

MATEMATIČKA ANALIZA 2

Drugi ispit – 8. srpnja 2026.

Zadatak 1. (16+8=24 boda)

(a) Odredite vrijednosti parametara a i b tako da funkcija

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 + b, & x \leq 0, \\ \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{x^2}\right), & x > 0 \end{cases}$$

bude klase C^2 na $\mathbb{R}$.

(b) Neka je $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ neprekidna, strogo konkavna funkcija takva da je $f(0) < 0$ i $f(1) > 0$. Dokažite da f ima točno jednu nultočku.

Rješenje.

(a) Vrijedi $\lim_{x \rightarrow 0-} f(x) = b = f(0)$ i $\lim_{x \rightarrow 0+} f(x) = \frac{\pi}{2}$, pa mora biti $b = \frac{\pi}{2}$ da bi funkcija bila neprekidna.

Imamo

$$\lim_{x \rightarrow 0-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0-} \frac{ax^2 + \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0-} ax = 0$$

i

$$\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\operatorname{arctg} \frac{1}{x^2} - \frac{\pi}{2}}{x} \stackrel{(\text{L'H})}{=} \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\frac{-2x}{1+x^4}}{1} = 0.$$

Dakle, f je derivabilna na $\mathbb{R}$, vrijedi

$$f'(x) = \begin{cases} 2ax, & x \leq 0 \\ \frac{-2x}{1+x^4}, & x > 0 \end{cases}$$

i f' je neprekidna.

Dalje računamo

$$\lim_{x \rightarrow 0-} \frac{f'(x) - f'(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0-} \frac{2ax}{x} = 2a \quad \text{i} \quad \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{f'(x) - f'(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\frac{-2x}{1+x^4}}{x} = -2.$$

Kako bi f imala drugu derivaciju u nuli, mora biti $a = -1$ i tada je $f''(0) = -2$. Dakle, vrijedi

$$f''(x) = \begin{cases} -2, & x \leq 0 \\ \frac{6x^4 - 2}{(x^4 + 1)^2}, & x > 0 \end{cases}$$

i vidimo da je f'' također neprekidna.

(b) Kako je f neprekidna, $f(0) < 0$ i $f(1) > 0$, po Bolzano-Weierstrassovom teoremu f mora imati barem jednu nultočku. Pretpostavimo da je $f(a) = f(b) = 0$ za neke $0 < a < b < 1$. Tada postoji $\lambda \in (0, 1)$ takav da je $b = \lambda a + (1 - \lambda) \cdot 1$ (konkretno, $\lambda = \frac{1-b}{1-a}$). Po definiciji stroge konkavnosti vrijedi

$$f(b) > \lambda f(a) + (1 - \lambda)f(1) = (1 - \lambda)f(1) > 0,$$

što je kontradikcija s pretpostavkom da je $f(b) = 0$. Dakle, f ima jedinstvenu nultočku.

Zadatak 2. (12+12=24 boda)

(a) Izračunajte integral

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sin^2 x + 5 \sin x + 6} dx$$

(b) Odredite konvergira li nepravi integral

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{(\cos x)^{\frac{2}{3}}} dx.$$

Rješenje.

(a) Korištenjem supstitucije $t = \sin x$ svodimo integral na integral racionalne funkcije, koji zatim rješavamo rastavom na parcijalne razlomke.

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sin^2 x + 5 \sin x + 6} dx &= \left| \begin{array}{l} t = \sin x \implies dt = \cos x dx \\ x = 0 \implies t = \sin 0 = 0 \\ x = \frac{\pi}{2} \implies t = \sin \frac{\pi}{2} = 1 \end{array} \right| \\ &= \int_0^1 \frac{1}{t^2 + 5t + 6} dt = \int_0^1 \left(\frac{1}{t+2} - \frac{1}{t+3} \right) dt \\ &= \left[\ln |t+2| - \ln |t+3| \right]_0^1 = \left[\ln \left| \frac{t+2}{t+3} \right| \right]_0^1 = \ln \frac{9}{8} \end{aligned}$$

(b) Zadani nepravi integral ima problematičnu točku u gornjoj granici $x = \frac{\pi}{2}$, jer je $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \cos x = 0$, pa podintegralna funkcija teži u beskonačnost.

