

MATEMATIČKA ANALIZA 2

Prvi ispit – 24. lipnja 2026.

Zadatak 1. (8+16=24 boda)

(a) Odredite intervale konveksnosti i konkavnosti i točke infleksije funkcije

$$f(x) = \ln(\operatorname{tg} x).$$

(b) Dokažite nejednakost

$$\frac{3x}{2} - \frac{x^2}{2} - \frac{1}{4} < \operatorname{arctg} x < x, \quad \forall x > 0.$$

Rješenje.

(a) Prirodna domena funkcije je $\mathcal{D}_f = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \langle k\pi, k\pi + \frac{\pi}{2} \rangle$. Uočimo da je funkcija periodična s periodom π , pa je dovoljno promatrati restrikciju $f|_{\langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle} : \langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle \rightarrow \mathbb{R}$. Računamo:

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{\cos^2 x}}{\operatorname{tg} x} = \frac{1}{\sin x \cos x} = \frac{2}{\sin 2x}, \quad f''(x) = \frac{-4 \cos 2x}{\sin^2 2x}.$$

Vrijedi $f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4}$, $f''(x) > 0 \Leftrightarrow x \in \langle \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2} \rangle$ i $f''(x) < 0 \Leftrightarrow x \in \langle 0, \frac{\pi}{4} \rangle$.

Dakle, funkcija je strogo konveksna na $[k\pi + \frac{\pi}{4}, k\pi + \frac{\pi}{2}]$, $k \in \mathbb{Z}$ i strogo konkavna na $\langle k\pi, k\pi + \frac{\pi}{4} \rangle$, $k \in \mathbb{Z}$. Točke infleksije su $T_k = (k\pi + \frac{\pi}{4}, 0)$, $k \in \mathbb{Z}$.

(b) Promatramo funkcije $f, g : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = x - \operatorname{arctg} x \quad \text{i} \quad g(x) = \operatorname{arctg} x - \frac{3x}{2} + \frac{x^2}{2} + \frac{1}{4}.$$

Vrijedi

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{1+x^2} = \frac{x^2}{1+x^2} > 0,$$

pa je f strogo rastuća funkcija. Kako je $f(0) = 0$, slijedi

$$\operatorname{arctg} x < x, \quad \forall x > 0.$$

Također, imamo

$$g'(x) = \frac{1}{1+x^2} - \frac{3}{2} + x = \frac{x^3 - \frac{3}{2}x^2 + x - \frac{1}{2}}{1+x^2} = \frac{(x-1)(x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2})}{1+x^2}.$$

Budući da je $x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} > 0$ za sve $x \geq 0$, slijedi da je $g'(x) < 0$ za $x \in [0, 1)$ i $g'(x) > 0$ za $x \in (1, +\infty)$, tj. funkcija g ima globalni minimum u $x = 1$. Stoga je za svaki $x \in \langle 0, +\infty \rangle$

$$g(x) \geq g(1) = \operatorname{arctg} 1 - \frac{3}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{\pi - 3}{4} > 0,$$

odnosno

$$\frac{3x}{2} - \frac{x^2}{2} - \frac{1}{4} < \operatorname{arctg} x, \quad \forall x > 0.$$

Zadatak 2. (16+8=24 boda)

(a) Odredite integral

$$\int \frac{1}{x^2} \sqrt{\frac{x}{x-1}} dx.$$

(b) Neka je $f \in C^2(\mathbb{R})$ funkcija takva da je $f(0) = f(1) = 0$ i da za sve $x \in [0, 1]$ vrijedi $f''(x) \leq -1$. Dokažite da vrijedi

$$\int_0^1 f(x) dx \geq \frac{1}{12}.$$

Rješenje.(a) Ovo je primjer integrala frakcionalne linearne iracionalnosti koji rješavamo supstitucijom $u = \sqrt{\frac{x}{x-1}}$. Imamo:

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{x^2} \sqrt{\frac{x}{x-1}} dx &= \left| u = \sqrt{\frac{x}{x-1}} \implies x = \frac{u^2}{u^2-1} \right| = \int \frac{(u^2-1)^2}{u^4} \cdot u \cdot \frac{-2u}{(u^2-1)^2} du \\ &= -2 \int \frac{1}{u^2} du = \frac{2}{u} + C = 2\sqrt{\frac{x-1}{x}} + C. \end{aligned}$$

