

MATEMATIČKA ANALIZA 2

Prvi kolokvij – 29. travnja 2026.

Zadatak 1. (4+8=12 bodova) Zadana je funkcija $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = x + 2\sqrt{1+x^2}.$$

(a) Dokažite da za sve $x \in \mathbb{R}$ vrijedi

$$f(x) = xf'(x) + (1+x^2)f''(x).$$

(b) Odredite $f^{(2025)}(0)$.

Rješenje.

(a) Računamo prvu i drugu derivaciju od f :

$$f'(x) = 1 + \frac{2x}{\sqrt{1+x^2}}, \quad f''(x) = 2 \frac{\sqrt{1+x^2} - x \cdot \frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}}{1+x^2} = \frac{2}{(1+x^2)^{3/2}}.$$

Direktnim računom dobivamo

$$xf'(x) + (1+x^2)f''(x) = x + \frac{2x^2}{\sqrt{1+x^2}} + \frac{2}{\sqrt{1+x^2}} = x + \frac{2(x^2+1)}{\sqrt{x^2+1}} = x + 2\sqrt{x^2+1}.$$

Budući da je dobiveni izraz jednak $f(x)$, tvrdnja je dokazana.

(b) Iz dijela (a) imamo diferencijalnu jednadžbu:

$$(1+x^2)f''(x) + xf'(x) = f(x).$$

Deriviranjem ove jednadžbe $n-2$ puta (za $n \geq 2$) i korištenjem Leibnizovog pravila dobivamo

$$\sum_{k=0}^{n-2} \binom{n-2}{k} (1+x^2)^{(k)} f^{(n)}(x) + \sum_{k=0}^{n-2} \binom{n-2}{k} x^{(k)} f^{(n-k-1)}(x) = f^{(n-2)}(x).$$

Iz prve sume “prežive” samo članovi za $k=0, 1, 2$, a iz druge za $k=0, 1$. Nakon sređivanja i uvrštavanja $x=0$ dobivamo rekurzivnu relaciju:

$$f^{(n)}(0) = -(n-1)(n-3)f^{(n-2)}(0).$$

Odredimo početne uvjete za $x=0$:

$$f(0) = 0 + 2\sqrt{1} = 2 \quad \text{i} \quad f'(0) = 1 + \frac{0}{\sqrt{1}} = 1.$$

Za $n=3$ rekurzija daje $f^{(3)}(0) = -0 \cdot 2 \cdot f'(0) = 0$. Indukcijom se lako vidi da će i svaka sljedeća neparna derivacija biti nula. Stoga je $f^{(2025)}(0) = 0$.

Zadatak 2. (8+4=12 bodova)

(a) Odredite postoji li limes

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x}{x-1} - \frac{1}{e^{x-1}-1} \right).$$

(b) Neka je $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ neprekidna i derivabilna na $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Ako postoji limes $L := \lim_{x \rightarrow 0} f'(x)$, dokažite da je f derivabilna u 0 i odredite $f'(0)$.

Rješenje.

(a) Uz supstituciju $y = x - 1$, uz koju vrijedi $y \rightarrow 0$, izraz postaje

$$\frac{y+1}{y} - \frac{1}{e^y-1} = 1 + \frac{1}{y} - \frac{1}{e^y-1} = 1 + \frac{e^y-1-y}{y(e^y-1)}.$$

Izlučivanjem konstante 1 ispred izraza i primjenom L'Hopitalovog pravila na ostatak izraza slijedi

$$\begin{aligned} \lim_{y \rightarrow 0} \frac{e^y-1-y}{y(e^y-1)} &= \left[\frac{0}{0} \right] \stackrel{\text{L'H}}{=} \lim_{y \rightarrow 0} \frac{(e^y-1-y)'}{(y(e^y-1))'} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{e^y-1}{e^y-1+ye^y} = \left[\frac{0}{0} \right] \\ &\stackrel{\text{L'H}}{=} \lim_{y \rightarrow 0} \frac{(e^y-1)'}{(e^y-1+ye^y)'} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{e^y}{2e^y+ye^y} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Napomena. Prema napomeni s vježbi, za primjenu L'Hopitalovog pravila dovoljno je pokazati da postoji interval I oko nule takav da je $g''(y) \neq 0$ za $y \in I \setminus \{0\}$, gdje je $g(y) = y(e^y-1)$. Međutim, kako je $g''(y) = e^y(2+y)$, ta tvrdnja očito vrijedi za $I = \langle -1, 1 \rangle$.

Dakle, zadani limes postoji i iznosi $1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$.

