MATEMATIČKA ANALIZA 2

Drugi kolokvij – 24. lipnja 2026.

Zadatak 1. (8+4=12 bodova)

(a) Izračunajte nepravi integral

$$\int_{1\leftarrow}^{\to 3} \frac{dx}{\sqrt{(x-1)(3-x)}}.$$

(b) U ovisnosti o parametru $p > 0$ ispitajte konvergenciju nepravog integrala

$$\int_{e}^{+\infty} \frac{dx}{x(\ln x)^p.}$$

Rješenje.

(a) Budući da je

$$(x-1)(3-x) = -x^2 + 4x - 3 = 1 - (x-2)^2,$$

vrijedi

$$\int_{1\leftarrow}^{\to 3} \frac{dx}{\sqrt{(x-1)(3-x)}} = \int_{1\leftarrow}^{2} \frac{dx}{\sqrt{1-(x-2)^2}} + \int_{2}^{\to 3} \frac{dx}{\sqrt{1-(x-2)^2}}.$$

Računamo redom:

$$\begin{aligned}\int_{1\leftarrow}^{2} \frac{dx}{\sqrt{1-(x-2)^2}} &= \lim_{a\to 1+} \int_{a}^{2} \frac{dx}{\sqrt{1-(x-2)^2}} = \begin{bmatrix} t = x-2 & a \to a-2 \\ dt = dx & 2 \to 0 \end{bmatrix} \\ &= \lim_{a\to 1+} \int_{a-2}^{0} \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \lim_{a\to 1+} \arcsin x\Big|_{a-2}^{0} = \frac{\pi}{2},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_{2}^{\to 3} \frac{dx}{\sqrt{1-(x-2)^2}} &= \lim_{b\to 3-} \int_{2}^{b} \frac{dx}{\sqrt{1-(x-2)^2}} = \begin{bmatrix} t = x-2 & 2 \to 0 \\ dt = dx & b \to b-2 \end{bmatrix} \\ &= \lim_{b\to 3-} \int_{0}^{b-2} \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \lim_{b\to 3-} \arcsin x\Big|_{0}^{b-2} = \frac{\pi}{2},\end{aligned}$$

Konačno, imamo

$$\int_{1\leftarrow}^{\to 3} \frac{dx}{\sqrt{(x-1)(3-x)}} = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi.$$

(b) Računamo:

$$\int_{e}^{+\infty} \frac{dx}{x(\ln x)^p} = \lim_{\xi\to+\infty} \int_{e}^{\xi} \frac{dx}{x(\ln x)^p} = \begin{bmatrix} t = \ln x & e \to 1 \\ dt = \frac{dx}{x} & \xi \to \ln\xi \end{bmatrix} = \lim_{\xi\to+\infty} \int_{1}^{\ln\xi} \frac{dt}{t^p} = \int_{1}^{+\infty} \frac{dt}{t^p}.$$

Kao što je dokazano na vježbama, ovaj integral konvergira za $p > 1$ i divergira za $0 < p \le 1$.

Zadatak 2. (8+4=12 bodova)

(a) Odredite integral

$$\int \frac{1}{x^2}\sqrt{\frac{x}{x-1}}\,dx.$$

(b) Neka je $f \in C^2(\mathbb{R})$ funkcija takva da je $f(0) = f(1) = 0$ i da za sve $x \in [0,1]$ vrijedi $f''(x) \le -1$. Dokažite da vrijedi

$$\int_0^1 f(x)dx \ge \frac{1}{12}.$$

Rješenje.

(a) Ovo je primjer integrala frakcionalne linearne iracionalnosti koji rješavamo supstitucijom $u = \sqrt{\frac{x}{x-1}}$. Imamo:

$$\int \frac{1}{x^2}\sqrt{\frac{x}{x-1}}\,dx = \left|\begin{array}{c} u = \sqrt{\frac{x}{x-1}} \implies x = \frac{u^2}{u^2-1} \\ dx = \frac{-2u}{(u^2-1)^2}\,du \end{array}\right| = \int \frac{(u^2-1)^2}{u^4}\cdot u \cdot \frac{-2u}{(u^2-1)^2}\,du$$

