

Matematika 1 i 2 za kemičare

Franka Miriam Brückler

Zagreb, 2025.

Sadržaj

1	Uvod	1
1.1	Varijable i konstante	1
1.2	Brojevi i mjerne jedinice	2
1.3	Pravokutni koordinatni sustav u ravnini	7
2	Realne funkcije jedne varijable	11
2.1	Pojam funkcije i grafa funkcije	11
2.2	Svojstva funkcija i njihovih grafova	15
2.3	Transformacije grafova	17
2.4	Algebarske funkcije	22
2.4.1	Afine funkcije	22
2.4.2	Kvadratne funkcije	25
2.4.3	Polinomi	28
2.4.4	Racionalne funkcije	33
2.4.5	Korijeni	38
2.5	Transcendentne funkcije	40
2.5.1	Eksponecijalne funkcije	40
2.5.2	Hiperbolne funkcije	43
2.5.3	Kompozicije i inverzi funkcija	43
2.5.4	Logaritamske funkcije	48
2.5.5	Opće potencije	52
2.5.6	Trigonometrijske i ciklometrijske funkcije	52
2.6	Prikaz neafinih funkcija pomoću afinih („linearizacija“)	60
2.7	Funkcije zadane po dijelovima	63
3	Infinitezimalni račun	67
3.1	Intuitivni opis derivacije i integrala	67
3.2	Tehnike deriviranja i integriranja	93
3.2.1	Tehnike deriviranja	93
3.2.2	Osnovne tehnike integriranja	97
3.2.3	Parametarski zadane krivulje i parametarsko deriviranje	105

3.3	Tok funkcije	107
3.3.1	Interpretacija predznaka prve i druge derivacije	107
3.3.2	Lokalni ekstremi i točke infleksije	110
3.3.3	Globalni ekstremi	118
3.3.4	Asimptote grafova	123
3.4	Limesi, neprekidnost, derivabilnost i integrabilnost	129
3.4.1	Limesi funkcija	129
3.4.2	Neprekidnost funkcija	140
3.4.3	Derivabilnost i integrabilnost funkcija	144
3.5	Teoremi srednje vrijednosti	150
3.6	Nepravi integrali	154
3.6.1	Nepravi integrali s neograničenim područjem integracije	154
3.6.2	Nepravi integrali neograničenih funkcija	157
4	Kompleksni brojevi i polarne koordinate	165
4.1	Kompleksna ravnina	165
4.2	Eksponecijalni zapis kompleksnog broja	170
4.3	Polarne koordinate u ravnini	175
5	Uvod u linearnu algebru	181
5.1	Geometrijski vektori	181
5.1.1	Množenje vektora skalarom i zbrajanje vektora	184
5.1.2	Baza i koordinate u V^2 , $V^2(O)$, V^3 , $V^3(O)$	188
5.2	Klasična algebra vektora	192
5.2.1	Skalarni produkt geometrijskih vektora	192
5.2.2	Vektorski produkt vektora	196
5.2.3	Mješoviti produkt vektora	199
5.3	Analitička geometrija prostora	201
5.3.1	Ravnine u prostoru	202
5.3.2	Pravci u prostoru	207
6	Sustavi linearnih jednadžbi	215
6.1	Linearne jednadžbe	215
6.2	Sustavi linearnih jednadžbi	219
6.3	Metoda supstitucije	223
6.4	Gaußova metoda eliminacija	224
7	Vektorski prostori i povezane teme	233
7.1	Vektorski prostori	233
7.1.1	Unitarni prostori	242
7.2	Linearni operatori	249

7.3	Matrice	253
7.3.1	Matrica linearnog operatora	253
7.3.2	Operacije s matricama	259
7.4	Svojstvene vrijednosti i svojstveni vektori	279
Bibliografija		293

Predgovor

Zašto bi kemičar trebao znati dosta sadržaja iz matematike? To je pitanje koje si vjerojatno postavlja mnogo studenata kemije, a možda i dosta „gotovih” kemičara. Odgovor na to pitanje nije i ne može biti kratak.

Zasigurno za dobrog kemičara nije nužno da bude dobar, pa čak ni da bude slab matematičar. Načelno, nužna je samo sigurnost u aritmetici racionalnih brojeva i korištenju pojma funkcije i njenog grafa. No, ne samo da su neka područja kemije matematički zahtjevnija, primjerice fizikalna kemija, nego se i u mnogim drugim područjima može uz (razumno!) korištenje matematičkog jezika efikasnije uočiti i iskazati zakonitosti. Ipak, osobno je mišljenje autora ovog udžbenika da je najvažniji razlog zašto student kemije mora učiti matematiku bitno jednostavniji: Znati matematiku znači znati jasno i precizno formulirati svoje tvrdnje, argumentirati te uočavati bitne sličnosti i razlike među pojmovima, konceptima i stvarnim objektima. A te sposobnosti su nužne za svakog prirodosnanstvenika, dakle i kemičara.

Nažalost, da bi se savladao matematički jezik i stekao odgovarajući način razmišljanja potrebno je ponešto strpljenja. Matematika se uči prije svega redovnom vježbom i navikavanjem, ali kad se jednom nauči omogućava stvaranje novih svjetova i olakšava razumijevanje postojećih. U tom smislu, preporučam svakom kemičaru u nastajanju (a i svakom drugom tko uzme ovaj udžbenik u ruke) da se koncentrira na pamćenje samo definicija, a zatim dopusti da njegov ili njezin mozak prati, bez opterećenja memoriranjem, kako se iz malog broja zapamćenih stvari može zaključiti neusporedivo puno više nego što je zapamćeno. A za onoga tko je naučio pravilno zaključivati, možemo reći da je i savladao osnove matematike.

Također, treba biti svjestan da matematika nije samo skup formula. Formule u ovom udžbeniku služe za uvježbavanje standardne notacije i kao vrsta stenografije. Stoga svakom tko se priprema za ispit iz matematike preporučam da razmisli o smislu tih formula i pokuša ih izraziti riječima te za svaku definiciju ili formulu proba naći i poneki vlastiti primjer ili kontraprimjer.

Struktura teksta prilagođena je programima kolegija Matematika 1 i 2 kako se predaju na Kemijskom odsjeku Prirodoslovno-matematičkog fakulteta u Zagrebu. Prva dva poglavlja su svojevrsan repetitorij srednjoškolskog gradiva o realnim brojevima i realnim funkcijama jedne varijable, s naglaskom na crtanje i interpretaciju grafova. Treće poglavlje posvećeno je osnovama infinitezimalnog računa za realne funkcije jedne varijable. Pritom se, za matematički tekst nestandardno, deriviranje i integriranje obrađuje prije limesa i neprekidnosti, prvo na intuitivan način, kako bi studenti (koji paralelno slušaju i kolegije iz fizike u kojima se intenzivno koristi deriviranje i integriranje) čim ranije mogli pratiti i to gradivo. U četvrtom poglavlju obrađuju se kompleksni brojevi i polarne koordinate u ravnini. Peto, šesto i sedmo poglavlje bave se linearnom algebrom. U petom poglavlju (koje je još uključeno u sadržaj Matematike 1) obrađuje se klasična algebra s geometrijskim vektorima te analitička geometrija prostora. Šesto i sedmo poglavlje, s kojima započinje gradivo Matematike 2, obrađuju sustave linearnih jednažbi te opću teoriju matrica i vektorskih prostora. U osmom poglavlju obrađeni su osnovni tipovi običnih diferencijalnih jednažbi. Deveto se poglavlje bavi infinitezimalnim računom skalarnih i vektorskih funkcija više varijabli, a u posljednjem, desetom poglavlju se bavimo nizovima i redovima, s naglaskom na Taylorove i Fourierove redove i njihovu primjenu na aproksimaciju funkcija.

Za studente kemije na zagrebačkom PMF-u vrijedi sljedeća napomena: Primijenjeni primjeri koji sadrže pojmove i gradivo koje ne spada u standardno srednjoškolsko i osnovnoškolsko gradivo iz fizike i kemije nisu obvezni dio ispitnog gradiva, nego ilustracija korištenja matematičkih tehnika (koje jesu dio ispitnog gradiva) za probleme koje će susresti i proučiti kasnije tijekom studija na odgovarajućim kolegijima. Specijalno, jedine veličine i mjerne jedinice za koje se podrazumijeva da ih studenti znaju su one koje spadaju u opću kulturu svake osobe koja je završila srednju školu. Pregled tih veličina i mjernih jedinica možete naći u prilogu na početku ove knjige, odmah iza ovog predgovora. Također u prilogu na početku, iza pregleda veličina, možete naći kratki repetitorij planimetrije i stereometrije.

U Zagrebu, 2025.

F. M. B.

Veličine i mjerne jedinice

Prefiksi mjernih jedinca

Prefiks	Simbol	Vrijednost
femto	f	10^{-15} .
piko	p	10^{-12} .
nano	n	10^{-9} .
mikro	μ	10^{-6} .
mili	m	10^{-3} .
centi	c	10^{-2} .
deci	d	10^{-1} .
deka	da	10^1 .
hekto	h	10^2 .
kilo	k	10^3 .
mega	M	10^6 .
giga	G	10^9 .
tera	T	10^{12} .

Napomena. Za sve u tablicama navedene mjerne jedinice podrazumijeva se da se mogu koristiti i gornji prefiksi.

Geometrijske veličine

Naziv	Oznaka	Mjerne jedinice
duljina (ili put, opseg, visina, ...)	d, s, ℓ, o, v, h	m
površina (ili oplošje)	P, A, O	m^2
volumen	V	m^3, L ($1 \text{ L} = 1 \text{ dm}^3$)
kut	$\alpha, \beta, \dots$	1 (=rad), °

Svakodnevne veličine

Naziv	Oznaka	Mjerne jedinice
vrijeme	t	s (ili min, h, god., ...)
cijena	C	€(ili \$, £, ...)
prihod	P	€(ili \$, £, ...)
trošak	T	€(ili \$, £, ...)
profit (zarada)	$\Pi = P - T$	€(ili \$, £, ...)
temperatura	θ, T	°C za θ , K za T
broj(nost)	$N, x, y, z, \dots$	1, %, °

Mehaničke veličine

Naziv	Oznaka	Mjerne jedinice
brzina	v	m s^{-1}
sila	F	N
masa	m	kg

Električke veličine

Naziv	Oznaka	Mjerne jedinice
jakost struje	i	A
napon	U, V	V
naboj	q	C
otpor	R	Ω
induktivitet	L	H

Termodinamičke veličine

Naziv	Oznaka	Mjerne jedinice
rad	W	J
energija	E	J
toplina	Q	J
tlak	p	Pa

Stehiometrijske veličine

Naziv	Oznaka	Mjerne jedinice
gustoća	ρ	kg m^{-3}
množina	n	mol
množinska koncentracija	c	mol L^{-1}

Repetitorij geometrije

Planimetrija

Osnovni geometrijski objekti u planimetriji (geometriji euklidske ravnine) su točka, pravac i dužina (dio pravca omeđen dvjema točkama). Ograničeni planimetrijski objekti nazivaju se geometrijskim likovima. Osnovna svojstva geometrijskih likova su opseg i površina. Dužine kao i sve krivulje imaju površinu nula. Definicije, opsezi i površine geometrijskih likova

- **Mnogokut** (poligon) je dio ravnine omeđen zatvorenom krivuljom sastavljenom od dužina (bridova mnogokuta) koje se spajaju u svojim krajevima (vrhovima mnogokuta). Mnogokut omeđen s n dužina naziva se n -terokutom. Zbroj kutova u n -terokutu je $(n - 2) \cdot 180^\circ$. **Pravilni mnogokut** je mnogokut kojemu su svi bridovi iste duljine a i svaka dva susjedna brida zatvaraju isti kut. Opseg pravilnog n -terokuta je $O = n a$, a površina mu je $P = \frac{n}{4} a^2 \operatorname{ctg} \frac{180^\circ}{n}$.

- **Trokut** ima opseg jednak zbroju duljina a , b i c njegovih stranica, a površinu $P = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} = \frac{a v_a}{2}$, gdje je s poluopseg, a v_a duljina visine na stranicu duljine a . Prema **Pitagorinom poučku**, trokut je pravokutan ako i samo ako je $a^2 + b^2 = c^2$, gdje je c duljina najdulje stranice trokuta.
- Četverokut koji je omeđen s po dva para paralelnih bridova zove se **paralelogram**. Paralelogram kojemu su svi kutovi pravi naziva se **pravokutnik**. **Romb** je četverokut kojemu su sve stranice iste duljine (svaki romb je i paralelogram). Četverokut koji je istovremeno romb i pravokutnik je **kvadrat** (pravilni četverokut). Kvadrat kojemu je duljina brida a ima opseg $O = 4a$, površinu $P = a^2$ i duljinu dijagonale $d = a\sqrt{2}$. Površina paralelograma kojemu stranice duljina a i b zatvaraju kut φ je $P = a b \sin \varphi$.

- **Kružnica** je krivulja u ravnini koja se sastoji od svih točaka koje su na istoj udaljenosti (polumjeru r) od jedne točke (središta). Promjer kružnice je maksimalni razmak dvije točke na njoj: $d = 2r$. **Krug** je kružnica skupa

sa svojom unutrašnjosti. Opseg kruga i kružnice je $O = 2r\pi$. Duljina lûka kružnice ako je odgovarajući središnji kut φ iznosi $l = r\varphi$. Kružnica ima površinu 0, a krug ima površinu $P = r^2\pi$. Dužina koja spaja dvije točke kružnice je njezina **tetiva**. Za danu tetivu, pripadni središnji kut je dvostruko veći od bilo kojeg obodnog kuta nad tom tetivom. Obodni kut nad promjerom je pravi.

Stereometrija

Osnovni geometrijski objekti u stereometriji su svi planimetrijski objekti te ravnine. Ograničeni stereometrijski objekti nazivaju se geometrijskim tijelima. Osnovna svojstva geometrijskih tijela su oplošje i volumen. Geometrijski likovi imaju volumen nula. Oplošje uglatog geometrijskog tijela (poliedra) je zbroj površina njegovih strana (mnogokuta koji ga omeđuju, ponekad nazivanih i plohama poliedra).

- **Prizma** (n -terostrana) je poliedar omeđen s dva paralelna i sukladna n -terokuta (baze prizme) i n pravokutnika (pobočki prizme) kojima su po dva nasuprotna brida međusobno odgovarajući bridovi baza. Razmak baza je visina h prizme. Prizma je uspravna ako su pobočke okomite na baze. Prizma je pravilna ako je uspravna i ako su joj baze pravilni mnogokuti. Uspravna četverostrana prizma kojoj su sve strane pravokutnici zove se **kvadar**. Ako su a , b i c duljine bridova kvadra, on ima oplošje $P = 2(ab + bc + ca)$, a volumen $V = abc$. Kvadar kojemu su svi bridovi iste duljine a zove se **kocka**; oplošje kocke je $P = 6a^2$, volumen je $V = a^3$, a duljina prostorne dijagonale joj je $d = a\sqrt{3}$.
- **Valjak** (kružni) je geometrijsko tijelo koje možemo opisati kao prizmu s kružnim bazama, a ako je uspravan možemo ga opisati i kao rotacijsko tijelo koje nastaje rotacijom pravokutnika oko jedne njegove stranice. Oplošje uspravnog valjka kojemu je visina h i polumjer baze r je $P = 2r\pi(r + h)$.
- Volumeni prizmi i valjaka su $V = Bh$, gdje je B površina jedne baze.
- **Piramida** (n -terostrana) s vrhom V je poliedar omeđen jednim mnogokutom (bazom piramide, pri čemu ravnina baze ne sadrži V) i trokutima kojima su bridovi po jedan brid baze i spojnice V s njegovim krajevima. Visina piramide je duljina spojnice V s probodištem P okomice iz V na bazu. Trostrane piramide nazivaju se **tetraedrima**. **Pravilna piramida** je piramida kojoj je baza pravilni mnogokut i za koju je P središte baze.

- **Stožac** (kružni) možemo opisati kao piramidu s kružnom bazom, odnosno kao geometrijsko tijelo omeđeno jednim krugom i spojnicama (izvodnicama stoča) svih točaka njegove rubne kružnice s točkom izvan ravnine tog kruga. Oplošje uspravnog kružnog stošca polumjera baze r i visine h je
$$P = r \pi (r + \sqrt{h^2 + r^2}).$$
- Volumeni piramida i kružnih stožaca su trećina volumena prizmi odnosno valjaka iste površine baze B i iste visine h :
$$V = \frac{1}{3} B h.$$
- **Platonova tijela (pravilni poliedri)** su poliedri kojima su sve strane međusobno sukladni pravilni mnogokuti pri čemu se u svakom vrhu sastaje isti broj strana. Postoji pet Platonovih tijela: **pravilni tetraedar** (omeđen s četiri pravilna, tj. jednakostranična trokuta), **kocka** (pravilni heksaedar), **pravilni oktaedar** (omeđen s osam jednakostraničnih trokuta), **pravilni dodekaedar** (omeđen s 12 pravilnih peterokuta) i **pravilni ikozaedar** (omeđen s 20 jednakostraničnih trokuta).
- **Sfera** je ploha koja se sastoji od svih točaka koje su na istoj udaljenosti (polumjeru sfere) r od jedne točke (središta sfere). Volumen sfere je 0. Sfera skupa s dijelom prostora unutar nje naziva se **kugla**. Volumen kugle je
$$V = \frac{4}{3} r^3 \pi,$$
 a oplošje sfere i kugle je
$$P = 4r^2 \pi$$
 (četverostruka površina kruga kojeg dobijemo presjecanjem sfere odnosno kugle ravninom kroz središte).