(b) Označimo $L := \lim_{x \rightarrow 0} f'(x)$. Budući da je f neprekidna u 0, slijedi da je limes

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$$

neodređenog oblika $\left[\frac{0}{0} \right]$. Derivacija nazivnika je različita od 0 na bilo kojem intervalu I koji sadrži 0 pa koristeći L'Hopitalovo pravilo vrijedi

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \stackrel{\text{L'H}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{1} = L.$$

Dakle, f je derivabilna u 0 i vrijedi $f'(0) = L$.

Zadatak 3. (9+4=13 bodova)

- (a) Tangenta na kružnicu $x^2 + y^2 = 1$ u točki $T(x_0, y_0)$ siječe koordinatne osi u točkama $(a(T), 0)$ i $(0, b(T))$.
Odredite točku T u prvom kvadrantu za koju je $a(T) + b(T)$ minimalno.
- (b) Neka je $f \in C^2(\mathbb{R})$ funkcija takva da za sve $x \in \mathbb{R}$ vrijedi

$$f(x) + 2f'(x) + f''(x) > 0.$$

Koliko najviše nultočaka može imati funkcija f ?

Rješenje.

- (a) Implicitnim deriviranjem jednakosti

$$x^2 + y^2 = 1$$

dobivamo

$$2x + 2yy' = 0$$

pa u točki (x_0, y_0) vrijedi

$$y'(x_0) = -\frac{x_0}{y_0}.$$

Dakle, jednadžba tangente u točki (x_0, y_0) je

$$y - y_0 = -\frac{x_0}{y_0}(x - x_0),$$

odnosno

$$y = -\frac{x_0}{y_0}x + \frac{x_0^2 + y_0^2}{y_0} = -\frac{x_0}{y_0}x + \frac{1}{y_0}.$$

Odatle slijedi da za sjecišta tangente s koordinatnim osima vrijedi

$$a(T) = \frac{1}{x_0}, \quad b(T) = \frac{1}{y_0}$$

pa zaključujemo da je

$$a(T) + b(T) = \frac{1}{x_0} + \frac{1}{y_0}.$$

Korištenjem uvjeta da je točka T u prvom kvadrantu slijedi $y_0 = \sqrt{1 - x_0^2}$ pa je potrebno odrediti minimum funkcije $f : \langle 0, 1 \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ definirane s

$$f(x_0) = \frac{1}{x_0} + \frac{1}{\sqrt{1 - x_0^2}}.$$

Deriviranjem slijedi

$$f'(x_0) = -\frac{1}{x_0^2} + \frac{x_0}{(1 - x_0^2)^{3/2}}.$$

Navedena derivacija je jednaka 0 ako i samo ako je

$$(1 - x_0^2)^{3/2} = x_0^3,$$

odnosno ako i samo ako je

$$1 - x_0^2 = x_0^2.$$

Odatle slijedi da je $x_0 = \frac{\sqrt{2}}{2}$ jedino rješenje na $\langle 0, 1 \rangle$.

Preostaje argumentirati da je to zaista točka minimuma.

Rješavanjem nejednadžbe $f'(x_0) > 0$ postupkom kao i gore slijedi da je $f'(x_0) > 0$ ako i samo ako je $x_0 \in \langle \frac{\sqrt{2}}{2}, 1 \rangle$. Dakle, funkcija f je padajuća na $\langle 0, \frac{\sqrt{2}}{2} \rangle$ i rastuća na $\langle \frac{\sqrt{2}}{2}, 1 \rangle$ pa zaključujemo da je $\frac{\sqrt{2}}{2}$ lokalni minimum.

Zaključujemo da je zbroj odsječaka tangenata na koordinatnim osima minimalan za točku $T \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right)$.

Napomena 1. Posljednji korak mogli smo argumentirati i na sljedeći način. Budući da je

$$\lim_{x_0 \rightarrow 0^+} f(x_0) = \lim_{x_0 \rightarrow 1^-} f(x_0) = +\infty,$$

iz definicije limesa slijedi da postoje $\delta_1, \delta_2 > 0$ takvi da za sve $x \in \langle 0, \delta_1 \rangle \cup [\delta_2, 1]$ vrijedi

$$f(x) \geq f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + 100.$$

Dakle, funkcija f ne može postizati minimum na intervalu $[0, \delta_1] \cup [\delta_2, 1]$. S druge strane, kako je f neprekidna, ona na zatvorenom intervalu $[\delta_1, \delta_2]$ mora postizati minimum. Međutim, kako se on ne može postizati na rubovima zbog prethodnog uvjeta, minimum mora biti u unutrašnjosti intervala pa on mora biti stacionarna točka. Kako je $\frac{1}{\sqrt{2}}$ jedina stacionarna točka na $\langle 0, 1 \rangle$, ona je globalni minimum.

Napomena 2. Budući da se točka nalazi u prvom kvadrantu, nagib tangente u točki (x_0, y_0) mogli smo izračunati i računanjem derivacije funkcije $g(x) = \sqrt{1-x^2}$ u točki x_0 . To ne mijenja ostatak rješenja.