$$= -2\int \frac{1}{u^2}\,du = \frac{2}{u} + C = 2\sqrt{\frac{x-1}{x}} + C.$$

(b) Označimo

$$p(x) := \frac{1}{2}x(1-x)$$

i primijetimo da $p(x)$ zadovoljava uvjete zadatka. Koristeći parcijalnu integraciju i uvjete zadatka imamo:

$$\begin{aligned}
\int_0^1 f(x)dx &= -\int_0^1 f(x)p''(x)dx = -f(x)p'(x)\Big|_0^1 + \int_0^1 f'(x)p'(x)dx \\
&= \int_0^1 f'(x)p'(x)dx = f'(x)p(x)\Big|_0^1 - \int_0^1 f''(x)p(x)dx \\
&= \int_0^1 \underbrace{(-f(x))}_{\ge 1}\underbrace{p(x)}_{\ge 0}\,dx \ge \int_0^1 p(x)dx = \frac{1}{12}.
\end{aligned}$$

Jednakost se očito postiže za $f(x) = p(x)$.

Alternativno rješenje. Nije nužno primijetiti identitet korišten u prvom rješenju. Bitno je samo prilikom parcijalne integracije koristiti funkciju koja jednako tretira oba ruba integracije.

Koristimo parcijalnu integraciju dva puta i zatim Newton–Leibnizovu formulu

$$\begin{aligned}
\int_0^1 f(x)dx &= \begin{bmatrix} u = f(x) & dv = xdx \\ du = f'(x)dx & v = x - \frac{1}{2} \end{bmatrix} \\
&= -\int_0^1 f'(x)\big(x - \frac{1}{2}\big)dx = \begin{bmatrix} u = f'(x) & dv = \big(x-\frac{1}{2}\big)dx \\ du = f''(x)dx & v = \frac{1}{2}\big(x - \frac{1}{2}\big)^2 \end{bmatrix} \\
&= \frac{f'(0) - f'(1)}{8} + \frac{1}{2}\int_0^1 f''(x)\big(x - \frac{1}{2}\big)^2 dx \\
&= -\frac{1}{8}\int_0^1 f''(x)dx + \frac{1}{2}\int_0^1 f''(x)\big(x - \frac{1}{2}\big)^2 dx \\
&= \frac{1}{2}\int_0^1 \Big(-\frac{1}{4} + \big(x - \frac{1}{2}\big)^2\Big) f''(x)dx \\
&= \frac{1}{2}\int_0^1 \underbrace{x(1-x)}_{\ge 0}\underbrace{(-f''(x))}_{\ge 1}\,dx \ge \frac{1}{2}\int_0^1 x(1-x)dx = \frac{1}{12}.
\end{aligned}$$

Zadatak 3. (9+4=13 bodova)

(a) Ispitajte konvergenciju reda

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n + \sin(\frac{1}{n^2})}{\ln n}.$$

(b) Neka je (a_n) niz cijelih brojeva. Ako red $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergira, dokažite da postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da za sve $m, n \geq n_0$ vrijedi $a_m = a_n$.

Rješenje.

(a) Ispitajmo konvergenciju ovog reda tako da ga rastavimo na zbroj dvaju redova:

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln n} \quad \text{i} \quad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sin(\frac{1}{n^2})}{\ln n}$$

Prvi red, $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln n}$, konvergira po Leibnizovom kriteriju budući da je niz $(\frac{1}{\ln n})_n$ padajući i konvergira k 0. Nadalje, iz ocjene $0 \leq \sin x \leq x$, koja vrijedi za sve $x \geq 0$, za sve $n \geq 3$ slijedi

$$0 \leq \frac{\sin \frac{1}{n^2}}{\ln n} \leq \frac{1}{n^2 \ln n} \leq \frac{1}{n^2}.$$

Budući da Dirichletov red $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ konvergira (dokazali smo na vježbama), po usporednom kriteriju slijedi da konvergira i drugi red. Dakle, traženi red u zadatku konvergira budući da je zbroj dva konvergentna reda.