Poglavlje 1

Uvod

1.1 Varijable i konstante

U primijenjenoj, a i u teorijskoj, matematici formule koje povezuju promatrane veličine često sadrže više oznaka nepreciziranog ili neistaknutog iznosa. Primjerice, jednačba stanja idealnog plina glasi

$$pV = nRT,$$

gdje je $R = 8,3145 \text{ J K mol}^{-1}$ opća plinska konstanta. Svakom fizičaru i kemičaru bit će jasno da je R „prava“ konstanta, tj. da uvijek ima istu vrijednost (i znat će njezinu vrijednost napamet ili naći ju u tablicama). No, ostale oznake (p , V , n , T) načelno ne predstavljaju konstantne veličine. Razlikovanje konstanti (nepromjenjivih veličina) i varijabli (veličina promjenjivog iznosa) u pravilu ima smisla tek u konkretnom kontekstu. Tako se recimo u jednoj situaciji mogu kao konstante uzeti n i T , dok će se ovisno o volumenu tlake mijenjati pa su p i V u tom kontekstu varijable. U nekom drugom slučaju ne mijenjaju se tlak i temperatura pa su p i T tada konstante, dok su onda n i V varijable.

Možemo reći da je u danom matematičkom modelu **konstanta** svaka veličina koja se u toku razmatranja tog modela neće mijenjati, dok je **varijabla** svaka veličina koju tokom razmatranja modela smatramo promjenjivom (to ne znači da se ona nužno i mijenja — bitna je načelna mogućnost njene promjene). Pritom razlikujemo **nezavisne i zavisne varijable**: Nezavisnim varijablama smatramo one koje su temeljne, čiji iznos ne ovisi o iznosu ikoje druge varijable, odnosno to su one koje načelno proizvoljno biramo unutar nekog raspona, a zavisnima one čiji iznos se mijenja uslijed promjene neke od nezavisnih varijabli — zavisne varijable ovise o nezavisnim.

Primjer 1 U jednačbi stanja idealnog plina možemo primjerice n , T i V smatrati nezavisnim varijablama (mijenjat ćemo ih po želji), a p o njima ovisjećom zavisnom varijablom (za svaki iznos n , T i V , pripadni iznos p je jednoznačno određen).

Varijable se mogu dijeliti i po jednom drugom principu na **diskretne i kontinuirane varijable**: Ako varijabla, bar načelno, može poprimiti bilo koju realnu vrijednost unutar nekog raspona, zovemo ju kontinuiranom, a ako pak može poprimiti samo konačno mnogo vrijednosti ili pak samo vrijednosti koje možemo numerirati cijelim brojevima naziva se diskretnom.¹ Diskretne se varijable obično pojavljuju kad se radi o nabranjanju nekih vrijednosti, dok se mjerljive fizikalne veličine (jedan važni izuzetak je brojnost) obično uzimaju kao kontinuirane varijable.

Primjer 2 *Tlak plina je kontinuirana varijabla: Njegovi iznosi u Pa načelno mogu biti svi pozitivni realni brojevi.*

Kvantni energijski nivoi pak čine diskretnu varijablu jer se mogu numerirati prirodnim brojevima.

1.2 Brojevi i mjerne jedinice

Kemičari i drugi prirodosnanstvenici brojeve koriste ponajviše za izražavanje rezultata mjerenjâ, tj. za navođenje iznosa (skalarnih) fizikalnih veličina. Iznosi fizikalnih veličina *uvijek* su umnošci po jednog broja i mjerne jedinice. Primjerice, nije dovoljno reći da je množinska koncentracija nečega 1,01; to je besmislen iznos ako se ne navede radi li se o, recimo, $1,01 \text{ mol L}^{-1}$ ili pak $1,01 \text{ mmol L}^{-1}$. Ponekad se pojavljuju i „čisti“ brojevi, poput logaritama kvocijenata nekih veličina (primjerice $\ln \frac{c}{\text{mol L}^{-1}}$), no ako se dogovorimo da je njima mjerna jedinica jednaka 1, onda i njih možemo shvatiti kao umnožak broja i jedinice. Matematički gledano, mjerne jedinice možemo smatrati konstantama s kojima je dozvoljeno množenje i dijeljenje. Dok se oznake konstanti i varijabli pišu kurzivno, oznake mjernih jedinica pišu se uspravno. Primjerice, m je oznaka varijable (npr. mase), a m je oznaka mjerne jedinice (metar).

Važno je zapamtiti: Dva iznosa ne mogu biti jednaka ako se ne podudaraju u fizikalnoj dimenziji. Drugim riječima, jednakost $a = b$ povlači da se veličine a i b mogu izraziti u istoj mjernoj jedinici. Varijable i konstante koje nemaju istu fizikalnu dimenziju ne mogu se zbrajati ni oduzimati. Ovo nazivamo principom homogenosti.

Primjer 3 *Za čestice idealnog plina molarne mase M pri temperaturi T definira se srednja kvadratna brzina*

$$v_{\text{srk}} = \sqrt{\frac{3RT}{M}}.$$

Primijetimo da se stvarno radi o brzini: Mjerna jedinica od R je $\text{J K}^{-1} \text{ mol}^{-1}$ pa je jedinica od $3RT$ J/mol . Slijedi da je jedinica od $3RT/M$ jednaka J/kg . Budući da

¹Možda nematematičaru nevjerovatno, ali istinito: Ako varijabla može poprimiti (samo) bilo koju racionalnu vrijednost unutar nekog raspona, ona je diskretna jer racionalnih brojeva ima jednako mnogo kao cijelih.

je 1 J isto što i $1\text{ kg m}^2/\text{s}^2$, slijedi da je jedinica od $3RT/M$ jednaka m^2/s^2 , dakle je jedinica od v_{srk} m/s .

Brojevi su matematički organizirani u skupove. **Skup** je jedan od temeljnih pojmova suvremene matematike. Pojam skupa se ne definira. Skup prepoznavamo po njegovim elementima, preciznije: Dva skupa su jednaka točno ako² imaju iste elemente. Uobičajene oznake za skupove su velika slova engleske abecede, a za njihove elemente mala slova. Za neke česte izjave vezane za skupove postoje kratki simbolički zapisi. Tako se za „objekt x je element skupa S ” (x je u S) kratko piše

$$x \in S,$$

a za „objekt x nije element skupa S ” (x nije u S) pišemo

$$x \notin S.$$

Želimo li pak reći da se skup S sastoji od svih objekata x koji imaju neko svojstvo $\heartsuit$ pišemo

$$S = \{x : \heartsuit\}.$$

Najčešće spominjani skupovi brojeva u matematici i njenim primjenama imaju istaknute oznake. To su redom:

1. **Skup prirodnih brojeva** $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$;
2. **Skup prirodnih brojeva s nulom** $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$;
3. **Skup cijelih brojeva** je skup svih rezultata oduzimanja prirodnih brojeva: $\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$;
4. **Skup racionalnih brojeva** je skup svih rezultata dijeljenja cijelih brojeva, tj. skup svih brojeva koji se mogu zapisati kao razlomci: $\mathbb{Q} = \{\frac{m}{n} : m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}\}$;
5. **Skup realnih brojeva** $\mathbb{R}$ uz racionalne brojeve sadrži i sve iracionalne brojeve i možemo ga shvatiti kao skup svih mogućih duljina dužina i njihovih suprotnih iznosa (ukoliko je zadana jedinična duljina);
6. **Skup kompleksnih brojeva** $\mathbb{C}$, o kojima ćemo više reći u odjeljku 4.

²Matematički izraz „točno ako” (alternativno: „ako i samo ako”) znači da dvije tvrdnje koje taj izraz povezuje mogu biti samo istovremeno istinite ili istovremeno lažne. Primjerice, „Student je položio Matematiku 1 ako i samo ako je iz nje dobio ocjenu dovoljan ili više”. Za razliku od toga, „ako” znači samo implikaciju: „Ako je student položio ispit iz Matematike 1, onda je položio pismeni dio ispita iz Matematike 1” (no, ako je položio pismeni dio ispita, ne znači da je položio i cijeli ispit, jer postoji i usmeni dio ispita).

Osnovne računske operacije s brojevima su zbrajanje, oduzimanje, množenje, dijeljenje, potenciranje i korjenovanje. U svakom od gore navedenih skupova možemo zbrajati i množiti (zbrojimo li odnosno pomnožimo dva elementa skupa, rezultat je element *istog* skupa). Pritom nije bitan redoslijed (kaže se: zbrajanje i množenje su komutativne operacije) i, dok se držimo samo zbrajanja ili samo množenja, zagrade nemaju utjecaja (kaže se: zbrajanje i množenje su asocijativne operacije). Formalno: Operacija $\diamond$ na skupu S je **komutativna** ako je $x \diamond y = y \diamond x$ za sve $x, y \in S$, a **asocijativna** je ako $(x \diamond y) \diamond z = x \diamond (y \diamond z)$ za sve $x, y, z \in S$.

Zbrajanje i množenje u svim gore navedenim skupovima (osim zbrajanja u $\mathbb{N}$) imaju još jedno lijepo svojstvo — imaju **neutralni element**: $x + 0 = 0 + x = x$ i $x \cdot 1 = 1 \cdot x = x$ za sve brojeve x . Općenito, neutralni element $\mathfrak{e}$ obzirom na neku operaciju $\diamond$ je onaj za koji, kad tu operaciju primijenimo na njega i bilo koji element promatranog skupa S , ne mijenja taj element: $x \diamond \mathfrak{e} = \mathfrak{e} \diamond x = x$ za sve $x \in S$.

Oduzimanje možemo shvatiti kao suprotnu operaciju od zbrajanja, a dijeljenje od množenja. Oduzimanje dva broja daje element istog skupa u svim gornjim slučajevima osim prva dva skupa ($5 - 7 = -2$ je rezultat oduzimanja dva prirodna broja, ali nije prirodan broj). Dijeljenje dva broja daje rezultat istog skupa samo u skupovima $\mathbb{Q}$ bez nule i $\mathbb{R}$ bez nule. Dijeljenje s nulom nije dozvoljeno (znate li zašto?).

Potenciranje se konstruira iz množenja i dijeljenja: Za prirodan broj n i bilo koji broj x je

$$x^n = \underbrace{x \cdot x \cdot x \cdots x}_n$$

(x pomnožen sam sa sobom $n - 1$ puta), a za $x \neq 0$

$$x^{-n} = \frac{1}{x^n}.$$

Po definiciji je $x^0 = 1$ za sve $x \neq 0$, a 0^0 nije definirano. Ako je $x^n = y$, kažemo da je x n -ti korijen iz y i pišemo $x = \sqrt[n]{y}$ ili $x = y^{\frac{1}{n}}$. Korjenovanje se dakle može shvatiti kao proširenje potenciranja na racionalne eksponente:

$$x^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{x^m}.$$

Ako želimo realan broj kao rezultat, ne može se računati paran korijen od negativnog broja (jer je umnožak bilo kojeg realnog broja sa samim sobom nenegativan broj).

Zadatak 1 *Koliko iznosi $-1^{-2^{-3^{-4}}}$?*

Zadatak 2 *Ako je student Ante Antić na prvom pristupu pismenom ispitu pao s 35 ostvarenih bodova, a na drugom pristupu je ostvario 21% više bodova, je li na drugom pristupu prošao ili pao (granica za prolaz pismenog dijela ispita je 45 bodova)? Koliko minimalno posto mora poboljšati svoj rezultat na drugom izlasku ako želi dobiti barem ocjenu dobar (tj. ostvariti bar 60 bodova)?*

Brojevi se zapisuju brojkama, a brojke se sastoje od pojedinačnih simbola koje zovemo znamenkama. Danas uobičajeni zapis realnog broja je **decimalni zapisi**, tj. zapis u kojem su pojedine znamenke brojke svojom pozicijom vezane za toj poziciji odgovarajuću potenciju broja deset (vidi i primjer ?? u posljednjem poglavlju).

Primjer 4 Brojka 725 predstavlja broj $7 \cdot 100 + 2 \cdot 10 + 5 = 7 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10^1 + 5 \cdot 10^0$. Brojka 2,14 predstavlja broj $2 + 1 \cdot \frac{1}{10} + 4 \cdot \frac{1}{100} = 2 \cdot 10^0 + 1 \cdot 10^{-1} + 4 \cdot 10^{-2}$.

Vidimo: Decimalni zapis broja x brojkom $a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0, b_1 b_2 b_3 \dots$ znači da je

$$x = a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \dots + a_1 \cdot 10 + a_0 + b_1 \cdot 10^{-1} + b_2 \cdot 10^{-2} + b_3 \cdot 10^{-3} + \dots$$

Neki realni brojevi, poput $\frac{1}{16}$, imaju konačan³ decimalni zapis ($\frac{1}{16} = 0,0625$) te je on potpuno egzaktni. Drugi brojevi, poput $\frac{1}{3}$ ili $\sqrt{2}$, nemaju konačan decimalan zapis te svaki njihov zapis s konačno mnogo znamenki nužno sadrži i grešku: $\frac{1}{3} \neq 0,3333$, $\sqrt{2} \neq 1,41$. Greška u takvom zapisu je reda veličine 10^{-m-1} (odgovarajuće mjerne jedinice) gdje je m broj znamenki iza decimalnog zareza u odabranoj aproksimaciji. Tako je greška zapisa $\frac{1}{3}$ kao $0,3333 = \frac{3333}{10000}$ reda veličine 10^{-5} , a greška zapisa $\sqrt{2}$ kao $1,41 = \frac{141}{100}$ je reda veličine 10^{-3} . Znak $=$ pravilno je koristiti samo kod egzaktne jednakosti (ili u računu s egzaktnim znamenkama, gdje je egzaktna vrijednost nepostojna), a kod aproksimacija brojeva odbacivanjem decimalnih znamenki se koristi simbol $\approx$: Dijagonala kvadrata stranice duljine 1 m ima duljinu $d = \sqrt{2}$ m, odnosno $d \approx 1,414$ m.

Uočimo i da je svaki konačan decimalni zapis sigurno racionalni broj. Svaki se realan broj x može proizvoljno točno aproksimirati racionalnim: Za svaku zadanu maksimalnu grešku $\varepsilon > 0$ postoji racionalan broj r takav da je $|x - r| < \varepsilon$.⁴ Pod decimalnim zapisom broja podrazumijeva se zapis sa *svim* znamenkama; tako shvaćen decimalni zapis uvijek je egzaktno jednak zapisanom broju. Čim za brojeve koji nemaju konačan decimalni zapis na kraju odbacimo jednu ili više znamenaka, dobili smo aproksimaciju promatranog broja — broj (racionalan) koji nije jednak tom broju, ali mu je više ili manje blizu.

Svi iracionalni brojevi imaju beskonačan, neperiodičan decimalni zapis, dok racionalni brojevi imaju periodičan decimalni zapis: $\frac{1}{2} = 0,5 = 0,5\dot{0}$ je periodičan, a $\pi = 3,14159\dots$ je neperiodičan.

Zadatak 3 Koji od sljedećih brojeva su racionalni, a koji su iracionalni: $\frac{1}{7} - \pi$, $\frac{0,71}{\frac{1}{3}}$, $\frac{\sqrt{3}}{5\sqrt{27}}$, $2 + \sqrt{2}$, $\frac{5}{9} : 2,5\dot{2}$, $\sqrt{75} - 2\sqrt{3}$?

³Zapravo se i konačan decimalni zapis može shvatiti kao beskonačan, s beskonačno mnogo nula iza zadnje nenul znamenke: $0,5 = 0,500000\dots = 0,5\dot{0}$.

⁴Primijetimo da je za realne, a isto tako i kompleksne, brojeve apsolutna vrijednost njihove razlike jednaka njihovoj udaljenosti (razmaku) na brojevnom pravcu (odnosno u kompleksnoj ravnini). Apsolutna vrijednost broja je njegova udaljenost do nule.

Zadatak 4 Odredite dva razlomka⁵ čiji decimalni zapis je $1,2\dot{3}0$.

Rezultati mjerenja fizičkih veličina uvijek u sebi sadrže grešku (nije moguće mjerenjem dobiti egzaktni iznos) pa se za brojevne dijelove njihovih vrijednosti uvijek koristi konačan decimalni zapis, pri čemu nije poznato koje su znamenke odbačene iza zadnje. Dakle, greška mjerenja nije isto što i greška uzimanja kraćeg decimalnog zapisa za egzaktni broj jer u prvom slučaju ne znamo, a u drugom znamo odbačene znamenke.