Alternativno rješenje. Minimum funkcije mogli smo naći i dvostrukom primjenom AG nejednakosti

$$a + b \geq 2\sqrt{ab}, \quad a, b \geq 0.$$

Naime, korištenjem uvjeta i primjenom nejednakosti za $(a, b) = (x_0^2, y_0^2)$ i $(a, b) = \left(\frac{1}{x_0}, \frac{1}{y_0}\right)$ slijedi:

$$\frac{1}{x_0} + \frac{1}{y_0} = \sqrt{x_0^2 + y_0^2} \left(\frac{1}{x_0} + \frac{1}{y_0} \right) \geq \sqrt{2x_0y_0} \cdot \frac{2}{\sqrt{x_0y_0}} \geq 2\sqrt{2}.$$

U obje nejednakosti jednakost vrijedi kad je $x_0 = y_0$ pa iz uvjeta $x_0^2 + y_0^2 = 1$ slijedi da jednakost u cijelom nizu vrijedi kad je $x_0 = y_0 = \frac{\sqrt{2}}{2}$

(b) Definiramo

$$g(x) := e^x f(x).$$

Funkcija g je dva puta derivabilna pa koristeći Leibnizovu formulu i uvjet zadatka, za svaki $x \in \mathbb{R}$ vrijedi

$$g''(x) = e^x (f(x) + 2f'(x) + f''(x)) > 0.$$

Dakle, g je strogo konveksna funkcija. Na vježbama smo pokazali da strogo konveksna funkcija može imati najviše dvije nultočke (dokaz ponavljamo u nastavku) pa kako je $f(x) = e^{-x}g(x)$, slijedi da i funkcija f može imati najviše dvije nultočke.

Da bismo dokazali da postoji funkcija koja zadovoljava uvjet zadatka i ima dvije nultočke, promotrimo funkciju

$$f(x) = e^{-x}(x^2 - 1).$$

Ona očito ima dvije nultočke, a po Leibnizovoj formuli vrijedi

$$e^x (f''(x) + 2f'(x) + f(x)) = (x^2 - 1)'' = 2 > 0.$$

Dijeljenjem obje strane s e^x slijedi da f zadovoljava uvjet zadatka.

Dodatak: Dokaz da dva puta derivabilna strogo konveksna funkcija ima najviše dvije nultočke.

Pretpostavimo da g ima 3 nultočke, $x_1 < x_2 < x_3$. Po Rolleovom teoremu slijedi da g' tada ima barem jednu nultočku $y_1 \in \langle x_1, x_2 \rangle$ i barem jednu nultočku $y_2 \in \langle x_2, x_3 \rangle$. Međutim, još jednom primjenom Rolleovog teorema odatle slijedi da g'' ima nultočku $z \in \langle y_1, y_2 \rangle$, ali to je kontradikcija sa uvjetom $g'' > 0$.

Zadatak 4. (10+3=13 bodova)

- (a) Odredite prirodnu domenu, nultočke, intervale monotonosti, lokalne ekstreme, intervale konveksnosti i konkavnosti, točke infleksije, sve asimptote funkcije

$$f(x) = x^2 \ln|x|$$

te skicirajte njen graf.

- (b) Odredite najveći $k \in \mathbb{N}$ za koji se funkcija f iz (a) podzadatka može dodefinirati tako da bude klase C^k na čitavom \mathbb{R} .

Rješenje.

- (a) Domena funkcije je $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Uočimo da je f parna funkcija.

Imamo $f(x) = 0 \iff \ln|x| = 0 \iff |x| = 1 \iff x = \pm 1$. Dakle, nultočke funkcije su -1 i 1 .

Na vježbama je pokazano da je $(\ln|x|)' = \frac{1}{x}$, pa računamo

$$f'(x) = 2x \ln|x| + x^2 \cdot \frac{1}{x} = x(2 \ln|x| + 1).$$

Tražimo stacionarne točke:

$$f'(x) = 0 \stackrel{(x \neq 0)}{\iff} 2 \ln|x| + 1 = 0 \iff \ln|x| = -\frac{1}{2} \iff |x| = e^{-1/2}.$$

Stacionarne točke su $x = \pm \frac{1}{\sqrt{e}}$.

