimo da je $f(x) > 0$ ako i samo ako je $x < 0$, a $f(x) < 0$ ako i samo ako je $x > 0$. S obzirom da je f neprekidna na $\mathbb{R}$, slijedi da je f strogo rastuća na $\langle -\infty, 0]$ te strogo padajuća na $[0, \infty\rangle$. Jedina kritična točka je $x = 0$, i vidimo da je ona lokalni maksimum s vrijednosti $f(0) = \arcsin 1 = \frac{\pi}{2}$.

Druga derivacija je:

- za $x < 0$: $f''(x) = -\frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch}^2 x}$,
- za $x > 0$: $f''(x) = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch}^2 x}$,

tj.

$$f''(x) = \frac{|\operatorname{sh} x|}{\operatorname{ch}^2 x}$$

za sve $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Slijedi da je $f''(x) > 0$ za sve $x \neq 0$. Zaključujemo da je f konveksna na $\langle -\infty, 0]$ i $[0, \infty\rangle$, te nema točke infleksije.

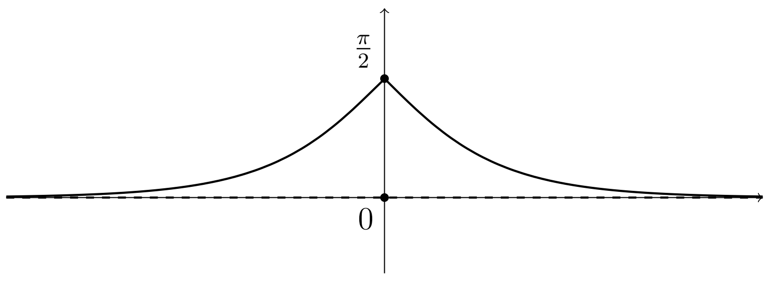
Funkcija nema vertikalne asimptote. Provjeravamo ima li kose:

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{\arcsin\left(\frac{1}{\operatorname{ch} x}\right)}{x} = 0,$$

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \lim_{x \to \pm\infty} \arcsin\left(\frac{1}{\operatorname{ch} x}\right) = 0.$$

Dakle, f jedino ima horizontalnu asimptotu $y = 0$.

Skica funkcije:



Zadatak 2. (25 bodova)

(a) Izračunajte integral

$$\int \frac{5x+4}{\sqrt{x^2-2x+5}}\,\mathrm{d}x.$$

(b) Ispitajte konvergenciju nepravog integrala u ovisnosti o parametru $p \in \mathbb{R}$

$$\int\limits_0^\infty \frac{e^{-x}}{x^p}\,\mathrm{d}x.$$

Rješenje.

(a)

$$\begin{aligned}
\int \frac{5x+4}{\sqrt{x^2-2x+5}}\,\mathrm{d}x &= \int \frac{5x+4}{\sqrt{(x-1)^2+4}}\,\mathrm{d}x = \begin{bmatrix} t = x-1 \\ \mathrm{d}t = \mathrm{d}x \end{bmatrix} = \int \frac{5(t+1)+4}{\sqrt{t^2+4}}\,\mathrm{d}t \\
&= 5\int \frac{t}{\sqrt{t^2+4}}\,\mathrm{d}t + 9\int \frac{1}{\sqrt{t^2+4}}\,\mathrm{d}t \\
&= 5\sqrt{t^2+4} + \frac{9}{2}\operatorname{Arsh}\left(\frac{t}{2}\right) + C \\
&= 5\sqrt{x^2-2x+5} + \frac{9}{2}\operatorname{Arsh}\left(\frac{x-1}{2}\right) + C
\end{aligned}$$

(b) Potrebno je ispitati konvergenciju dva neprava integrala

$$\int\limits_0^1 \frac{e^{-x}}{x^p}\,\mathrm{d}x \quad \text{i} \quad \int\limits_1^\infty \frac{e^{-x}}{x^p}\,\mathrm{d}x.$$

Iz

$$\lim_{x\to 0+} \frac{\frac{e^{-x}}{x^p}}{\frac{1}{x^p}} = \lim_{x\to 0+} e^{-x} = 1,$$

prema graničnom kriteriju slijedi da $\int\limits_0^1 \frac{e^{-x}}{x^p}\,\mathrm{d}x$ konvergira ako i samo ako konvergira $\int\limits_0^1 \frac{1}{x^p}\,\mathrm{d}x$, tj. ako i samo ako $p < 1$.

Za $p \geq 0$, $\int\limits_1^\infty \frac{e^{-x}}{x^p}\,\mathrm{d}x$ konvergira prema usporednom kriteriju jer $\frac{e^{-x}}{x^p} \leq e^{-x}$ za svaki $x \geq 1$ i

$$\int\limits_1^\infty e^{-x}\,\mathrm{d}x = \lim_{\xi\to+\infty}(-e^{-\xi} + e^{-1}) = \frac{1}{e}.$$

Za $p < 0$, postoji $M > 1$ takav da $x^{-p} < e^{x/2}$ za sve $x \geq M$. Time $\int\limits_M^\infty \frac{e^{-x}}{x^p}\,\mathrm{d}x$ konvergira prema usporednom kriteriju jer $\frac{e^{-x}}{x^p} \leq e^{-x/2}$ za svaki $x \geq M$ i

$$\int\limits_M^\infty e^{-x/2}\,\mathrm{d}x = 2e^{-M/2}.$$

Slijedi da $\int\limits_1^\infty \frac{e^{-x}}{x^p}\,\mathrm{d}x$ konvergira za svaki $p \in \mathbb{R}$.