Ako izmjerili duljinu nekog predmeta kao 387,8 mm i znate da je greška uređaja za mjerenje najviše 0,5 mm, možete pisati da je duljina tog predmeta $387,8 \text{ mm} \pm 0,5 \text{ mm}$. Budući da je precizna greška mjerenja nepoznata, treba ju razumno procijeniti kako bi se izbjeglo navođenje znamenki koje su vjerojatno krive. Recimo, ako je pri nekom mjerenju duljine vjerojatno da rezultat 388,1 mm ne sadrži grešku veću od 1 mm, s obzirom na izmjereni iznos, vjerojatnije je da je rezultat 388 mm, nego 389 mm. Možemo reći da je izmjerena duljina 388 mm i to s točnošću na tri **značajne znamenke**. Da smo ju usprkos nesigurnosti u iznosu od 1 mm ipak zapisali kao 388,1 mm, rekli bismo da je u tom zapisu zadnja znamenka neznačajna. Neznačajne, tj. vjerojatno krive, znamenke se ne navode u rezultatima mjerenja i ne računa se s njima. Kad vidimo zapisan rezultat mjerenja, kao značajne znamenke se broje sve nenul znamenke, nule između nenul znamenki te nule iza decimalnog zareza. Nule na početku nikad nisu značajne. Nule koje služe samo za specifikaciju mjesta decimalnog zareza ne broje se u značajne znamenke. Npr. broj 0,0000345 ima tri značajne znamenke, broj 0,003045 ih ima četiri, a 0,000034500 ih ima pet (kako zadnje dvije nule nisu nužne za položaj decimalnog zareza, one moraju biti značajne). Ako se radi o egzaktnom broju, uzima se da ima beskonačno mnogo značajnih znamenki.

Kako bi se izbjegle nedoumice, uobičajeno je koristiti **znanstvenu notaciju**: to je zapis realnog broja x u obliku

$$x = m \cdot 10^n$$

gdje je realni broj $m \in [1, 10)$ tzv. mantisa (zapisana sa svim značajnim znamenkama), a $n \in \mathbb{Z}$ je eksponent (ili: karakteristika). Broj značajnih znamenki broja x jednak je broju značajnih znamenki mantise. Zahtjev da mantisa bude broj između 1 i 10 čini takav zapis jedinstvenim.

Primjer 5 Avogadrova konstanta iznosi $60221400000000000000000 \text{ mol}^{-1}$, što je na šest značajnih znamenki jednako

$$N_A = 6,02214 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}.$$

Naboj elektrona iznosi $0,000000000000000000000000160217 \text{ C}$, što je

$$e = 1,60217 \cdot 10^{-19} \text{ C}.$$

⁵Podsjećamo da isti racionalni broj može biti izražen s različitim razlomcima. Primjerice, $\frac{1}{2}$ i $\frac{20}{40}$ su različiti razlomci koji predstavljaju isti racionalni broj.

Red veličine broja je eksponent broja 10 u znanstvenom zapisu tog broja (karakteristika). Primjerice, broj $2,1 \cdot 10^{-5}$ je za 8 redova veličine manji od broja $5,345 \cdot 10^3$ jer je $10^3/10^{-5} = 10^8$. Ipak, kad govorimo o samo jednom broju obično se kao njegov red veličine navodi cijela potencija broja 10 u znanstvenom zapisu, primjerice 12345 je reda veličine 10^4 .

Kod računanja vrijede sljedeća pravila: Rezultat zbrajanja i oduzimanja treba imati isti broj znamenki iza decimalnog zareza kao najmanje točan početni podatak. Recimo, $12,11 + 18,0 + 1,013 = 31,123$ se u rezultatu navodi kao 31,1. Kod množenja i dijeljenja ne broje se mjesta iza decimalnog zareza, nego broj značajnih znamenaka: Broj značajnih znamenaka umnoška odnosno kvocijenta treba biti jednak broju značajnih znamenaka najmanje preciznog početnog podatka. Primjerice, $4,56 \cdot 1,4 = 6,38$ se u rezultatu navodi kao 6,4. Pritom se, kako bi se izbjeglo pojavljivanje greške zbog samog računa, račun treba provoditi s više znamenki i tek konačni rezultat zaokružiti u skladu s gornjim pravilima.

Primjer 6 Recimo da trebate izračunati $\frac{0,229 \cdot 15,913}{1,35 \cdot 0,00341}$. Prema pravilima, rezultat treba imati tri značajne znamenke te se ispravnim računom dobije rezultat $7,92 \cdot 10^2$. Ako biste pak računali u tri koraka, tj. prvo izračunali produkte $0,229 \cdot 15,913 = 3,64408$ i $1,35 \cdot 0,00341 = 0,0046035$, ali ih prije dijeljenja zaokružili na tri značajne znamenke dobili biste $\frac{3,64}{0,00460}$ što nakon zaokruživanja daje $7,91 \cdot 10^2$, tj. zbog zaokruživanja međurezultata imali biste grešku na trećoj značajnoj znamenici.

Zaokruživanje brojeva se može provoditi na više načina. Standardni način je sljedeći: Ako želimo odbaciti nekoliko zadnjih znamenki i one počinju s 5,6,7,8 ili 9, zaokružujemo na gore (zadnja znamenka ispred njih se pri odbacivanju poveća za 1: 3,7898 na tri decimale zaokruženo je 3,790), a ako počinju s drugim znamenkama nadolje. Ako pak odbacujemo niz znamenaka 500...0, ponekad se koristi sljedeće pravilo: parna znamenka ispred se ne mijenja, neparna ide nagore (7,85 na 7,8, a 7,15 na 7,2).

1.3 Pravokutni koordinatni sustav u ravnini

Često je korisno imati način prikazivanja uređenih parova brojeva, npr. parova podataka. **Uređeni par** dva (ne nužno različita) broja čine ta dva broja uz specifikaciju koji je prvi, a koji je drugi. Npr. (1, 2) je uređeni par različit od (2, 1). Uređene parove realnih brojeva možemo vizualizirati koristeći pravokutni koordinatni sustav. On se sastoji od dva brojeva, međusobno okomita, pravca koje nazivamo **koordinatnim osima**.

Brojevi pravac je pravac na kojem su označene pozicije brojeva 0 i 1 (čime je određeno mjerilo, tj. jedinična duljina⁶ na njemu) i strelica koja ukazuje na smjer

⁶Duljina je matematički objekt, dio pravca između dvije točke. Duljina je fizikalna veličina, sa SI jedinicom metar (m).

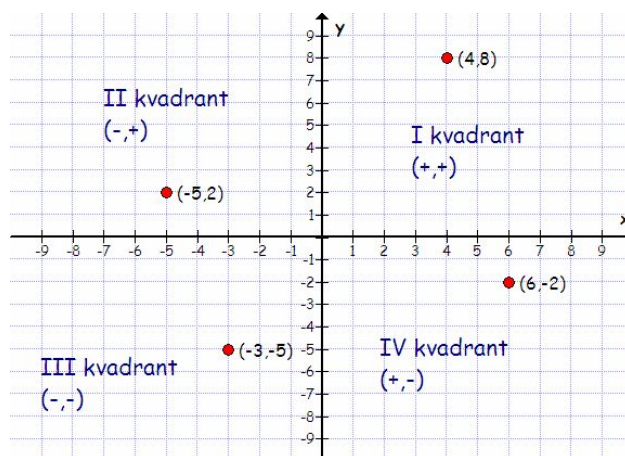
porasta brojeva. Svakom realnom broju odgovara točno jedna točka brojevnog pravca i obrnuto, svakoj točki na brojevnom pravcu odgovara točno jedan realan broj. Intervali, tj. skupovi realnih brojeva koji se nalaze između dva realna broja a i b (gdje je $a < b$) na brojevnom pravcu se prikazuju kao dužine, s uključenim ili isključenim krajevima ovisno o tome je li a odnosno b uključen u interval. Primjerice, interval $[-2, 5)$ (skup svih x takvih da je $-2 \leq x < 5$) će biti dužina duljine 7 razmaka od 0 od 1, pri čemu će točka koja predstavlja -2 biti uključena, a točka koja predstavlja 5 isključena. Intervali mogu kao lijevi (otvoreni) rub imati $-\infty$ (ako se u njima nalaze neograničeno mali brojevi) odnosno kao desni (otvoreni) rub mogu imati $+\infty$ (ako se u njima nalaze neograničeno veliki brojevi) i u tom slučaju im duljine nisu konačne. Primjerice, $\langle 0, +\infty \rangle$ je neograničen interval koji sadrži sve pozitivne realne brojeve.

Brojevni pravci (koordinatne osi) pravokutnog koordinatnog sustava se sijeku u zajedničkoj nuli (**ishodištu** koordinatnog sustava). Pritom jedinične duljine na osima ne moraju biti jednake, a ako jesu, sustav zovemo **Kartezijevim koordinatnim sustavom**. Kad unosimo par brojeva (x, y) u pravokutni koordinatni sustav, jedan broj (prvi broj x u paru) nanosi se na horizontalnu os koju zovemo os apscisa, a drugi (y) na vertikalnu os koju zovemo os ordinata. Par (x, y) je onda prikazan točkom koja je sjecište okomica povučenih na obje osi u točkama koje odgovaraju nanesenim podacima. Brojevi x i y zovu se **koordinatama** točke (x, y) (apsisa i ordinata). Ukoliko u koordinatni sustav unosimo točke koje prikazuju parove vrijednosti nezavisne i pripadne joj vrijednosti zavisne varijable, standard je da se iznosi nezavisne varijable nanose kao apscise, a iznosi zavisne kao ordinate. Ishodište koordinatnog sustava po definiciji ima obje koordinate jednake 0. Točke na osi apscisa imaju ordinatu 0, a točke na osi ordinata imaju apscisu 0. Koordinatni sustav dijeli ravninu na četiri **kvadranta**; u prvom su točke kojima su obje koordinate pozitivne, u drugom one s negativnom apscisom i pozitivnom ordinatom, u trećem one kojima su obje koordinate negativne, a u četvrtom one s pozitivnom apscisom i negativnom ordinatom (vidi sliku 1.1).

Svaka koordinatna os se označava oznakom koja nam govori što brojevi na toj osi predstavljaju. U pravokutni koordinatni sustav u ravnini unose se isključivo parovi *brojeva*; dakle, ako u pravokutnom koordinatnom sustavu prikazujemo parove rezultata nekih mjerenja, na osima su iznosi tih mjerenja podijeljeni s odabranom mjenom jedinicom. Stoga su brojevi na osima „čisti“ brojevi pa su pravilne oznake osi oznake veličina (vrste podataka) podijeljene s odabranom mjernom jedinicom. Apstraktne oznake osi su x odnosno y , a njih u konkretnim situacijama zamjenjujemo upravo opisanim konkretnim oznakama.

Primjer 7 Ako na jednu koordinatnu os nanosimo brzine u metrima u sekundi, pravilna oznaka te osi je $v/(m/s)$, $v/(ms^{-1})$ ili $v m^{-1} s$.

U praksi nacrtano sjecište osi često nije točka kojoj su obje koordinate 0, tj. nije ishodište koordinatnog sustava (obično su koordinate nacrtanog sjecišta malo manje od, za konkretnu situaciju, najmanje potrebne apscise odnosno ordinate).

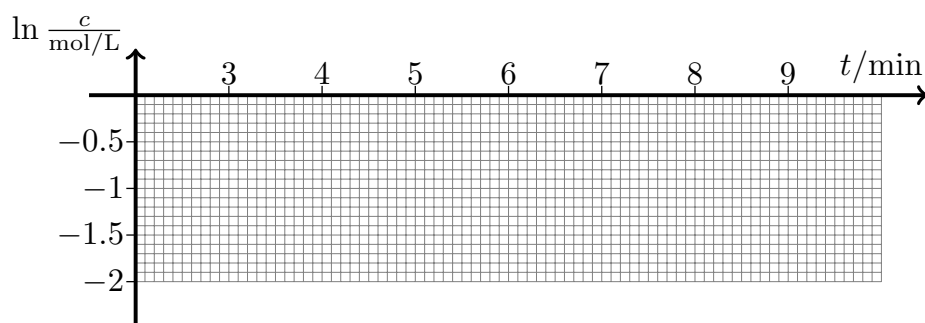


Slika 1.1: Pravokutni koordinatni sustav (slika izrađena programom Graph).

Stoga oprez: Ishodište je zajednička nula, dok nacrtano sjecište osi ne mora biti ishodište koordinatnog sustava (odnosno, moguće je da jedan ili oba nacrtana brojeva pravca zapravo nisu koordinatne osi).

Želite li dobro planirati prostor papira za skiciranje podataka, potrebno je prvo odrediti raspon $[a, b]$ iznosa podataka koje nanosimo na apscisu i raspon $[c, d]$ iznosa podataka koje nanosimo na ordinatu. Sjecište osi obično se, ali ne nužno, crta dolje lijevo. Za njega se uzima točka s koordinatama blizu (a, c) , a najdesnija točka ima apscisu b i najgornja ordinatu d (te se tome prilagode jedinične duljine na osima). Ako je $a < 0 < b$, sjecište koordinatnih osi se stavlja u 0 na apscisi, odnosno ako je $c < 0 < d$ u 0 na ordinati, umjesto da se crta u donjem lijevom kutu papira.

Primjer 8 Recimo da želimo prikazivati vremena iz raspona $2 \text{ min} \leq t \leq 10 \text{ min}$ i prirodne logaritme izmjerenih koncentracija reaktanta (podijeljenih s mjernom jedinicom mol L^{-1}) koji se nalaze u rasponu $-2 \leq \ln \frac{c}{\text{mol/L}} \leq -0,5$. Prikladan raspon apscisa bio bi malo veći od 2 do 10, a raspon ordinata malo veći od -2 do -0,5. Odgovarajuća oznaka osi apscisa je t/s , a osi ordinata $\ln \frac{c}{\text{mol/L}}$. Takav koordinatni sustav prikazan je slikom 1.2. Primijetimo da ovdje nacrtano sjecište osi nije ishodište, nego točka $(0, 2)$.



Slika 1.2: Odabir raspona na koordinatnim osima (primjer 8).

Zadatak 5 Pri nekom eksperimentu dobivene su sljedeće vrijednosti tlaka para etanola pri različitim temperaturama:

$t/^{\circ}\text{C}$	p/torr
25	55,900
30	70,000
35	93,800
40	117,50
45	154,10
50	190,70
55	241,90
60	304,15
65	377,90

Skicirajte podatke u pravokutnom koordinatnom sustavu tako da na apscisi budu temperature, a na ordinati tlakovi, te tako da prostor crtanja bude što bolje iskorišten, tj. tako da sadrži sve potrebne točke i što manje onih koje nisu relevantne.

Za kraj, napomenimo da se u kontekstu korištenja pravokutnih koordinatnih sustava pravci paralelni s osi apscisa nazivaju horizontalnim, a pravci paralelni s osi ordinata vertikalnim.

Poglavlje 2

Realne funkcije jedne varijable

2.1 Pojam funkcije i grafa funkcije

Pod funkcijom se obično — krivo — podrazumijeva pravilo kojim se nekim objektima pridružuju neki drugi objekti, tj. formula kojom se iz x izračuna $f(x)$. Što je krivo u tom shvaćanju? Svakako je točno da je pravilo pridruživanja bitan dio pojma funkcije, no nedostatak ovakve „definicije” je neisticanje skupa u kojem se nalaze elementi kojima pravilo nešto pridružuje (skupa nezavisnih varijabli) i skupa u kojem se nalaze rezultati pridruživanja (skupa zavisnih varijabli). Naime, isto pravilo se može odnositi na različite skupove objekata. Primjerice, masa se vaganjem su jednom kontekstu može pridruživati ljudima, a u drugom brašnu. Također, u „definiciji” da je funkcija samo pravilo pridruživanja nije istaknuto da ne smije biti višestrukog pridruživanja (pridruživanje više objekata jednom objektu). Pravilnija definicija je:

Definicija 1 (Funkcija) Svaka *funkcija* se sastoji od tri komponente:

1. *Domena*: Skup u kojem se nalaze objekti kojima se nešto pridružuje, tj. nezavisne varijable.
2. *Kodomena*: Skup u kojem se nalaze rezultati pridruživanja (zavisne varijable).
3. *Pravilo* kojim se svakom elementu domene pridružuje točno po jedan element kodomene.

Uobičajene oznake su D za domenu, K za kodomenu i f za samo pravilo. Funkciju tada označavamo

$$f : D \rightarrow K$$

i kažemo „ f sa D u K ”. Ako funkcija f nezavisnoj varijabli x pridružuje zavisnu varijablu y , pišemo $y = f(x)$. Ukoliko ne želimo isticati oznaku zavisne varijable, koristi se ekvivalentan zapis $x \mapsto f(x)$. Oznaka f predstavlja „čitavu” funkciju, dok

je $f(x)$ vrijednost funkcije za jedan element domene x , dakle $f(x)$ je jedan element kodomene funkcije f . U većini slučajeva $f(x)$ možemo poistovjetiti s formulom, tj. pravilom djelovanja funkcije.

Primjer 9 Funkcija *identiteta* je funkcija $\text{id} : A \rightarrow A$, gdje je A bilo kakav skup, koja „ništa ne radi”, tj. svakom elementu pridružuje njega samog: $\text{id}(x) = x$ za sve $x \in A$.

Funkcije kojima je kodomena podskup¹ skupa $\mathbb{R}$ nazivamo **realnim funkcijama**. U ovom i sljedećem poglavlju bavit ćemo se isključivo **realnim funkcijama jedne varijable**, tj. funkcijama kojima su i domena i kodomena podskupovi od $\mathbb{R}$. Možemo reći da su to funkcije koje (realnim) brojevima pridružuju (realne) brojeve.