(b) Iz konvergencije reda slijedi $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ pa postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da za sve $n \geq n_0$ vrijedi $|a_n| < \frac{1}{2}$. Međutim, kako je $a_n \in \mathbb{Z}$, to znači da za sve $n \geq n_0$ vrijedi $a_n = 0$.

Zadatak 4. (8+5=13 bodova)

(a) Razvijte funkciju
$$f(x) = \ln(x^2 + 3x)$$
u Taylorov red oko $c = 1$, odredite radijus konvergencije i ispitajte konvergenciju u rubovima.

(b) Ako postoji, navedite primjer funkcije f klase C^∞ na nekom intervalu oko nule za koju vrijedi
$$f^{(n)}(0) = \begin{cases} (n+2)!, & n \text{ paran}, \\ 0, & n \text{ neparan}, \end{cases}$$
za svaki $n \in \mathbb{N}_0$.

Rješenje.

(a) Vrijedi
$$\begin{aligned} f(x) &= \ln(x^2 + 3x) = \ln x + \ln(x+3) \\ &= \ln(1 + (x-1)) + \ln(4 + (x-1)) \\ &= \ln(1 + (x-1)) + \ln 4 + \ln(1 + \frac{x-1}{4}) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}(x-1)^n + \ln 4 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \left(\frac{(x-1)}{4}\right)^n \\ &= \ln 4 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \left(1 + \frac{1}{4^n}\right)(x-1)^n. \end{aligned}$$

Red konvergira za $|x - 1| < 1$, tj. za $x \in \langle 0, 2\rangle$.

Za $x = 0$ imamo red
$$\ln 4 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\left(1 + \frac{1}{4^n}\right)$$
koji divergira (usporedba s harmonijskim redom).

Za $x = 2$ imamo red
$$\ln 4 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}\left(1 + \frac{1}{4^n}\right)$$
koji konvergira po Leibnizovom kriteriju. Kriterij se može primijeniti jer su članovi po apsolutnoj vrijednosti produkt dva pozitivna padajuća niza ($\frac{1}{n}$ i $1 + \frac{1}{4^n}$), pa je njihov umnožak također pozitivan padajući niz (koji očito teži u nulu).

(b) Pokušajmo naći funkciju f takvu da je
$$\frac{f^{(n)}(0)}{n!} = \begin{cases} (n+2)(n+1), & n = 2k, \\ 0, & n = 2k+1. \end{cases}$$

Definirajmo f pomoću reda potencija
$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (2n+2)(2n+1)x^{2n}, \qquad \forall x \in \langle -r, r\rangle.$$

Na predavanju je dokazano da je red potencija klase C^∞ na intervalu $\langle -r, r\rangle$, gdje je r radijus konvergencije, koji je jednak
$$r = \frac{1}{\limsup_{m\to\infty} \sqrt[m]{|a_m|}}.$$

Za naš red, nenul koeficijenti su oblika $a_{2n} = (2n+2)(2n+1)$, pa vrijedi:

$$\limsup_{m\to\infty} \sqrt[m]{|a_m|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[2n]{(2n+2)(2n+1)} = 1.$$

Slijedi da je radijus konvergencije $r = 1$, odnosno funkcija je klase C^∞ na intervalu $\langle -1, 1\rangle$.

Napomena. Funkciju f možemo zapisati i eksplicitno. Naime, iz

$$\frac{1}{1-t} = \sum_{n=0}^{\infty} t^n, \quad \forall x \in \langle -1, 1\rangle$$

uvrštavanjem $t = x^2$ i množenjem s x^2 slijedi

$$\frac{x^2}{1-x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} x^{2n+2}, \quad \forall x \in \langle -1, 1\rangle,$$

odakle deriviranjem dva puta dobivamo

$$\frac{2+6x^2}{(1-x^2)^3} = \sum_{n=0}^{\infty} (2n+2)(2n+1)x^{2n}, \quad \forall x \in \langle -1, 1\rangle.$$

Dakle, tražena funkcija je

$$f(x) = \frac{2+6x^2}{(1-x^2)^3}.$$

Tvrdnja da je $f \in C^\infty(\langle -1, 1\rangle)$ sada slijedi također i iz rezultata dokazanog na predavanju da su elementarne funkcije klase C^∞ na svojoj prirodnoj domeni.