(b) Označimo

$$p(x) := \frac{1}{2}x(1-x)$$

i primijetimo da $p(x)$ zadovoljava uvjete zadatka. Koristeći parcijalnu integraciju i uvjete zadatka imamo:

$$\begin{aligned} \int_0^1 f(x) dx &= - \int_0^1 f(x)p''(x) dx = -f(x)p'(x) \Big|_0^1 + \int_0^1 f'(x)p'(x) dx \\ &= \int_0^1 f'(x)p'(x) dx = f'(x)p(x) \Big|_0^1 - \int_0^1 f''(x)p(x) dx \\ &= \int_0^1 \underbrace{(-f''(x))}_{\geq 1} \underbrace{p(x)}_{\geq 0} dx \geq \int_0^1 p(x) dx = \frac{1}{12}. \end{aligned}$$

Jednakost se očito postiže za $f(x) = p(x)$.*Alternativno rješenje.* Nije nužno primijetiti identitet korišten u prvom rješenju. Bitno je samo prilikom parcijalne integracije koristiti funkciju koja jednako tretira oba ruba integracije.

Koristimo parcijalnu integraciju dva puta i zatim Newton–Leibnizovu formulu

$$\begin{aligned} \int_0^1 f(x) dx &= \left[\begin{array}{ll} u = f(x) & dv = x dx \\ du = f'(x) dx & v = x - \frac{1}{2} \end{array} \right] \\ &= - \int_0^1 f'(x) \left(x - \frac{1}{2}\right) dx = \left[\begin{array}{ll} u = f'(x) & dv = \left(x - \frac{1}{2}\right) dx \\ du = f''(x) dx & v = \frac{1}{2} \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 \end{array} \right] \\ &= \frac{f'(0) - f'(1)}{8} + \frac{1}{2} \int_0^1 f''(x) \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 dx \\ &= -\frac{1}{8} \int_0^1 f''(x) dx + \frac{1}{2} \int_0^1 f''(x) \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 dx \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 \left(-\frac{1}{4} + \left(x - \frac{1}{2}\right)^2\right) f''(x) dx \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 \underbrace{x(1-x)}_{\geq 0} \underbrace{(-f''(x))}_{\geq 1} dx \geq \frac{1}{2} \int_0^1 x(1-x) dx = \frac{1}{12}. \end{aligned}$$

Zadatak 3. (18+8=26 bodova)

(a) Ispitajte konvergenciju reda

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n + \sin\left(\frac{1}{n^2}\right)}{\ln n}.$$

(b) Neka je (a_n) niz cijelih brojeva. Ako red $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergira, dokažite da postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da za sve $m, n \geq n_0$ vrijedi $a_m = a_n$.

Rješenje.

(a) Ispitajmo konvergenciju ovog reda tako da ga rastavimo na zbroj dvaju redova:

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln n} \quad \text{i} \quad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sin\left(\frac{1}{n^2}\right)}{\ln n}$$

Prvi red, $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln n}$, konvergira po Leibnizovom kriteriju budući da je niz $\left(\frac{1}{\ln n}\right)_n$ padajući i konvergira k 0. Nadalje, iz ocjene $0 \leq \sin x \leq x$, koja vrijedi za sve $x \geq 0$, za sve $n \geq 3$ slijedi

$$0 \leq \frac{\sin \frac{1}{n^2}}{\ln n} \leq \frac{1}{n^2 \ln n} \leq \frac{1}{n^2}.$$

Budući da Dirichletov red $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ konvergira (dokazali smo na vježbama), po usporednom kriteriju slijedi da konvergira i drugi red. Dakle, traženi red u zadatku konvergira budući da je zbroj dva konvergentna reda.

(b) Iz konvergencije reda slijedi $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ pa postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da za sve $n \geq n_0$ vrijedi $|a_n| < \frac{1}{2}$. Međutim, kako je $a_n \in \mathbb{Z}$, to znači da za sve $n \geq n_0$ vrijedi $a_n = 0$.