Često se koristi i pojam **prirodne domene** funkcije. To je najveći skup koji za dano matematičko pravilo može biti domena, tj. skup *svih* matematičkih objekata na koje se pravilo može smisleno primijeniti. Primjerice, za pravilo realne funkcije $f(x) = \frac{1}{x-5}$ prirodna domena je skup $\mathbb{R} \setminus \{5\}$ jer se jedino za $x = 5$ ne može izračunati $\frac{1}{x-5}$. Domena funkcije je uvijek podskup prirodne domene koja odgovara pravilu kojim je opisano djelovanje funkcije. Ukoliko se funkcija zadaje samo formulom $f(x)$, bez konteksta ili eksplicitnog specificiranja domene, podrazumijeva se da joj je domena prirodna domena.

Realne funkcije jedne varijable možemo vizualizirati pomoću prikaza funkcijske ovisnosti u koordinatnom sustavu. **Graf funkcije** f čija nezavisna varijabla je označena s x , a pridružena vrijednost s $f(x)$, je skup *svih*² uređenih parova

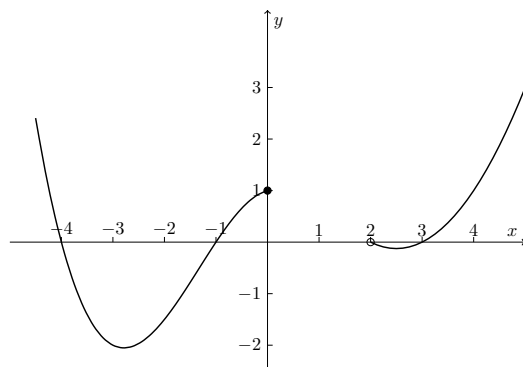
$$(x, f(x))$$

kad x prolazi domenom funkcije. Budući da uređene parove realnih brojeva možemo poistovjetiti s točkama u pravokutnom koordinatnom sustavu, graf realne funkcije jedne varijable možemo prikazati ucrtavanjem točaka s koordinatama $(x, f(x))$ u pravokutni koordinatni sustav. Pritom se domena vizualizira kao skup svih apscisa točaka grafa (dakle kao podskup x -osi), a rezultati, tj. elementi kodomene, nanose se na y -os. S obzirom na standardnost takvog prikaza, uobičajeno je i njega nazivati grafom funkcije. Pritom se podrazumijeva da se u okviru nacrtane slike mogu uočiti sve bitne karakteristike grafa, a da se izvan okvira graf nastavlja s istim trendom koji je naznačen na slici (primjerice, na slici 2.1 podrazumijevamo da je funkcija definirana i za sve brojeve manje od -4 odnosno veće od 4 , i da pritom pada „udubljeno”³ za $x < -4$, a da raste „udubljeno” za $x > 4$). Pune točke $\bullet$ se koriste za naglašavanje kad je neka točka na grafu, bilo radi lakšeg očitavanja odgovarajućih iznosa nezavisne i zavisne varijable, bilo radi naglašavanja da se radi

¹Svaki skup je sam sebi podskup. Za skup B kažemo da je podskup skupa A ako je svaki element od B ujedno element od A . Primjerice, skup svih ljudi rođenih u 21. stoljeću je podskup skupa svih ljudi koji su ikad živjeli.

²Dakle, ne samo onih koje smo stvarno u stanju nacrtati.

³Kasnije ćemo ovaj oblik grafa zvati konveksnim.



Slika 2.1: Određivanje nultočki i vrijednosti funkcije u nuli iz grafa.

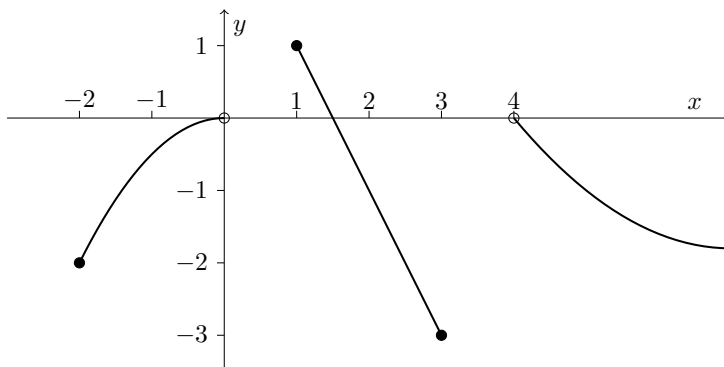
o početnoj ili krajnjoj točki nekog dijela grafa koja je i sama dio grafa. Prazne točke $\circ$ se pak koriste za naglašavanje pozicija točaka koje su bitne za graf, ali nisu njegov dio. Tako je primjerice na slici 2.1 točka $(0, 1)$ označena puno da bi se istaknulo da je $f(0) = 1$ i da funkcija nije definirana za brojeve veće od 0 (sve do 2), dok je točka $(2, 0)$ označena prazno da se ne samo naglasi da f nije definirana u 2, nego i da lijevo od te točke nemamo točaka grafa (sve do $x = 0$), odnosno da f nije definirana za brojeve malo manje od 2.

Pojam grafa funkcije nikako se ne smije miješati s pojmom slike funkcije. **Slika funkcije** je podskup kodomene koji se sastoji od onih zavisnih varijabli koje imaju original (koje su stvarno pridružene nekoj nezavisnoj varijabli). Dakle, slika funkcije $f : D \rightarrow K$ je $\{f(x) : x \in D\}$. Primjerice, slika realne funkcije $f(x) = x^2$ je skup $[0, +\infty)$ jer x^2 ne može postići negativnu vrijednost, ali može postići sve nenegativne. Ako nam je dan crtež grafa u pravokutnom koordinatnom sustavu, lako je očitati domen i sliku funkcije: jednostavno projiciramo graf na os apscisa, odnosno na os ordinata.

Zadatak 6 Na slici 2.2 je graf funkcije čija domena je $[-2, 0) \cup [1, 3] \cup \langle 4, +\infty \rangle$, dok je slika te funkcije $\langle -\infty, 1]$ (desni dio grafa sugerira da funkcija nastavlja padati u beskonačnost kad x raste).

Neke bitne posljedice definicije funkcije i njenog grafa na prikaz grafa realne funkcije jedne varijable u pravokutnom koordinatnom sustavu su sljedeće:

- Svaka vertikala (paralela s osi ordinata) siječe graf funkcije najviše jednom (zašto?).
- Sjecište grafa s osi ordinata je, ako postoji, točka $(0, f(0))$, tj. njegova ordinata predstavlja vrijednost funkcije u nuli.



Slika 2.2: Određivanje domene i slike funkcija iz grafa (ilustracija uz zadatak 6).

- Elementi domene kojima funkcija pridružuje nulu zovu se **nultočke funkcije**. Dakle, nultočke⁴ funkcije f su rješenja jednadžbe⁵ $f(x) = 0$. Svako sjecište grafa s osi apscisa kao apscisu ima neki $x \in D$, a kao ordinatu $0 = f(x)$, pa apscise sjecišta grafa s osi apscisa predstavljaju nultočke funkcije.
- Funkcija je pozitivna/negativna (u smislu: vrijednosti $f(x)$ su pozitivne/negativne) za one vrijednosti apscisa x za koje su pripadne točke grafa iznad/ispod x -osi.

Zadatak 7 Što znamo o funkciji ako njen graf ne siječe os ordinata?

Zadatak 8 Može li graf funkcije sjeći neku horizontalu (paralelu s osi apscisa) više od jednom?

Zadatak 9 Ovisnost tlaka p o volumenu V idealnog plina pri konstantnoj temperaturi T i množini n dana je formulom:

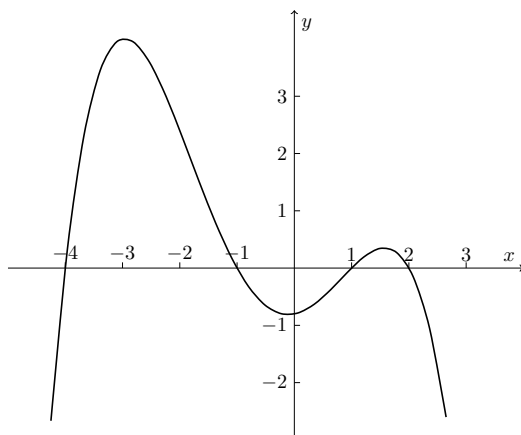
$$p(V) = nRT \cdot \frac{1}{V}.$$

Tako definirana funkcija p ima prirodnu domenu $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, no zbog konteksta kao domenu uzimamo $\langle 0, +\infty \rangle$.⁶ Tlak pri pozitivnom volumenu je očigledno pozitivan, pa će se graf ove funkcije nalaziti u prvom kvadrantu. Skicirajte pet točaka pripadnog grafa i komentirajte (ne)postojanje sjecišta s koordinatnim osima!

⁴Pod nultočkama ovdje podrazumijevamo *realne* nultočke.

⁵Ovdje je dobro podsjetiti na razliku jednadžbe i funkcije. U kontekstu grafova, funkcija $y = f(x)$ predstavlja čitav graf, dok jednadžba opisuje točke na tom grafu kojima je zadan iznos ordinate, tj. presjek grafa s nekim horizontalnim pravcem.

⁶Primijetimo da iako ovdje, nepravilno, volumene poistovjećujemo s realnim brojevima bez da smo definirali jedinicu, izjava o prirodnoj domeni je točna jer je svejedno želimo li reći da volumen mora biti veći primjerice od 0 L ili od 0 m³.



Slika 2.3: Određivanje predznaka funkcije iz grafa.

Zadatak 10 Iz na slici 2.1 prikazanog grafa funkcije f očitajte koja joj je vrijednost u $x = 0$ i koje su joj nultočke. Na kojim intervalima f poprima pozitivne vrijednosti?

2.2 Svojstva funkcija i njihovih grafova

Funkcija može biti rastuća ili padajuća na nekom intervalu koji je jednak domeni ili je pak njezin podskup. Funkcija **(strogo) raste** na intervalu I ako veće vrijednosti nezavisne varijable iz I daju i veće rezultate (zavisne varijable):

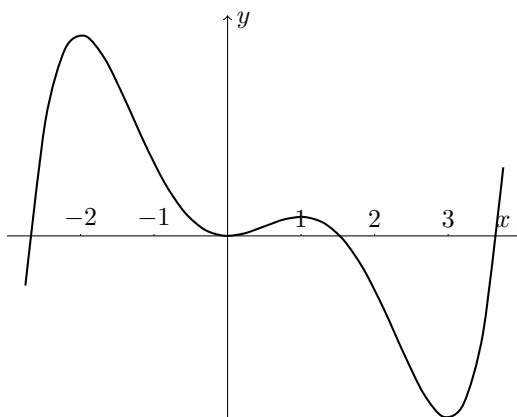
$$x < x' \Rightarrow f(x) < f(x') \quad (\text{za } x, x' \in I).$$

Funkcija **(strogo) pada** na intervalu I (koji je podskup domene) ako veće vrijednosti nezavisne varijable iz I daju manje rezultate (zavisne varijable):

$$x < x' \Rightarrow f(x) > f(x') \quad (\text{za } x, x' \in I).$$

Stroge nejednakosti između $f(x)$ i $f(x')$ se u gornjim definicijama mogu zamijeniti ne-strogima ($\leq$ odnosno $\geq$), čime dobivamo definicije (monotono) rastućih i padajućih funkcija. Budući da se veće vrijednosti ordinata u pravokutnom koordinatnom sustavu nalaze iznad manjih, vizualno rast odnosno pad funkcije na intervalu I vidimo tako da gledajući slijeva udesno (nad intervalom I na osi apscisa) graf funkcije ide prema gore odnosno dolje.

Primjer 10 Pogledajmo graf na slici 2.4. Funkcija čiji je to graf **(strogo) raste** na intervalima $\langle -\infty, -2 \rangle$, $\langle 0, 1 \rangle$ i $\langle 3, +\infty \rangle$, a **(strogo) pada** na intervalima $\langle -2, 0 \rangle$ i $\langle 1, 3 \rangle$. Svaki od simbola $\langle \cdot \rangle$ u prethodnoj rečenici može biti zamijenjen s $[\cdot]$ odnosno s $] \cdot]$, osim ako je uz $-\infty$ ili $+\infty$.



Slika 2.4: Određivanje intervala rasta i pada iz grafa.

Drugo važno svojstvo koje realna funkcija jedne varijable može imati je (ne)parnost. To svojstvo ima smisla provjeravati samo ako je domena funkcije simetrična s obzirom na nulu, npr. ako je domena $\mathbb{R}$, $[-5, 5]$ ili $\langle -\infty, -3 \rangle \cup \langle 3, +\infty \rangle$. Funkcija f s takvom domenom je **parna funkcija** ako je svejedno uvrštavamo li u nju x ili $-x$ (promjena predznaka nezavisne varijable ne utječe na rezultat): za sve x iz domene je

$$f(-x) = f(x).$$

Primjer parne funkcije je $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$. Grafovi parnih funkcija su simetrični s obzirom na os ordinata (objasnite zašto!).

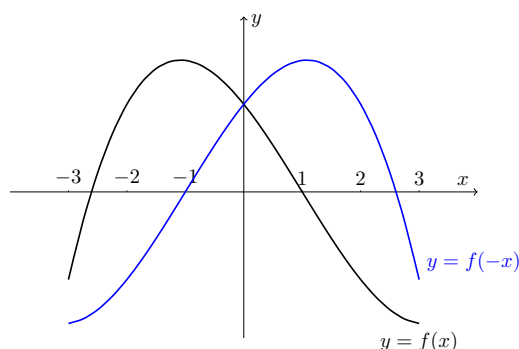
Funkcija f sa simetričnom domenom je **neparna funkcija** ako uvrštavanje $-x$ umjesto x promijeni predznak rezultata (promjena predznaka nezavisne varijable obrće predznak njoj pridružene zavisne varijable): za sve x iz domene je

$$f(-x) = -f(x).$$

Primjer neparne funkcije je $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^3$. Grafovi neparnih funkcija su simetrični obzirom na ishodište, odnosno posjeduju rotacijsku simetriju reda 2 oko ishodišta⁷ (zašto?).

Na koncu, spomenimo i svojstva injektivnosti, surjektivnosti i bijektivnosti. Funkcija je **injekcija** ako različiti originali daju različite rezultate, tj. ako iz $f(x) = f(x')$ nužno slijedi $x = x'$. Vizualno injektivnost realne funkcije jedne varijable vidimo po tome da sve horizontale graf funkcije sijeku najviše jednom. Funkcija je **surjekcija** ako svaki element kodomene ima svoj original u domeni, tj. ako za svaki $y \in K$ možemo naći $x \in D$ takav da je $f(x) = y$. Surjektivnost je u pravilu lako postići smanjivanjem kodomene: Ako stavimo da je slika funkcije njena kodomena,

⁷U ravnini su centralna simetrija i rotacijska simetrija reda 2, tj. rotacijska simetrija s kutom 180° , jedno te isto.



Slika 2.5: Promjena predznaka (nezavisne) varijable.

funkcija je automatski (štaviše, po definiciji) surjektivna.⁸ Vizualno surjektivnost realne funkcije jedne varijable vidimo po tome da svaka horizontala kroz točke kodomene bar jednom siječe graf. Ako je funkcija injekcija i surjekcija kažemo da je **bijekcija**.

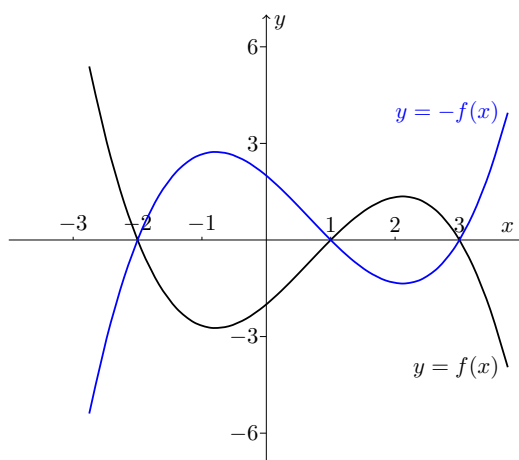
2.3 Transformacije grafova

Ako znamo kako u pravokutnom koordinatnom sustavu izgleda graf neke realne funkcije jedne varijable $y = f(x)$, lako je skicirati grafove mnogih drugih iz nje izvedenih funkcija — svih onih koje se iz te funkcije mogu dobiti kombinacijom promjene predznaka nezavisne ili zavisne varijable, pribrajanjem ili oduzimanjem konstante nezavisnoj ili zavisnoj varijabli te skaliranjem zavisne ili nezavisne varijable pozitivnom konstantom. Ukratko, ako je poznat graf funkcije f , transformacijama grafova se mogu dobiti grafovi svih funkcija čija pravila su oblika $g(x) = a + b f(cx + d)$ s konstatnim a, b, c i d .