Dakle, zadani nepravi integral konvergira ako i samo ako $p < 1$.

Zadatak 3. (25 bodova)

(a) Ispitajte konvergenciju reda

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n + \sin(\frac{1}{n})}{n}.$$

(b) Neka je $(a_n)_n$ niz pozitivnih brojeva takvih da je $a_1 = a_2 = 1$ i za sve $n \geq 2$ vrijedi $a_n < \sqrt{a_{n-1}a_{n+1}}$. Konvergira li nužno red

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n}?$$

Mijenja li se odgovor ako uvjet zamijenimo s $a_n \leq \sqrt{a_{n-1}a_{n+1}}$?

Rješenje.

(a) Red $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ konvergira po Leibnizovom kriteriju budući da je $n \mapsto \frac{1}{n}$ padajuć niz koji konvergira u 0. S druge strane, iz ocjene $\sin x \leq x$, koja vrijedi za $x \geq 0$, slijedi

$$0 \leq \sin(\frac{1}{n}) \leq \frac{1}{n}.$$

Red

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

konvergira po integralnom kriteriju zbog toga što je $x \mapsto \frac{1}{x}$ nenegativna padajuća funkcija i

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2} = 1 < \infty$$

pa po usporednom kriteriju konvergira i red

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin(\frac{1}{n}).$$

Konačno, traženi red konvergira kao zbroj dva konvergentna reda.

(b) Uvjet zadatka ekvivalentan je s:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} > \frac{a_n}{a_{n-1}}.$$

Iz uvjeta $a_1 = a_2 = 1$ i gornje jednadžbe za $n = 2$ slijedi $q := \frac{a_3}{a_2} > 1$. Označimo li $q := \frac{a_3}{a_2} > 1$, iz uvjeta slijedi induktivno da za $n \geq 3$ slijedi:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} > \frac{a_n}{a_{n-1}} > \dots \frac{a_3}{a_2} = q.$$

Odatle slijedi

$$\left| \frac{1/a_{n+1}}{1/a_n} \right| < q < 1.$$

Dakle, niz konvergira po D'Alambertovom kriteriju. U slučaju da nejednakost zamijenimo s jednakosti, tvrdnja ne mora vrijediti jer je tvrdna zadovoljena ako je $a_n = 1$ za sve $n \in \mathbb{N}$, a takav red divergira.

Zadatak 4. (25 bodova)

(a) Odredite Maclaurinov red funkcije $f(x) = (x^2+1)\operatorname{arctg} x$ i odredite mu interval konvergencije.

(b) Izračunajte sumu reda

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n(2n+1)2^{n+1}}.$$

Rješenje.

(a) Vidimo da za $|x| < 1$

$$\begin{aligned} f(x) = x^2 \operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} x &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+3}}{2n+1} + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{2n+1}}{2n-1} + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{2n+1} \end{aligned}$$

za $a_0 = 1$ i

$$a_n = \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} + \frac{(-1)^n}{2n+1} = (-1)^{n+1}\left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1}\right) = (-1)^{n+1} \frac{2}{(2n-1)(2n+1)}.$$

Prema Leibnizovom kriteriju, red potencija konvergira za $x = 1$ i $x = -1$. Dakle, interval konvergencije je $[-1, 1]$.

(b) Iz, za $|x| < 1$,

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}$$

slijedi

$$\ln(1+x^2) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{2n}}{n}.$$

Integriranjem dobivamo

$$\begin{aligned} \int_0^x \ln(1+t^2)\,\mathrm{d}t &= \begin{bmatrix} u = \ln(1+t^2) & \mathrm{d}u = \frac{2t}{1+t^2}\,\mathrm{d}t \\ \mathrm{d}v = \mathrm{d}t & v = t \end{bmatrix} = t\ln(1+t^2)\Big|_0^x - \int_0^x \frac{2t^2}{1+t^2}\,\mathrm{d}t \\ &= x\ln(1+x^2) - 2\int_0^x \left(1 - \frac{1}{1+t^2}\right)\mathrm{d}t \\ &= x\ln(1+x^2) - 2x + 2\operatorname{arctg} x, \end{aligned}$$

i time

$$x\ln(1+x^2) - 2x + 2\operatorname{arctg} x = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{2n+1}}{n(2n+1)}.$$

Množenjem sa x slijedi

$$x^2\ln(1+x^2) - 2x^2 + 2x\operatorname{arctg} x = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{2n+2}}{n(2n+1)}.$$

Uvrštavanjem $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n(2n+1)2^{n+1}} = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{3}{2}\right) - 1 + \sqrt{2}\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$