Prebacimo singularitet u nulu pomoću supstitucije $t = \frac{\pi}{2} - x$.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{(\cos x)^{\frac{2}{3}}} dx = \left| \begin{array}{l} t = \frac{\pi}{2} - x \implies dx = -dt \\ x = 0 \implies t = \frac{\pi}{2} \\ x = \frac{\pi}{2} \implies t = 0 \end{array} \right| = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{(\sin t)^{\frac{2}{3}}} dt.$$

Znamo da za $t \approx 0$ vrijedi $\sin t \approx t$ pa ćemo podintegralnu funkciju usporediti s funkcijom $\frac{1}{t^{\frac{2}{3}}}$. Koristeći poznati limes $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} = 1$, slijedi

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{(\sin t)^{\frac{2}{3}}}}{\frac{1}{t^{\frac{2}{3}}}} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \left(\frac{t}{\sin t} \right)^{\frac{2}{3}} = 1.$$

Dakle, po graničnom usporednom kriteriju vrijedi da posljednji integral konvergira ako i samo ako konvergira integral

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{t^{\frac{2}{3}}} dt.$$

Međutim, na vježbama je dokazano da za bilo koji $a > 0$ vrijedi da $\int_0^a t^{-p} dt$ konvergira za ako i samo ako je $p < 1$ pa slijedi da posljednji integral konvergira. Dakle, po prethodno dokazanom slijedi da konvergira i polazni integral.

Zadatak 3. (10 + 16 = 26 bodova)

(a) Ispitajte konvergenciju reda

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ln(n) \arcsin\left(\frac{1}{n^3}\right).$$

(b) Ispitajte konvergenciju i apsolutnu konvergenciju reda

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln 2 + \ln 3 + \cdots + \ln n}.$$

Rješenje.

(a) Budući da je $\sin x \approx x$ za $x \approx 0$, djelovanjem s $\arcsin$ na obje strane aproksimacije očekujemo da je $\arcsin x \approx x$. Formalno, koristeći limes $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x} = 1$, koji slijedi iz $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} = 1$ supstitucijom $t = \arcsin x$, dobivamo

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(n) \arcsin\left(\frac{1}{n^3}\right)}{\frac{\ln n}{n^3}} = 1.$$

Dakle, po graničnom usporednom kriteriju, traženi red konvergira ako i samo ako konvergira red

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^3}.$$

S obzirom na to da je $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n}{n} = 0$, te koristeći činjenicu dokazanu na predavanjima da Dirichletov red $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ konvergira, po graničnom usporednom kriteriju izravno slijedi da i posljednji red konvergira.

Dakle, polazni red konvergira.

(b) Označimo

$$a_n := \frac{1}{\ln 2 + \ln 3 + \cdots + \ln n}.$$

Niz $(a_n)_n$ očito je padajući i konvergira k 0 budući da suma u nazivniku raste i konvergira k $+\infty$ pa red konvergira po Leibnizovom kriteriju.

Ispijamo apsolutnu konvergenciju. Koristeći očitu ocjenu: $\ln k \leq \ln n$, koja vrijedi za sve $k \leq n$, slijedi

$$\sum_{n=2}^{\infty} |a_n| = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln 2 + \ln 3 + \cdots + \ln n} \geq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n-1) \ln n} > \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}.$$

Konvergenciju posljednjeg reda ispitat ćemo pomoću Cauchyjevog integralnog kriterija.