Prvi tip transformacije grafa je zrcaljenje (osna simetrija) s obzirom na jednu od koordinatnih osi uslijed promjene predznaka nezavisne ili zavisne varijable. Ako se promjena predznaka odnosi na domenu (zamjena nezavisne varijable x s $-x$), zrcalimo s obzirom na os ordinata, a ako se odnosi na kodomenu (promjena predznaka zavisne varijable s $f(x)$ na $-f(x)$), onda zrcalimo s obzirom na os apscisa:

- Ako je $g(x) = f(-x)$, graf funkcije g dobije se zrcaljenjem grafa od f s obzirom na os ordinata; vidi sliku 2.5.
- Ako je $g(x) = -f(x)$, graf funkcije g dobije se zrcaljenjem grafa od f s obzirom na os apscisa; vidi sliku 2.6.

⁸Formalno, promjena kodomene znači i promjenu funkcije, no kako ta promjena ne utječe na graf funkcije, nećemo to posebno isticati.



Slika 2.6: Promjena predznaka funkcije (zavisne varijable).

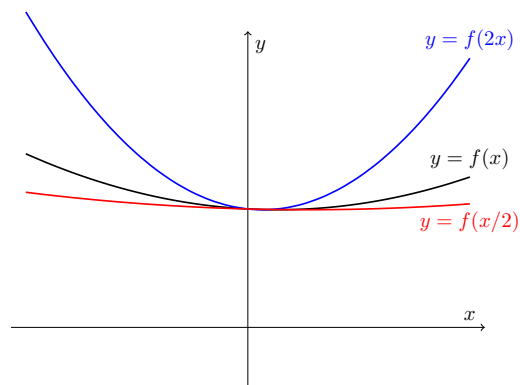
Drugi tip transformacije je skaliranje (rastezanje odnosno stezanje) grafa u horizontalnom ili vertikalnom smjeru uslijed skaliranja nezavisne varijable (x zamjenjujemo s Ax pa se skaliranje odnosi na domenu, odnosno graf se horizontalno rasteže ili stišće) ili zavisne varijable ($f(x)$ prelazi u $Af(x)$ pa se skaliranje odnosi na kodomenu, odnosno graf se vertikalno rasteže ili stišće). S obzirom na to da smo već opisali efekt promjene predznaka funkcije na graf, ovdje je dovoljno razmatrati skaliranje pozitivnom konstantom $A > 0$:

- Ako je $g(x) = f(Ax)$, graf funkcije g ima isti oblik kao graf funkcije f i isto sjecište s osi ordinata (ako ga uopće ima), ali je horizontalno rastegnut za $A < 1$, a za $A > 1$ je stisnut (vidi sliku 2.7).
- Ako je $g(x) = Af(x)$, graf funkcije g ima isti oblik kao graf funkcije f i iste nultočke, ali je vertikalno rastegnut za $A > 1$, za $A < 1$ graf je vertikalno spljošten (vidi sliku 2.8). Primijetimo da skaliranjem s obzirom na kodomenu ne mijenjamo domenu funkcije.

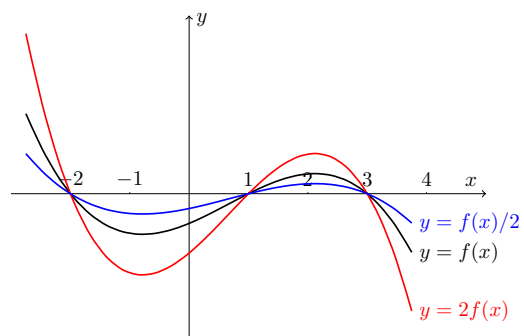
Uočimo da je ovaj drugi tip transformacija grafova ekvivalentan promjeni jedinica na koordinatnim osima.

Primjer 11 Ako imamo graf $y = f(x)$, graf od $y = 3f(x)$ možemo nacrtati ili u istom koordinatnom sustavu na način opisan gore ili pak alternativno ne promijeniti graf, ali na osi ordinata, jer se radi o skaliranju u kodomeni, sve oznake brojeva pomnožiti s 3.

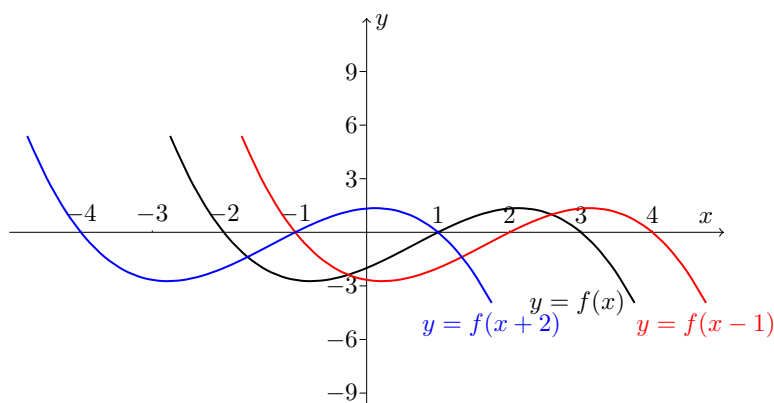
Treći tip transformacije grafa je translacija, koja može biti horizontalna ako se odnosi na domenu (zamjena varijable x s varijablom $x + A$) ili vertikalna ako se odnosi na kodomenu (promjena vrijednosti funkcije s $f(x)$ na $f(x) + A$):



Slika 2.7: Skaliranje nezavisne varijable.



Slika 2.8: Skaliranje funkcije (zavisne varijable).



Slika 2.9: Horizontalna translacija grafa.

- Ako je $g(x) = f(x + A)$, graf funkcije g dobije se translacijom grafa od f za iznos A ulijevo (dakle, ako je A negativan, pomak je udesno), vidi sliku 2.9.
- Ako je $g(x) = f(x) + A$, graf funkcije g dobije se translacijom grafa od f za iznos A prema gore (dakle, ako je A negativan, pomak je nadolje), vidi sliku 2.10.

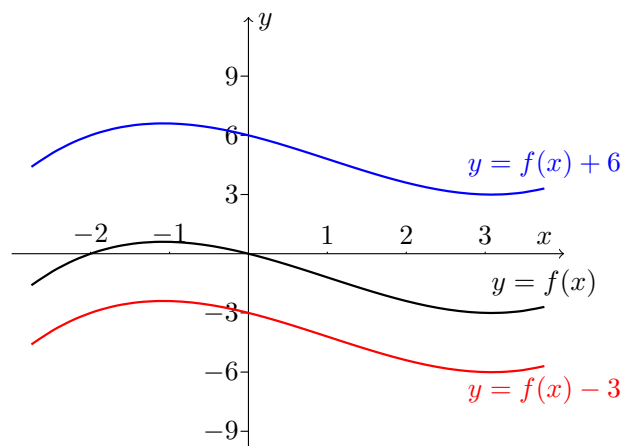
Uočimo da je treći tip transformacija grafova ekvivalentan pomaku (translaciji) koordinatnih osi.

Primjer 12 Ako imamo graf $y = f(x)$, graf od $y = f(x + 3)$ možemo nacrtati ili u istom koordinatnom sustavu na način opisan gore ili pak alternativno ne promijeniti, tj. ne translirati, graf, nego pomaknuti os ordinata za 3 jedinice osi apscisa udesno, tj. pomaknuti os ordinata tako da ishodište padne u točku koja je isprva bila $(3, 0)$.

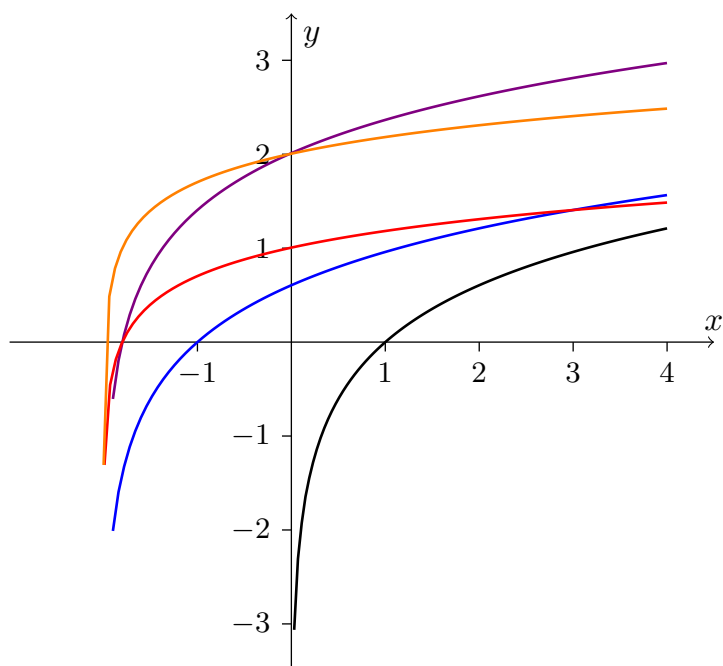
Pomoću upravo opisanih pravila se iz poznavanja malog broja grafova (grafova osnovnih elementarnih funkcija, koje ćemo ponoviti u sljedećim odjeljcima) mogu lako i dosta precizno nacrtati grafovi mnogih drugih funkcija. Primjerice, ako znamo nacrtati graf funkcije s formulom $f(x) = e^x$, temeljem gornjih pravila možemo nacrtati grafove funkcija s formulama e^{x+1} , $e^x - 2$, $-e^x$ i $3e^x$. Primijetimo da translacije i skaliranja s pozitivnim konstantama ne mijenjaju osnovni oblik grafa, već samo njegovo pozicioniranje i veličinu u koordinatnom sustavu.

Zadatak 11 Koje od šest osnovnih transformacija grafova ne mijenjanju sjecišta s osi apscisa? A koje ne mijenjaju sjecište s osi ordinata?

Primjer 13 Na slici 2.11 crno u crnom koordinatnom sustavu je nacrtan graf funkcije $\log_\pi$. Nacrtajmo graf funkcije čije je pravilo $f(x) = 1 + \frac{1}{2} \log_\pi(10 + 5x)$.



Slika 2.10: Vertikalna translacija grafa.

Slika 2.11: Graf funkcije $\log_\pi$ (crno) i njegova transformacija do grafa funkcije $f(x) = 1 + \frac{1}{2} \log_\pi(5 + 4x)$ (narančasto)

Budući da nemamo promjenu predznaka ni u domeni ni u kodomeni, znamo da će graf funkcije f izgledati po obliku i orijentaciji jednako kao graf funkcije $\log_\pi$, ali će brojevi na osima i pozicije osi biti pomaknute jer imamo uključena sva četiri tipa transformacija koja na njih utječu.

Kako bismo lakše pratili redoslijed transformacija, preoblikujmo formulu funkcije f u

$$f(x) = 1 + \frac{1}{2} \log_\pi(5 \cdot (x + 2)) + 3.$$

Budući da množenje i dijeljenje imaju prednost pred zbrajanjem i oduzimanjem, te uzevši u obzir redoslijed uvrštavanja, imamo redom:

1. Prvo se x poveća za 2, dakle se graf translacija za 2 ulijevo (plavo na slici 2.11 je graf funkcije $\log_\pi(x + 2)$). Nultočka je sad -1 umjesto 1.
2. Zatim se $x + 2$ skalira s faktorom 5, odnosno naš se graf horizontalno stegne 5 puta; s obzirom na oblik grafa, to znači strmiji rast (ljubičasto na slici 2.11 je graf od $\log_\pi(5x + 10)$). Nultočka je sad $-9/5$ umjesto -1 .
3. Zatim imamo skaliranje s faktorom $\frac{1}{2}$ u kodomeni, dakle se graf vertikalno dvostruko stisne (crveno na slici 2.11 je graf od $\frac{1}{2} \log_\pi(5x + 10)$, nultočka se nije promijenila).
4. Naposljetku imamo translaciju za 1 u kodomeni, tj. nagore – narančasti graf na slici 2.11 je graf funkcije f .

Zadatak 12 Za funkciju f čiji graf je prikazan na slici 2.3, nacrtajte graf funkcije $g(x) = 3 - f(1 - x/2)$.

2.4 Algebarske funkcije

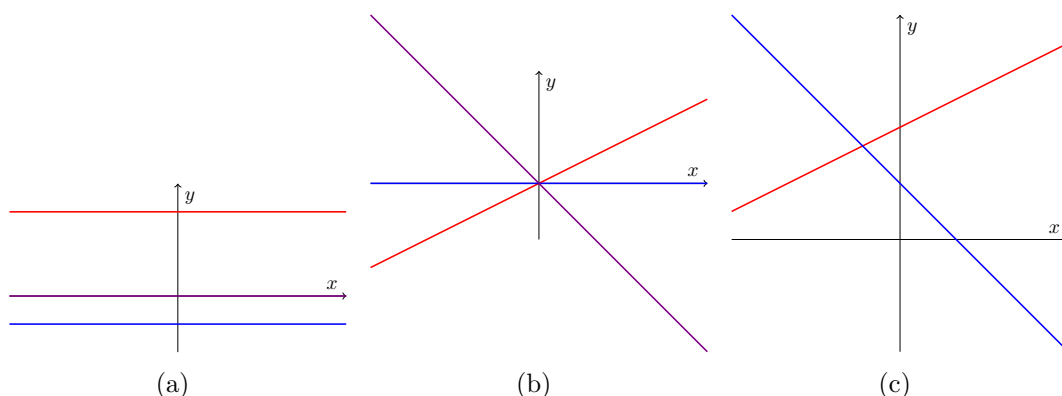
2.4.1 Afine funkcije

Afine funkcije (često nazivane i linearnim funkcijama) nezavisnu varijablu množe konstantom i tome pribraju još jednu konstantu. Formalnije:

Definicija 2 (Afina funkcija) Afina funkcija je realna funkcija s pravilom oblika

$$f(x) = ax + b.$$

Očigledno je prirodna domena svih afinih funkcija skup $\mathbb{R}$. Graf svake afine funkcije je pravac: Sve točke oblika $(x, ax + b)$ za zadane a i b leže na istom pravcu, kojemu je a **koeficijent smjera**, a b **slobodni član** (slika 2.12, desno). Budući da je $f(0) = a \cdot 0 + b = b$, točka $(0, b)$ je na grafu, tj. odsječak grafa afine funkcije na osi ordinata jednak je slobodnom članu. Afina funkcija kojoj je slobodni član nula zove se **linearnom funkcijom** (u užem smislu). Graf svake linearne



Slika 2.12: Grafovi konstantnih (lijevo), linearnih (sredina) i općih afinih funkcija (desno).

funkcije prolazi kroz ishodište (slika 2.12, sredina). Linearne funkcije opisuju proporcionalnost nezavisne i zavisne varijable: Par međuovisnih varijabilnih veličina zove se **proporcionalnim (razmjernim)** ako je omjer (konstanta proporcionalnosti) njihovih vrijednosti konstantan, tj. jednak za svaki par odgovarajućih vrijednosti kad god su one različite od nule.

Primjer 14 *Identiteta id je linearna funkcija.*

Primjer 15 *Površina kruga je razmjerna kvadratu njegova polumjera, ali ne i njegovom polumjeru.*

Ako je koeficijent smjera afine funkcije jednak nuli, govorimo o **konstantnoj funkciji**. U tom slučaju slika funkcije je jednočlani skup. Konstantna funkcija nije injekcija. Graf konstantne funkcije je pravac paralelan s osi apscisa (slika 2.12, lijevo). Ako koeficijent smjera afine funkcije nije nula, afina funkcija je bijekcija s $\mathbb{R}$ na $\mathbb{R}$ i ima točno jednu nultočku $-\frac{b}{a}$.

Zadatak 13 *Uz koji uvjet je afina funkcija parna (neparna)?*

Ovisno o predznaku koeficijenta smjera afina funkcija je rastuća, odnosno padajuća: za pozitivan koeficijent smjera ona raste, a za negativan pada.

Afine funkcije su vrlo česte u primjenama, iako su prave afine ovisnosti rijetke. Naime, često se pomoću afine funkcije aproksimira kompliciranija međuovisnost ili se pak (vidi odjeljak 2.6) neafine ovisnosti supstitucijama svode na afine.

Također, važno je uočiti da je u slučaju afine ovisnosti mjerna jedinica slobodnog člana uvijek jednaka mjernoj jedinici zavisne varijable, a mjerna jedinica koeficijenta smjera je kvocijent mjernih jedinica zavisne i nezavisne varijable (zašto?).

Primjer 16 Ovisnost koncentracije c_A reaktanta A o vremenu t u reakciji nultog reda opisana je jednadžbom

$$c_{c_A} = c_{A,0} - k_0 t.$$

Pritom je $c_{A,0}$ početna koncentracija od A, a $k_0 > 0$ je konstanta brzine reakcije. Očito bismo uz

$$x = t, \quad f(x) = c_A,$$

$$a = -k_0, \quad b = c_{A,0}$$

tu jednadžbu mogli interpretirati kao jednadžbu afine funkcije, s tim da joj domena ne bi bila cijeli skup $\mathbb{R}$ jer nas ne zanimaju vremena prije reakcije i nakon što reakcija stane. Primijetimo da je ovisnost c_A o t padajuća. Stoga je domena ove funkcije segment oblika $[0, T]$, gdje je T trajanje reakcije, recimo u sekundama, a T je nultočka funkcije c_A (odredite ju!).