Zadatak 4. (16+10=26 bodova)

(a) Razvijte funkciju

$$f(x) = \ln(x^2 + 3x)$$

u Taylorov red oko $c = 1$, odredite radijus konvergencije i ispitajte konvergenciju u rubovima.(b) Ako postoji, navedite primjer funkcije f klase C^∞ na nekom intervalu oko nule za koju vrijedi

$$f^{(n)}(0) = \begin{cases} (n+2)!, & n \text{ paran,} \\ 0, & n \text{ neparan,} \end{cases}$$

za svaki $n \in \mathbb{N}_0$.*Rješenje.*

(a) Vrijedi

$$\begin{aligned} f(x) &= \ln(x^2 + 3x) = \ln x + \ln(x+3) \\ &= \ln(1 + (x-1)) + \ln(4 + (x-1)) \\ &= \ln(1 + (x-1)) + \ln 4 + \ln\left(1 + \frac{x-1}{4}\right) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} (x-1)^n + \ln 4 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \left(\frac{x-1}{4}\right)^n \\ &= \ln 4 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \left(1 + \frac{1}{4^n}\right) (x-1)^n. \end{aligned}$$

Red konvergira za $|x-1| < 1$, tj. za $x \in \langle 0, 2 \rangle$.Za $x = 0$ imamo red

$$\ln 4 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(1 + \frac{1}{4^n}\right)$$

koji divergira (usporedba s harmonijskim redom).

Za $x = 2$ imamo red

$$\ln 4 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \left(1 + \frac{1}{4^n}\right)$$

koji konvergira po Leibnizovom kriteriju. Kriterij se može primijeniti jer su članovi po apsolutnoj vrijednosti produkt dva pozitivna padajuća niza ($\frac{1}{n}$ i $1 + \frac{1}{4^n}$), pa je njihov umnožak također pozitivan padajući niz (koji očito teži u nulu).(b) Pokušajmo naći funkciju f takvu da je

$$\frac{f^{(n)}(0)}{n!} = \begin{cases} (n+2)(n+1), & n = 2k, \\ 0, & n = 2k+1. \end{cases}$$

Definirajmo f pomoću reda potencija

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (2n+2)(2n+1)x^{2n}, \quad \forall x \in \langle -r, r \rangle.$$

Na predavanju je dokazano da je red potencija klase C^∞ na intervalu $\langle -r, r \rangle$, gdje je r radijus konvergencije, koji je jednak

$$r = \frac{1}{\limsup_{m \rightarrow \infty} \sqrt[m]{|a_m|}}.$$

Za naš red, nenul koeficijenti su oblika $a_{2n} = (2n + 2)(2n + 1)$, pa vrijedi:

$$\limsup_{m \rightarrow \infty} \sqrt[m]{|a_m|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[2n]{(2n + 2)(2n + 1)} = 1.$$

Slijedi da je radijus konvergencije $r = 1$, odnosno funkcija je klase C^∞ na intervalu $\langle -1, 1 \rangle$.

Napomena. Funkciju f možemo zapisati i eksplicitno. Naime, iz

$$\frac{1}{1-t} = \sum_{n=0}^{\infty} t^n, \quad \forall x \in \langle -1, 1 \rangle$$

uvrštavanjem $t = x^2$ i množenjem s x^2 slijedi

$$\frac{x^2}{1-x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} x^{2n+2}, \quad \forall x \in \langle -1, 1 \rangle,$$

odakle deriviranjem dva puta dobivamo

$$\frac{2 + 6x^2}{(1-x^2)^3} = \sum_{n=0}^{\infty} (2n + 2)(2n + 1)x^{2n}, \quad \forall x \in \langle -1, 1 \rangle.$$

Dakle, tražena funkcija je

$$f(x) = \frac{2 + 6x^2}{(1-x^2)^3}.$$

Tvrdnja da je $f \in C^\infty(\langle -1, 1 \rangle)$ sada slijedi također i iz rezultata dokazanog na predavanju da su elementarne funkcije klase C^∞ na svojoj prirodnoj domeni.