Računamo drugu derivaciju od f :

$$f''(x) = 2 \ln|x| + 2x \cdot \frac{1}{x} + 1 = 2 \ln|x| + 3.$$

Tražimo točke infleksije:

$$f''(x) = 0 \iff 2 \ln|x| + 3 = 0 \implies \ln|x| = -\frac{3}{2} \implies |x| = e^{-3/2}.$$

Odredimo sada intervale monotonosti, konveksnosti i konkavnosti iz predznaka prve i druge derivacije:

	$-\infty$	-1	$-e^{-1/2}$	$-e^{-3/2}$	0	$e^{-3/2}$	$e^{-1/2}$	1	$+\infty$
f	$+$	$\searrow \cup$	$\searrow \cup$	$\nearrow \cup$	$\nearrow \cap$	$\searrow \cap$	$\searrow \cup$	$\nearrow \cup$	$+$
f'	$-$	$-$	\circ	$+$	$+$	$-$	$-$	\circ	$+$
f''	$+$	$+$	$+$	\circ	$-$	$-$	\circ	$+$	$+$

Funkcija strogo pada na $\langle -\infty, -\frac{1}{\sqrt{e}} \rangle$ i na $\langle 0, \frac{1}{\sqrt{e}} \rangle$, a strogo raste na $[-\frac{1}{\sqrt{e}}, 0)$ i na $[\frac{1}{\sqrt{e}}, +\infty)$. U točkama $x = \pm \frac{1}{\sqrt{e}}$ ima lokalni minimum. Vrijednost minimuma je:

$$f\left(\pm \frac{1}{\sqrt{e}}\right) = (\pm e^{-1/2})^2 \ln(e^{-1/2}) = e^{-1} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2e}.$$

Funkcija je strogo konveksna na $\langle -\infty, -e^{-3/2} \rangle$ i na $[e^{-3/2}, +\infty)$, a strogo konkavna na $[-e^{-3/2}, 0)$ i na $\langle 0, e^{-3/2} \rangle$. Točke infleksije su $x = \pm e^{-3/2}$.

Asimptote:

- Vertikalne asimptote: Rub domene je $x = 0$. Računamo limes:

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \ln|x| = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln|x|}{\frac{1}{x^2}} \stackrel{(L'H)}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{2}{x^3}} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(-\frac{x^2}{2} \right) = 0.$$

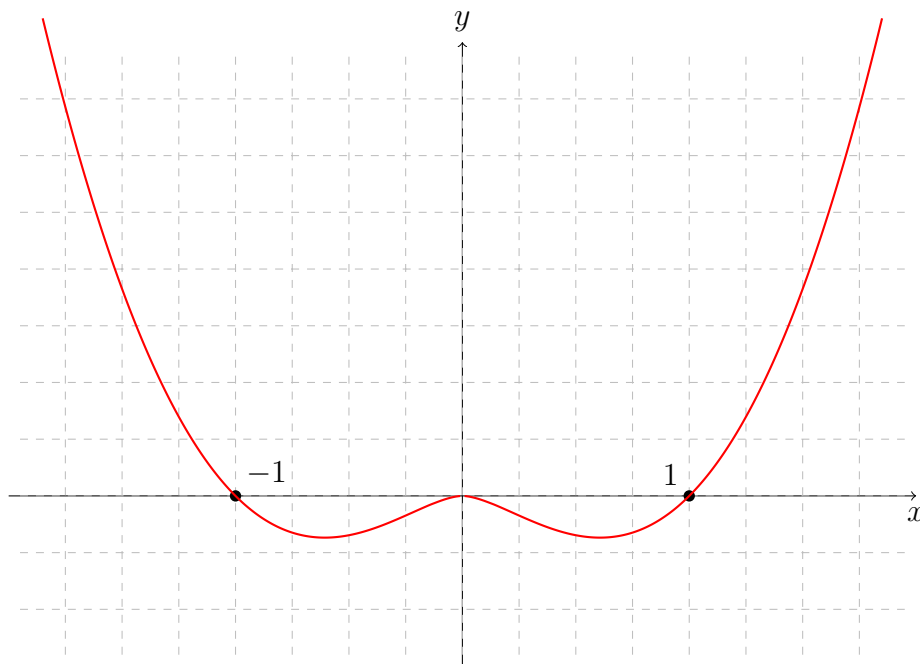
Budući da je limes konačan, vertikalnih asimptota nema.

- Kose asimptote: Računamo

$$k = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} x \ln|x| = \pm\infty.$$

Dakle, kosih (pa ni horizontalnih) asimptota također nema.

Skica grafa funkcije:



- (b) Da bi funkcija f bila neprekidna, mora vrijediti $f(0) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$. U tom slučaju je

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \ln|x| - 0}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} x \ln|x| = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln|x|}{\frac{1}{x}} \stackrel{(L'H)}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0} (-x) = 0.$$

Na sličan način vidimo da je $\lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = 0$, pa je tada $f \in C^1(\mathbb{R})$. No, kako je $\lim_{x \rightarrow 0} f''(x) = -\infty$, f'' nikada neće biti neprekidna na \mathbb{R} , pa je traženi najveći k jednak 1.