Ovdje zapravo treba biti malo oprezan. Kad govorimo o domeni i kodomeni funkcije te iznosima koje nanosimo na koordinatne osi, govorimo o čistim broječanim iznosima (vidi odjeljak 1.3). Kad na horizontalnu os nanosimo vrijeme te os označimo primjerice s t/s , znamo da apscise u tom koordinatnom sustavu predstavljaju broj sekundi; stoga je i domena neke funkcije vremena (ovdje koncentracije) u tom slučaju neki interval brojeva, a ne vremenski interval. Efektivno to znači da kad smo gore rekli $x = t$ zapravo mislimo reći $x = t/s$ i podrazumijevamo da su sve jedinice u svakom članu formule izdvojene.

Primjerice, ako imamo $c_A = 0,100 \text{ mol L}^{-1} - 0,667 \text{ mol L}^{-1} \text{ s}^{-1} t$, zapravo nije $x = t$, $f(x) = c_A$, $a = -0,667 \text{ mol L}^{-1} \text{ s}^{-1}$ i $b = 0,100 \text{ mol L}^{-1}$, nego je

$$x = t \text{ s}^{-1}, \quad f(x) = c_A \text{ mol}^{-1} \text{ L}, \quad a = -0,667, \quad b = 0,100$$

(tj. $a = -k_0 \text{ mol}^{-1} \text{ L s}$ i $b = c_{A,0} \text{ mol}^{-1} \text{ L}$). Pritom će raspon nezavisne varijable biti od 0 (početak reakcije) do $T \text{ s}^{-1} = 100/667$ (kraj reakcije).

Primjer 17 Tlak idealnog plina kao funkcija recipročne vrijednosti volumena ($p = nRT \cdot \frac{1}{V}$) može se shvatiti kao

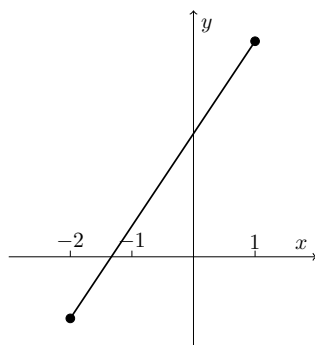
$$y = ax + b$$

uz $y = p/\text{Pa}$, $x = \frac{1}{V}/\frac{1}{\text{m}^3}$, $a = nRT/J$ i $b = 0$. Možemo reći i: Tlak idealnog plina proporcionalan je recipročnoj vrijednosti volumena.

Primjer 18 Za kemijske reakcije prvog reda može se pokazati da je ovisnost množinske koncentracije c_A bilo kojeg reaktanta A o vremenu dana s:

$$\ln \frac{c_A}{\text{mol/L}} = \ln \frac{c_{A,0}}{\text{mol/L}} - k t.$$

Pritom je $c_{A,0}$ početna koncentracija reaktana A, a $k > 0$ konstanta. Uz $y = \ln \frac{c_A}{\text{mol/L}}$, $x = \frac{t}{s}$, $a = -ks$ i $b = \ln \frac{c_{A,0}}{\text{mol/L}}$ opet imamo prikaz neafine ovisnosti pomoću afine.

Slika 2.13: Graf funkcije $f : [-2, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 1,5x + 2$.

Kao u primjeru 16, u primjenama je često potrebno afinu funkciju promatrati tako da joj je domena samo neki segment, a ne cijeli skup realnih brojeva. Općenito, ako je domena neke funkcije segment $[a, b]$, onda odgovarajući graf sadrži samo točke s apscisama između a i b . Specijalno, graf afine funkcije kojoj je kao domena uzet segment $[a, b]$ je dužina koja je dio pravca koji predstavlja graf te funkcije između točaka s apscisama a i b , vidi sliku 2.13.

Zadatak 14 Skicirajte grafove funkcija $f(x) = 3$, $f(x) = 2x$ i $f(x) = 3 - 5x$. Precizno odredite sva sjecišta s koordinatnim osima.

Zadatak 15 Što preciznije odredite koeficijent smjera i slobodni član pravca prikazanog na slici 2.14.

Zadatak 16 U kom slučaju je afina funkcija parna? Neparna?

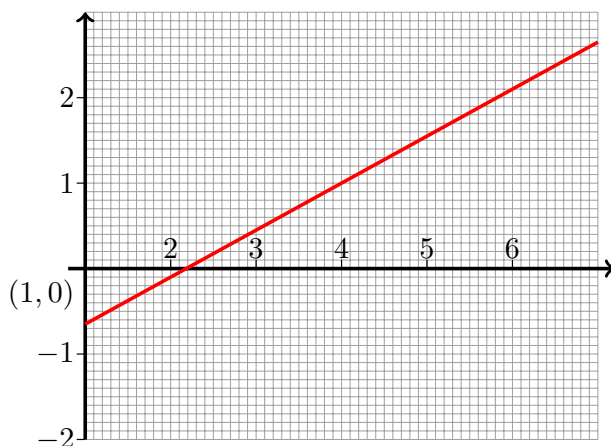
Zadatak 17 Vinar Krešo iz Gornjeg Dragonošća tijekom prošlog mjeseca prodao je 100 boca vina po cijeni od 20 €/boca i tako zaradio 30 €. Uvidom u poslovne knjige vidio je da u proizvodnji vina ima fiksne mjesečne troškove održavanja vinarije u iznosu 770 €, neovisne o broju proizvedenih i prodanih boca vina te da je pretprošli mjesec prodao 112 boca vina po cijeni od 17 €. Ako znate da se ovisnost potražnje o cijeni može modelirati padajućom, a ovisnost troškova o broju proizvedenih boca vina rastućom afinom funkcijom, odredite te dvije ovisnosti i nacrtajte im grafove.

2.4.2 Kvadratne funkcije

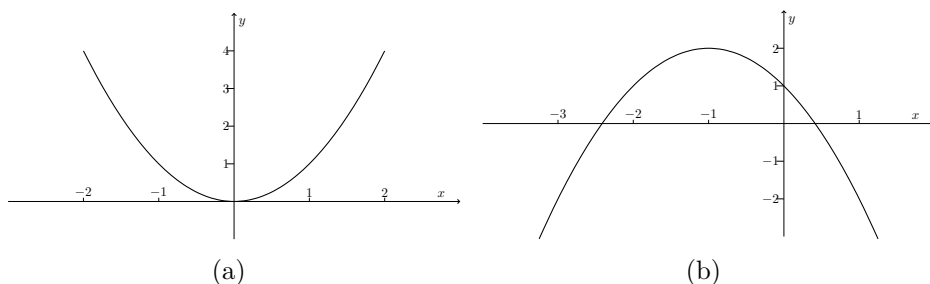
Definicija 3 (Kvadratna funkcija) Opća kvadratna funkcija je realna funkcija s pravilom oblika

$$f(x) = ax^2 + bx + c,$$

gdje su $a \neq 0$, b , c zadane konstante (koeficijenti kvadratne funkcije). Koeficijent a zove se *vodećim koeficijentom*, a c je *slobodnim članom*.



Slika 2.14: Odredite koeficijent smjera i slobodni član!

Slika 2.15: Grafovi kvadratnih funkcija (lijevo: $f(x) = x^2$, desno: $f(x) = -x^2 - 2x + 1 = -(x + 1)^2 + 2$).

Iz formule kvadratne funkcije očito je da je prirodna domena svake kvadratne funkcije cijeli skup $\mathbb{R}$.

Funkcija $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ zadana formulom

$$f(x) = x^2$$

je „prototip“ kvadratne funkcije. Njen graf prikazan je slikom 2.15 (lijevo). Graf svake kvadratne funkcije ima oblik parabole, a predznak vodećeg koeficijenta određuje je li „otvorena prema gore“ (za $a > 0$) ili „prema dolje“ (za $a < 0$). U prvom slučaju se najniža, a u drugom najviša točka grafa zove **tjemnom** parabole. Apscisa tjemena parabole $y = ax^2 + bx + c$ je $x_T = -\frac{b}{2a}$. Kvadratna funkcija raste na $\langle -\infty, x_T \rangle$ i pada na $\langle x_T, +\infty \rangle$ ako je $a < 0$, odnosno pada do x_T i raste od x_T ako je $a > 0$. Posebno, ordinata tjemena kvadratne funkcije je njezin minimum (ako je $a > 0$) odnosno njezin maksimum (ako je $a < 0$). Graf kvadratne funkcije

je uvijek simetričan s obzirom na paralelu s osi ordinata povučenu kroz tjeme. Kvadratna funkcija kao funkcija s $\mathbb{R}$ u $\mathbb{R}$ nikad nije ni injekcija ni surjekcija.

Napomena 1 Grafovi svih kvadratnih funkcija mogu se izvesti iz grafa funkcije $f(x) = x^2$ koristeći transformacije grafova (odjeljak 2.3) u kombinaciji sa svodenjem na potpun kvadrat (slika 2.15 desno).

Zadatak 18 Graf svake kvadratne funkcije je parabola. Vrijedi li i obrnuto, svaka parabola je graf neke kvadratne funkcije?

Kao i kod afinih funkcija, iz jednakosti $f(0)$ i slobodnog člana slijedi da sjecište grafa kvadratne funkcije s osi ordinata ima ordinatu jednaku slobodnom članu c . Nadalje, kao što smo rekli, nultočke svake funkcije (sjecišta s osi apscisa) su rješenja jednadžbe $f(x) = 0$, a ona je u ovom slučaju kvadratna jednadžba

$$ax^2 + bx + c = 0.$$

Njena rješenja su dana formulom

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a},$$

gdje je $D = b^2 - 4ac$ tzv. diskriminanta (kvadratne jednadžbe odnosno kvadratne funkcije). Vidimo da graf kvadratne funkcije ne siječe os apscisa ako je $D < 0$, siječe (dira) ju u samo jednoj točki (i to u tjemenu) ako je $D = 0$, a ima dva sjecišta s osi apscisa ako je $D > 0$.

Zadatak 19 Izvedite formulu za ordinatu tjemena i odredite sliku opće kvadratne funkcije.

Primjer 19 Neka je kvadratna funkcija zadana formulom

$$f(x) = -x^2 - 2x + 1.$$

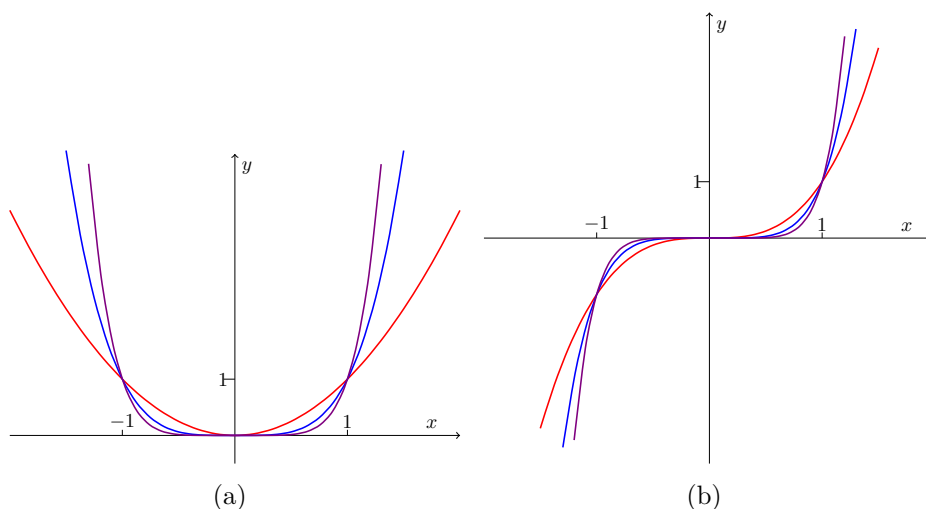
Tada je $a < 0$ pa će odgovarajuća parabola biti otvorena prema dolje. Sjecište s osi ordinata je u ordinati 1. Nultočke funkcije f se dobiju rješavanjem jednadžbe $-x^2 - 2x + 1 = 0$ i one su $-1 \pm \sqrt{2}$. Tjeme ima apscisu $-(-2)/(2 \cdot (-1)) = -1$ i ordinatu $f(-1) = 2$. Odgovarajući graf je prikazan slikom 2.15 (desno).

Zadatak 20 Skicirajte grafove funkcija $f(x) = 4x^2 + 7$, $f(x) = -x^2 + 3x - 2$ i $f(x) = x^2 + 4x + 4$, ali tako da je svakoj od njih domena segment $[-1, 4]$.

Zadatak 21 Ako je $f(x) = ax^2 + bx + c$ i nezavisna varijabla x ima mjernu jedinicu $\forall$, a zavisna varijabla $f(x)$ ima mjernu jedinicu $\exists$, koje su mjerne jedinice koeficijenata a , b i c ?

Zadatak 22 Nastavite zadatak 17: Po kojoj cijeni Krešo treba prodavati vino da ostvari maksimalni profit? Koliko iznosi taj profit? Koliko boca vina će u tom slučaju Krešo mjesečno prodavati?

s osi ordinata je u c , a sjecišta s osi apscisa su



Slika 2.16: Grafovi monoma parnog stupnja (lijevo) i neparnog stupnja većeg od 1 (desno), za $a = 1$.

2.4.3 Polinomi

Monom stupnja $n \in \mathbb{N}$ je funkcija $m : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ koja nezavisnoj varijabli pridružuje njenu n -tu potenciju (gdje je n prirodan broj) pomnoženu s nekom konstantom:⁹

$$m(x) = a x^n.$$

Ako je n paran i $a > 0$, m ima svojstva i graf sličan funkciji $f(x) = x^2$. Ako je pak $n > 1$ neparan i $a > 0$ radi se o strogo rastućoj neparnoj funkciji čiji prototip je funkcija $f(x) = x^3$. Grafovi monoma parnih odnosno neparnih stupnjeva s koeficijentom $a = 1$ prikazani su slikom 2.16.

Polinom je zbroj konačno mnogo monoma. Najveći od njihovih stupnjeva zove se **stupnjem polinoma**. Primjeri polinoma su $f(x) = x^3 + 6x - 9$ (polinom stupnja 3) i $g(t) = 4t^5 - 7t^6 + 3,2t - 1,45367$ (polinom stupnja 6). Uočimo: Polinom stupnja 0 je konstantna funkcija, polinom stupnja 1 je afina funkcija s koeficijentom smjera različitim od nule, a kvadratne funkcije su polinomi stupnja 2.

Preciznija definicija je sljedeća:

Definicija 4 (Polinom) Polinom stupnja n je funkcija f zadana pravilom oblika

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0,$$

gdje je $a_n \neq 0$.

⁹Strogo matematički, monom je samo funkcija potenciranja, ali smo ovdje definiciju malo proširili.

Kao i kod afinih i kvadratnih funkcija, očito je da je prirodna domena polinoma skup $\mathbb{R}$. Brojevi $a_n, \dots, a_0 \in \mathbb{R}$ su konstante i zovu se **koeficijentima polinoma** f , pri čemu se koeficijent a_n zove **vodećim koeficijentom**. Koeficijent a_0 zove se **slobodnim članom polinoma** f i predstavlja vrijednost $f(0)$, dakle sjecište pripadnog grafa s osi ordinata. Primjerice, polinom $p(x) = 8x - 3x^7$ je polinom stupnja 7 s vodećim koeficijentom -3 i slobodnim članom 0.

Polinomi se zbrajaju, oduzimaju i množe na očigledan način. Dijeljenje polinoma je pak analogno dijeljenju prirodnih brojeva. Kao što $17 : 2 = 8$ i ostatak 1 znači da je $17 = 2 \cdot 8 + 1$, tako $(4x^3 + 1)/(2x^2 - x) = 2x + 1$ i ostatak $x + 1$ znači da je $4x^3 + 1 = (2x^2 - x) \cdot (2x + 1) + (x + 1)$. Također, kao što pri dijeljenju brojeva kažemo da je djeljenik djeljiv s djeliteljem ako je ostatak 0 (primjerice, 54 je djeljivo s 9 jer je $54 = 9 \cdot 6 + 0$), tako je i kod polinoma: Polinom $x^3 + 1$ je djeljiv s polinomom $x + 1$ jer je $x^3 + 1 = (x + 1) \cdot (x^2 - x + 1) + 0$. Nadalje, kao što je pri dijeljenju prirodnih brojeva ostatak uvijek manji od djelitelja, tako je i kod dijeljenja polinoma ostatak uvijek manjeg stupnja od djelitelja. Općenito vrijedi:

Teorem 1 (Teorem o dijeljenju polinoma) *Za svaka dva polinoma $p(x)$ i $q(x)$ postoje polinomi $r(x)$ i $s(x)$ takvi da je*

$$p(x) = q(x) \cdot r(x) + s(x).$$

Pritom je stupanj od $s(x)$ manji od stupnja od $q(x)$.

U gornjem teoremu polinom $r(x)$ nazivamo **kvocijentom (količnikom) polinoma** $p(x)$ i $q(x)$, a polinom $s(x)$ je **ostatak** pri dijeljenju. Kako odrediti kvocijent dvaju polinoma? U svakom se koraku dijele vodeći članovi djeljenika i djelitelja da bismo dobili parcijalni kvocijent, a zatim od trenutnog djeljenika oduzimamo umnožak djelitelja i zadnjeg dobivenog člana parcijalnog kvocijenta. Tako dobiveni ostatak postaje novi djeljenik. Postupak se nastavlja sve dok stupanj ostatka ne padne ispod stupnja djelitelja. Najlakše je to objasniti na primjeru.