$$\begin{aligned} \int_2^{\infty} \frac{1}{x \ln x} dx &= \lim_{R \rightarrow \infty} \int_2^R \frac{1}{x \ln x} dx = \left| \begin{array}{l} x = e^t \implies \frac{dx}{x} = dt \\ x = 2 \implies t = \ln 2 \\ x = R \implies t = \ln R \end{array} \right| \\ &= \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\ln 2}^{\ln R} \frac{1}{t} dt = \lim_{R \rightarrow \infty} [\ln t]_{\ln 2}^{\ln R} = +\infty. \end{aligned}$$

Budući da integral divergira, divergira i red $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$. Prema običnom usporednom kriteriju, kako je naš red strogo veći od divergentnog reda, on također divergira. Dakle, zadani red nije apsolutno konvergentan.

Zadatak 4. (16+10 =26 bodova)

- (a) Za funkciju $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ zadanu s $f(x) = \arctg(x^2)$, odredite $f^{(2026)}(0)$.
- (b) Postoji li nekonstantna ograničena funkcija $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ čiji Maclaurinov red konvergira prema f uniformno na $\mathbb{R}$?

Rješenje.

- (a) Koristeći tablični razvoj:

$$\arctg t = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{t^{2n+1}}{2n+1}, \quad \text{za } |t| < 1$$

za $t = x^2$ dobivamo razvoj zadane funkcije $f(x)$:

$$f(x) = \arctg(x^2) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(x^2)^{2n+1}}{2n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{4n+2}}{2n+1}.$$

S druge strane, po definiciji Maclaurinovog reda, koeficijent uz potenciju x^k jednak je $\frac{f^{(k)}(0)}{k!}$. Izjednačavanjem koeficijenata dobivamo da funkcija ima koeficijente različite od nule samo za potencije oblika $k = 4n + 2$, gdje je $n \in \mathbb{N}_0$. Budući da je $2026 = 4 \cdot 506 + 2$, slijedi da je koeficijent uz x^{2006} jednak

$$\frac{f^{(2026)}(0)}{2026!} = [x^{2006}] = \frac{(-1)^{506}}{2(506) + 1} = \frac{1}{1013}.$$

Dakle:

$$f^{(2026)}(0) = \frac{2026!}{1013}.$$

- (b) Dokazat ćemo da takva funkcija ne postoji.

Pretpostavimo suprotno, tj. neka je $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ nekonstantna funkcija takva da je $|f(x)| \leq M$ za neki $M > 0$ i za koju vrijedi tvrdnja. Označimo s

$$T_n(x) := \sum_{j=0}^n \frac{f^{(j)}(0)}{j!} x^j$$

n -ti Maclaurinov polinom funkcije f .

Budući da je f nekonstantna, postoji $j_0 \in \mathbb{N}$ takav da je $f^{(j_0)}(0) \neq 0$. Naime, u suprotnom bi po definiciji konvergencije reda vrijedilo $f(x) = f(0) + 0 + \dots = f(0)$ za sve $x \in \mathbb{R}$, pa bi f bila konstantna funkcija.

Sada po definiciji uniformne konvergencije slijedi da za $\varepsilon = 1$ postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da za sve $n \geq n_0$ i sve $x \in \mathbb{R}$ vrijedi

$$|f(x) - T_n(x)| \leq 1.$$

Odatle zaključujemo da za odabir $n = \max\{n_0, j_0\}$ i za sve $x \in \mathbb{R}$ vrijedi:

$$|T_n(x)| \leq |T_n(x) - f(x)| + |f(x)| \leq 1 + M.$$

Međutim, zbog našeg odabira n , koeficijent uz x^{j_0} u polinomu $T_n(x)$ je različit od nule. Kako je $j_0 \geq 1$, to znači da je $T_n(x)$ nekonstantni polinom koji je na cijelom $\mathbb{R}$ omeđen s $M + 1$. S druge strane, iz Matematičke analize 1 znamo da za svaki nekonstantni polinom vrijedi $\lim_{x \rightarrow \infty} |T_n(x)| = +\infty$. Time smo dobili kontradikciju s pretpostavkom.