Primjer 20 *Podijelimo polinom $12x^4 - x^3 + 8$ s polinomom $3x^3 + 2x^2$. U prvom koraku dijelimo vodeći član $12x^4$ s vodećim članom $3x^3$ i dobijemo parcijalni kvocijent $4x$:*

$$(12x^4 - x^3 + 8) : (3x^3 + 2x^2) = 4x.$$

Da bismo dovršili prvi korak, potrebno je parcijalni kvocijent $4x$ pomnožiti s djeliteljem $3x^3 + 2x^2$ te taj umnožak, $4x \cdot (3x^3 + 2x^2) = 12x^4 + 8x^3$, oduzeti od djeljenika:

$$\begin{array}{r} (12x^4 - x^3 + 8) : (3x^3 + 2x^2) = 4x \\ 12x^4 + 8x^3 \\ \hline -9x^3 + 8 \end{array}$$

Trenutni ostatak je $-9x^3 + 8$ pa sad njega dijelimo s $3x^3 + 2x^2$, tj. dijelimo $-9x^3$ s $3x^3$. Tako dobijemo -3 i to pribrajaemo prethodnom parcijalnom kvocijentu $4x$:

$$\begin{array}{r} (12x^4 - x^3 + 8) : (3x^3 + 2x^2) = 4x - 3 \\ 12x^4 + 8x^3 \\ \hline -9x^3 + 8 \end{array}$$

Opet, da bismo dovršili drugi korak, množimo rezultat -3 iz ovog koraka s djeljiteljem $3x^3 + 2x^2$ te taj umnožak $-3 \cdot (3x^3 + 2x^2) = -9x^3 - 6x^2$ oduzimamo od ostatka iz prethodnog koraka:

$$\begin{array}{r} (12x^4 - x^3 + 8) : (3x^3 + 2x^2) = 4x - 3 \\ \underline{12x^4 + 8x^3} \\ -9x^3 + 8 \\ \underline{-9x^3 - 6x^2} \\ 6x^2 + 8 \end{array}$$

Ostatak je sad stupnja manjeg od stupnja djeljitelja, te smo gotovi s dijeljenjem. Stoga je

$$12x^4 - x^3 + 8 = (3x^3 + 2x^2) \cdot (4x - 3) + (6x^2 + 8).$$

Polinom stupnja n može imati najviše n realnih nultočaka. Pritom vrijedi:

Propozicija 1 Broj c je nultočka polinoma $f(x)$ točno ako je $f(x)$ djeljiv s $(x - c)$, tj. ako je $f(x) = (x - c) \cdot g(x)$, gdje je $g(x)$ polinom stupnja za 1 manjeg od stupnja polinoma $f(x)$.

Ako je polinom $f(x)$ djeljiv s polinomom $(x - c)^m$ za neki realan broj c i prirodan broj m , a pritom nije djeljiv s $(x - c)^{m+1}$, kažemo da je c m -struka nultočka polinoma f te broj m zovemo kratnošću nultočke c . **Višestruke nultočke** su one kojima je kratnost veća od 1. Zbroj svih kratnosti svih realnih nultočaka polinoma ne može biti veći od njegovog stupnja, a ako mu je jednak onda taj polinom možemo zapisati u faktoriziranom obliku

$$p(x) = a_n(x - x_1)^{m_1} \cdot \dots \cdot (x - x_k)^{m_k} \quad (2.1)$$

(gdje su $x_1, \dots, x_k$ sve realne nultočke od $p(x)$ redom s kratnostima $m_1, \dots, m_k$). Ako je zbroj kratnosti svih realnih nultočaka manji od stupnja polinoma, znači da se u njemu uz gore ispisane faktore pojavljuje bar još jedan kvadratni faktor bez realnih nultočaka.¹⁰

Primjer 21 Polinom zadan formulom $p(x) = (x^2 + x + 1)(x - 3)(x + 4)$ ima dvije realne nultočke (obje jednostruke): to su 3 i -4 . Zbroj njihovih kratnosti je $1 + 1 = 2$. Faktor $x^2 + x + 1$ nema realnih nultočki pa p ne možemo do kraja faktorizirati na faktore oblika $(x - c)^m$.

Primjer 22 Polinom zadan formulom

$$p(x) = 5x^8 - 5x^7 - 15x^6 + 25x^5 - 10x^4$$

¹⁰Da računamo u kompleksnim brojevima: Polinom stupnja n uvijek ima točno n nultočaka, ako im se uračuna kratnost, odnosno kad računamo s kompleksnim brojevima svi polinomi se mogu faktorizirati u oblik 2.1.

je djeljiv s $(x - 1)$, $(x + 2) = (x - (-2))$ i s $x = (x - 0)$:

$$p(x) : (x - 1) = 10x^4 - 15x^5 + 5x^7,$$

$$p(x) : (x + 2) = -5x^4 + 15x^5 - 15x^6 + 5x^7,$$

$$p(x) : x = -10x^3 + 25x^4 - 15x^5 - 5x^6 + 5x^7.$$

Stoga su 1, -2 i 0 njegove nultočke.

Polinom $p(x)$ je osim s $(x - 1)$ djeljiv i s $(x - 1)^2$ i s $(x - 1)^3$, ali nije djeljiv s $(x - 1)^4$. Stoga je 1 njegova trostruka nultočka.

Polinom p nije djeljiv s nikojom višom potencijom od $(x + 2)$ pa je -2 njegova jednostruka nultočka.

Polinom $p(x)$ osim s x djeljiv i s x^2 i s x^3 i s x^4 , ali nije djeljiv s x^5 . Stoga je 0 njegova četverostruka nultočka.

Budući da je stupanj od $p(x)$ jednak 8, što je jednako zbroju kratnosti njegovih realnih nultočaka $3 + 1 + 4$, zaključujemo da se $p(x)$ može zapisati u faktoriziranom obliku

$$p(x) = ax^4(x + 2)(x - 1)^3.$$

Iznos od a lako odredimo ako u polaznu i prethodnu formulu za $p(x)$ uvrstimo bilo koji x koji mu nije nultočka, recimo uvrstimo -1 . Po polaznoj je formuli $p(-1) = -40$, a po prethodnoj je $p(-1) = -8a$, dakle je $-8a = -40$, odnosno $a = 5$.

Ako polinom ima cjelobrojne koeficijente, njegove cjelobrojne nultočke su (ako ih uopće ima) među djeljiteljima slobodnog člana.

Primjer 23 Neka je $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ zadana s

$$f(x) = 0,1x^4 + 0,2x^3 - 1,3x^2 - 1,4x + 2,4.$$

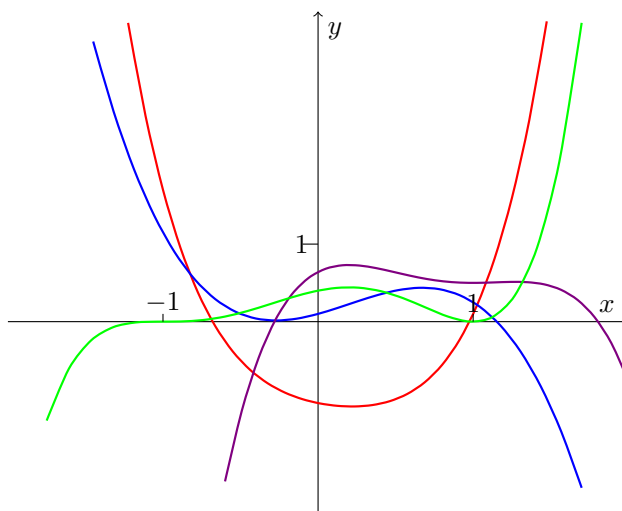
Radi se o polinomu sa slobodnim članom 2,4 pa je sjecište s y -osi u 2,4.

Za određivanje sjecišta s osi apscisa treba riješiti jednadžbu

$$f(x) = 0,1(x^4 + 2x^3 - 13x^2 - 14x + 24) = 0.$$

Kako su djelitelji od 24 brojevi $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 6, \pm 8, \pm 12, \pm 24$, pokušavamo među njima naći nultočke. Lako vidimo da je $f(1) = 0$ i $f(-2) = 0$, dakle smo našli dvije nultočke našeg polinoma.

Stoga je on djeljiv s $0,1(x - 1)(x + 2)$. Tim dijeljenjem ostaje $x^2 + x - 12$, odnosno $f(x) = 0,1(x - 1)(x + 2)(x^2 + x - 12)$. Polinom $x^2 + x - 12$ pak ima nultočke 3 i -4 , koje su onda naravno nultočke i od $f(x)$. Budući da broj realnih nultočaka polinoma ne može biti veći od njegova stupnja, zaključujemo da naš polinom ima 4 jednostruke nultočke i da njegov graf siječe x -os u $-4, -2, 1$ i 3 .



Slika 2.17: Grafovi nekih polinoma.

Graf polinoma je krivulja koja ima konačno mnogo prijevoja (promjena rasta u pad i obrnuto), njih najviše za 1 manje od stupnja polinoma. Također, graf polinoma ima konačno¹¹ mnogo sjecišta s osi apscisa (najviše koliko je stupanj polinoma). Polinom neparnog stupnja uvijek ima bar jednu realnu nultočku, tj. graf mu bar jednom siječe os apscisa, a ako je stupanj paran, realne nultočke odnosno sjecišta grafa s osi apscisa ne moraju postojati. Ako je c nultočka polinoma, ako je ona neparne kratnosti u njoj polinom mijenja predznak, a ako je parne kratnosti ne. Također, ako je c višestruka nultočka polinoma, onda u točki $(c, 0)$ je os apscisa tangenta na graf tog polinoma. Primjerice, polinomi čiji grafovi su na slici 2.17 prikazani plavo i zeleno posjeduju višestruke nultočke, a druga dva polinoma imaju samo jednostruke nultočke. Pritom, za u nultočkama neparne kratnosti polinom mijenja predznak, a u nultočkama parne kratnost ne: Za polinom čiji graf je prikazan zeleno na slici 2.17, nultočka -1 je neparne, a 1 parne kratnosti.

Ako je stupanj polinoma neparan i vodeći koeficijent pozitivan, onda i lijevi i desni kraj grafa idu prema gore (za jako male i za jako velike vrijednosti nezavisne varijable polinom raste), a ako je stupanj paran i vodeći koeficijent pozitivan, onda lijevi kraj grafa ide prema gore, a desni prema gore (za jako male vrijednosti nezavisne varijable polinom pada, a za jako velike raste). Za negativne vodeće koeficijente pravila su obrnuta: Ako je stupanj neparan i vodeći koeficijent negativan, onda i lijevi i desni kraj grafa idu prema dolje (za jako male i za jako velike vrijednosti nezavisne varijable polinom pada); ako je stupanj paran i vodeći koeficijent negativan, onda lijevi kraj grafa ide prema gore, a desni prema dolje (za jako male vrijednosti nezavisne varijable polinom raste, a za jako velike pada).

¹¹Nula je konačan broj.

Uočimo da ta pravila točno odgovaju ponašanju grafova monoma koji su jednaki vodećem koeficijentu pomnoženom s x na stupanje polinoma (tzv. vodeći član polinoma). Primjerice, u polinomu $4 - 2x^2 + x$ je vodeći član monom $-2x^2$ i on određuje ponašanje grafa polinoma za jako male i za jako velike x .

Zadatak 23 Sa slike 2.17 odredite koji grafovi prikazuju polinome parnog, a koji neparnog stupnja te predznake njihovih vodećih koeficijenata.

Zadatak 24 Nacrtajte graf funkcije zadane formulom $f(x) = x^3(9 - x^2)$.

2.4.4 Racionalne funkcije

Dvije veličine koje nikad ne postižu vrijednost nula su **obrnuto proporcionalne** ako im je umnožak konstantan. Primjerice, tlak i volumen idealnog plina su (pri konstantnoj množini i temperaturi) obrnuto proporcionalni. Ako su x i y obrnuto proporcionalne realne varijable i y shvatimo kao funkciju od x , radi se o ovisnosti tipa $f(x) = \frac{a}{x}$. Ona očigledno nije polinom jer nije definirana za $x = 0$. Ako malo bolje promotrimo, radi se o funkciji koja je kvocijent polinoma stupnja 0 i polinoma stupnja 1. Kao što smo vidjeli u primjeru 20, za razliku od zbroja, razlike i umnoška dvaju polinoma (koji ponovno daju polinom), kvocijent dvaju polinoma ne mora biti polinom, dakle smo dobili primjer nove vrste funkcija.

Definicija 5 (Racionalne funkcije) Racionalne funkcije su kvocijenti dvaju polinoma.

Općenito, dijeljenjem jednakosti $p(x) = q(x) \cdot r(x) + s(x)$ iz teorema 1 s $q(x)$, vidimo da svaku racionalnu funkciju oblika $\frac{p(x)}{q(x)}$ možemo zapisati i kao

$$\frac{p(x)}{q(x)} = r(x) + \frac{s(x)}{q(x)}.$$

Primjer 24 Iz primjera 20 skladi da je

$$\frac{12x^4 - x^3 + 8}{3x^3 + 2x^2} = 4x - 3 + \frac{6x^2 + 8}{3x^3 + 2x^2}.$$

Prirodnu domenu racionalne funkcije čine svi realni brojevi koji nisu nultočke nazivnika (dakle, ako nazivnik nema realnih nultočaka, prirodna domena im je cijeli skup $\mathbb{R}$). Strogo uzevši, polinomi su podvrsta racionalnih funkcija (racionalne funkcije s nazivnikom stupnja 0), no u praksi ih obično analiziramo odvojeno. Stoga u nastavku pod racionalnom funkcijom, ako nije drugačije rečeno, podrazumijevamo onu koja nije polinom.

Primjer 25 Funkcija zadana s

$$f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2}$$

nije isto što i polinom zadan s $g(x) = x + 2$. Naime, kraćenje razlomka je dijeljenje brojnika i nazivnika istim brojem, u našem primjeru s $(x - 2)$, što smijemo činiti samo ako smo sigurni da taj broj nije nula. Stoga je potrebno prvo odrediti prirodnu domenu za dano pravilo. Za x iz te domene onda nazivnik neće biti nula i moći ćemo kratiti, ali za x koji nije u toj domeni, funkcija nije definirana.

Konkretno, prirodna domena funkcije f je skup $\mathbb{R} \setminus \{2\}$. Za x iz te domene je $f(x) = x + 2$, tj. graf joj je do na jednu točku jednak grafu afine funkcije zadane pravilom $g(x) = x + 2$. Funkcija f je stoga racionalna, a ne afina funkcija. Ta točka koja čini razliku između grafova funkcija f i g je točka $(2, 3)$, koja je na grafu funkcije g , ali nije na grafu funkcije f koji izgleda kao da smo „iščupali” točku $(2, 3)$ iz grafa funkcije g , tj. kao graf od g , ali s praznom točkom na poziciji $(2, 3)$.

Najjednostavnije racionalne funkcije su funkcije zadane formulom oblika

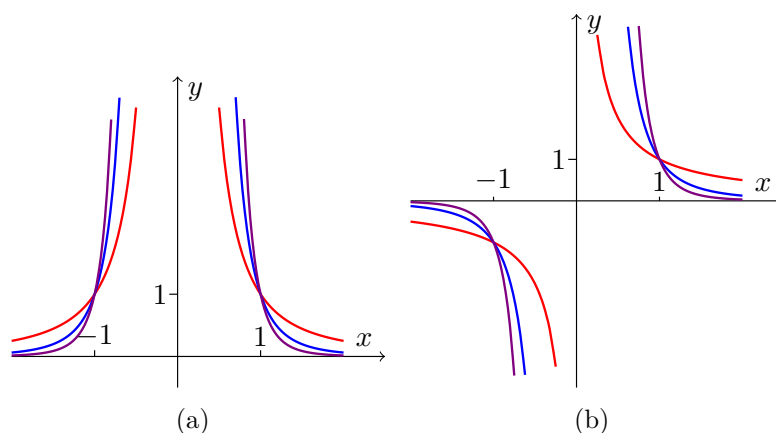
$$r_n(x) = \frac{1}{x^n}$$

gdje je $n \in \mathbb{N}$, dakle „monomi s negativnim cijelim eksponentima”. Njima je prirodna domena $\mathbb{R} \setminus \{0\} = \langle -\infty, 0 \rangle \cup \langle 0, +\infty \rangle$ te im grafovi ne sijeku os ordinata. Budući da je razlomak jednak nuli točno ako mu je brojnik jednak nuli, a brojnik ovakve funkcije je 1, slijedi da ove funkcije nemaju nultočki pa im grafovi ne sijeku ni os apscisa. Iz formule je vidljivo da su za n neparan ove funkcije neparne i poprimaju pozitivne vrijednosti za pozitivne x , a negativne vrijednosti za negativne x , pa im je graf u I. i III. kvadrantu. Za paran n su ove funkcije parne i poprimaju samo pozitivne vrijednosti pa im je graf u I. i II. kvadrantu (vidi sliku 2.18).

Na slikama 2.18 vidljivo je da za funkcije r_n postoje po dva pravca u ravnini koji se ističu time da grafovi „priliježu” uz njih. Ti pravci su njihove asimptote. Općenito, **asimptota krivulje** je pravac koji ima svojstvo da su mu točke krivulje sve bliže što su dalje od ishodišta. Primijetimo da to ujedno znači i da je svaki pravac sam sebi asimptota, odnosno polinomi imaju asimptote ako i samo ako im je stupanj 0 ili 1. Vezano za grafove funkcija obično se ističu tri vrste asimptota: horizontalne, vertikalne i kose. Više o asimptotama grafova funkcija reći ćemo u poglavlju 3.3.4, a ovdje ćemo se samo intuitivno upoznati s horizontalnim i vertikalnim asimptotama.

Horizontalna asimptota krivulje je pravac $y = L$ u pravokutnom koordinatnom sustavu koji ima svojstvo da je ta krivulja sve bliža tom pravcu što su joj točke više lijevo ili desno, tj. krivulja se približava horizontalnoj asimptoti s porastom i/ili padom vrijednosti apscise (ako je x jako velik ili jako mali,¹² $f(x) \approx L$). Graf realne funkcije jedne varijable može imati najviše dvije različite horizontalne asimptote,

¹²Jako mali broj ne znači da se radi o broju blizu nule, nego o „jako negativnom” broju.

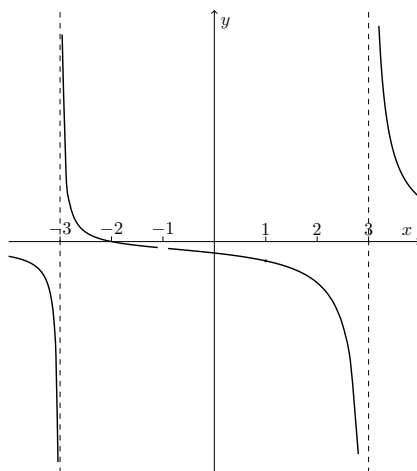


Slika 2.18: Grafovi racionalnih funkcija $r_n(x) = \frac{1}{x^n}$ za paran n (a) i za neparan n (b).

jednu lijevu i jednu desnu (objasnite zašto!). Sve racionalne funkcije oblika r_n imaju svojstvo da je $r_n(x) \approx 0$ za jako velike i jako male x , tj. pravac $y = 0$ (os apscisa) je horizontalna asimptota njihovih grafova. Ako graf racionalne funkcije posjeduje horizontalnu asimptotu, onda je ona obostrana, tj. ista i lijevo (za jako male x) i desno (za jako velike x). Vrijede sljedeća pravila:

- Ako je nazivnik racionalne funkcije r većeg stupnja od brojnika, pravac $y = 0$ je obostrana horizontalna asimptota grafa od r .
- Ako su nazivnik i brojnik racionalne funkcije r jednakih stupnjeva, pravac $y = L$ je obostrana horizontalna asimptota grafa od r , gdje je L kvocijent vodećeg koeficijenta brojnika i vodećeg koeficijenta nazivnika.
- Ako je nazivnik racionalne funkcije r manjeg stupnja od brojnika, graf od r nema horizontalnu asimptotu.

Takoder, grafovi funkcija r_n imaju os ordinata (pravac $x = 0$) kao vertikalnu asimptotu. **Vertikalna asimptota** krivulje je vertikalni pravac $x = c$ u pravokutnom koordinatnom sustavu koji ima svojstvo da je ta krivulja sve bliža tom pravcu što su joj točke više gore ili dolje, tj. krivulja se sve više približava vertikalnoj asimptoti što je apscisa točke krivulje bliža c (ako je $x \approx c$, $f(x)$ je jako velik ili jako mali). Vertikalnih asimptota graf funkcije može imati proizvoljno mnogo — koliko ih je, ovisi i o pravilu i o domeni. Općenito, vertikalne asimptote se najčešće (no ne samo i ne uvijek) pojavljuju u tzv. „rupama u domeni” (recimo gore je 0 „rupa u domeni” svih funkcija r_n). Kod racionalnih funkcija vertikalne asimptote se pojavljuju kad nazivnik, nakon maksimalnog skraćivanja formule funkcije, ima realnih nultočki (tada su vertikalne asimptote točno pravci $x = c$ gdje su c redom nultočke nazivnika).



Slika 2.19: Graf racionalne funkcije zadane formulom $f(x) = \frac{x^2+3x+2}{x^3+x^2-9x-9}$.

Primjer 26 Funkcija $f : \mathbb{R} \setminus \{2\} \rightarrow \mathbb{R}$ zadana s $f(x) = \frac{x^2-4}{x-2}$ ima „rupu u domeni“, ali njen graf nema vertikalnu asimptotu $x = 2$. Uzrok anomalije, tj. nepojavljivanja vertikalne asimptote u nultočki nazivnika je u tome što se algebarski razlomak koji predstavlja formulu funkcije mogao skratiti tako da rezultat do na jednu točku ispadne polinom, kako smo vidjeli u primjeru 25.

Primjer 27 Racionalna funkcija zadana formulom

$$f(x) = \frac{x^2 + 3x + 2}{x^3 + x^2 - 9x - 9} = \frac{(x+2)(x+1)}{(x-3)(x+3)(x+1)}$$

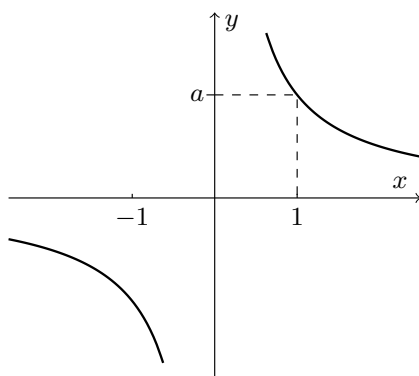
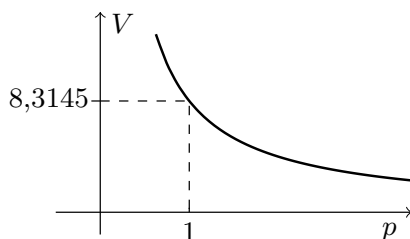
za prirodnu domenu ima skup $\mathbb{R}$ bez brojeva -1 , 3 i 3 . Budući da joj je nazivnik većeg stupnja nego brojnik, ona za horizontalnu asimptotu ima pravac $y = 0$ (os asimptota). Nadalje, budući da joj se formula može skratiti do oblika $f(x) = \frac{x+2}{(x-3)(x+3)}$, ona ima dvije vertikalne asimptote, $x = 3$ i $x = -3$. Graf ove funkcije prikazan je na slici 2.19.

Primjer 28 Ovisnost tlaka o volumenu idealnog plina, pri konstantnoj temperaturi i množini, opisana je s

$$p(V) = \frac{nRT}{V},$$

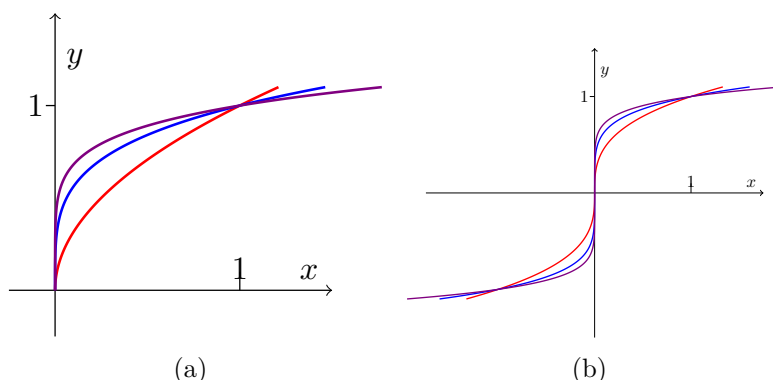
tj. uz odabir $x = V$, $y = p$ i $a = nRT$ se radi o racionalnoj funkciji zadanoj s pravilom oblika

$$y = \frac{a}{x},$$

Slika 2.20: Graf funkcije $f(x) = \frac{a}{x}$ za $a > 0$.Slika 2.21: Nepravilno prikazana ovisnost tlaka o volumenu idealnog plina pri $n = 0,01$ mol i $T = 100$ K.

s $a > 0$. Graf takve funkcije dobije se iz grafa funkcije $f_1(x) = \frac{1}{x}$ (crvena istostrana hiperbola na slici 2.18 (b)) u skladu s pravilima za transformacije grafova (odjeljak 2.3), vidi sliku 2.20.

Mnogi bi graf na slici 2.20 prihvatili kao graf funkcije tlaka idealnog plina za $a = nRT$. No, u našem konkretnom slučaju trebamo uzeti u obzir da se ne radi o apstraktnoj matematičkoj funkciji u kojoj su x , y i a samo realni brojevi. Ovdje su to iznosi konkretnih fizičkih veličina i ne mogu biti negativni. Stoga je za taj slučaj besmisleno crtati obje grane grafa — lijeva grana odnosi se na negativne vrijednosti x , tj. ticala bi se negativnih iznosa volumena te je ona suvišna. Uz to, x i y nemaju jednoznačnu i s kontekstom povezanu interpretaciju te bi trebalo odgovarajuće promijeniti oznake. Stoga bi prikaz na slici 2.21 bio bolji prikaz grafa ovisnosti tlaka idealnog plina o volumenu, ako je množina primjerice $n = 0,01$ mol i temperatura $T = 100$ K. No, taj prikaz sadrži dvije greške — objasnite koje i ispravite ga!



Slika 2.22: Funkcije zadane s $f_n(x) = \sqrt[n]{x}$ za n paran (a) i n neparan (b).

Zadatak 25 Virijalna jednačba stanja plina, točnije njena prva dva člana, ima oblik

$$pV = nRT \left(1 + \frac{Bn}{V} \right),$$

gdje je B (ne nužno pozitivan) koeficijent ovisan o vrsti plina. Kako sve može izgledati graf ovisnosti p o V ako je stanje plina opisano virijalnom jednačbom?

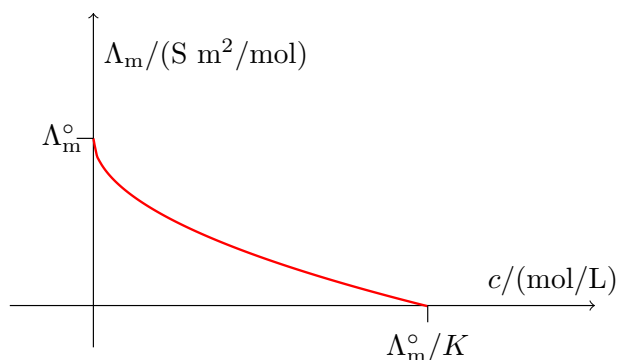
Zadatak 26 Koristeći transformacije grafova skicirajte graf funkcije zadane formulom

$$f(x) = \frac{15x^2 - 14x}{3x^2 - 2x}.$$

2.4.5 Korijeni

Neka je $y = x^n$. Ako je n neparan, onda je vrijednost od x jedinstveno određena vrijednošću y i kažemo da je $x = \sqrt[n]{y}$. Primjerice, $2^3 = 8$ znači da je $2 = \sqrt[3]{8}$. Budući da je (za neparan $n > 1$) slika funkcije $x \mapsto x^n$ cijeli skup $\mathbb{R}$, slijedi da su **neparni korijeni** definirani za sve realne brojeve te ih možemo shvatiti kao funkcije $\sqrt[n]{\cdot} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Radi se o rastućim funkcijama bez asimptota, čiji grafovi sijeku koordinatne osi samo u ishodištu (slika 2.22 (b)). Uočimo i da je os ordinata tangenta na te grafove, kao što je os apscisa tangenta na grafove od $f(x) = x^n$ s neparnim $n > 1$.

Ako je n paran, onda iz $y = x^n$ (recimo, $y = x^2$) slijedi da je $y \geq 0$. Stoga u svijetu realnih brojeva parni korijeni negativnih brojeva nemaju smisla. Uz to, vrijednost od x nije jedinstveno određena vrijednošću y (primjerice, $(-3)^2 = 3^2 = 9$) — kvadriranje kao i općenito parne potencije nisu injekcije. Stoga se kod korjenovanja kao računske operacije piše $\sqrt{9} = \pm 3$. Želimo li korijene promatrati kao funkcije, njihova vrijednost mora biti jedinstveno određena te se dogovorno uzima da **parni korijeni**, promatrani kao funkcije, nenegativnih brojeva daju nenegativne



Slika 2.23: Primjer transformiranog grafa funkcije drugog korijena (ovisnost molarne provodnosti jakog elektrolita o njegovoj množinskoj koncentraciji).

brojeve. Imamo dakle $\sqrt[n]{\cdot} : [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$ za n paran. Ovo su također rastuće funkcije čiji grafovi sijeku koordinatne osi samo u ishodištu, no grafovi im se zbog prirodne domene $[0, +\infty)$ nalaze samo u prvom kvadrantu Kartezijevog kooordinatnog sustava (slika 2.22 (a)).

Zadatak 27 Kohlrauschov zakon opisuje ovisnost molarne provodnosti Λ_m , čija mjerna jedinica je $\text{S m}^2 \text{mol}^{-1}$, o množinskoj koncentraciji c jakog elektrolita i glasi

$$\Lambda_m = \Lambda_m^\circ - K\sqrt{c}.$$

Pritom su Λ_m° i K pozitivne konstante. Koristeći transformacije grafova objasnite zašto pripadni graf ima oblik prikazan slikom 2.23.

Sad konačno možemo reći i što su **algebarske funkcije**: To su sve funkcije takve da se zavisna varijabla iz nezavisne dobiva s konačno mnogo primjena osnovne četiri računske operacije i korjenovanja na nezavisnu varijablu i konstante. U algebarske funkcije mogu se uvrštavati i fizikalne veličine skupa s mjernim jedinicama, uz uzimanje u obzir da se fizikalne veličine mogu zbrajati, oduzimati i izjednačavati samo ako imaju istu fizikalnu dimenziju, tj. ako se mogu izraziti u istoj mjernoj jedinici (**princip homogenosti**).

Primjer 29 Funkcija zadana formulom

$$f(x) = \sqrt[4]{\frac{x+1}{x^2+1}} - x - \sqrt{x}$$

je primjer algebarske funkcije.

Primjer 30 Ovisnost pozitivne veličine ι o pozitivnoj veličini χ opisana je jednadžbom

$$\iota = \frac{1}{3 \diamond^{-1} \chi - 6 \diamond^{-1} \cdot 8 \heartsuit^{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{\chi} + 2 \heartsuit \diamond^{-1}}.$$

Pritom su $\diamond$ i $\heartsuit$ neke mjerne jedinice.

Vidimo da je ι algebarska funkcija od χ . Nadalje, u nazivniku imamo tri člana: prvi ima jedinicu $\diamond^{-1}$ pomnoženu s jedinicom od χ , drugi ima jedinicu $\diamond^{-1} \heartsuit^{1/2}$ pomnoženu s korijenom jedinice od χ , a treći ima jedinicu $\heartsuit \diamond^{-1}$. Da bi se oni mogli zbrojiti i oduzeti, te tri jedinice moraju biti jednake. Označimo li jedinicu od χ s jed. imamo uvjet

$$\diamond^{-1} \cdot \text{jed.} = \heartsuit \diamond^{-1} \cdot \text{jed.}^{1/2} = \heartsuit \diamond^{-1},$$

odnosno

$$\text{jed.} = \heartsuit \text{jed.}^{1/2} = \heartsuit,$$

iz čega vidimo da je jedinica od χ točno $\heartsuit$. Budući da je jedinica nazivnika $\heartsuit \diamond^{-1}$, a brojnik je čisti broj, vidimo da je jedinica od ι jednaka $\heartsuit^{-1} \diamond$.

Zadatak 28 Ako varijabla x ima mjernu jedinicu $\spadesuit$, koju mjernu jedinicu treba imati konstanta a da bi izraz $f(x) = 2x^2 - \frac{a}{\sqrt{x}}$ bio smislen, te koja je tada mjerna jedinica od $f(x)$?

2.5 Transcendentne funkcije

Elementarne funkcije koje nisu algebarske, tj. čija pravila pridruživanja ne možemo izraziti konačnim brojem operacija zbrajanja, oduzimanja, množenja, dijeljenja i potenciranja s racionalnim eksponentima zovu se **transcendentne funkcije**. Najvažnije među njima su eksponencijalne, logaritamske i trigonometrijske funkcije. Zapravo, **elementarne funkcije** se definiraju kao sve funkcije koje se mogu izraziti preko konačno mnogo primjena osnovne četiri računske operacije te kompozicije (vidi odjeljak 2.5.3) na algebarske, eksponencijalne, logaritamske, trigonometrijske i ciklometrijske funkcije. Stoga su temeljne transcendentne funkcije eksponencijalne, logaritamske, trigonometrijske i ciklometrijske funkcije. Za razliku od algebarskih funkcija, u transcendentne funkcije ima smisla uvrštavati samo „čiste“ brojeve (i rezultat je također broj).

2.5.1 Eksponencijalne funkcije

Dosad smo se susreli s funkcijama koje računaju racionalne potencije nezavisne varijable (monomi i kvocijenti monoma te korijeni i njihove kompozicije s monomima), tj. s funkcijama tipa $x \mapsto x^a$ gdje je $a \in \mathbb{Q}$. Dakle, nezavisna varijabla nam je bila baza potencije, a (racionalni) eksponent je bio konstantan. Funkcije kod kojih je (ne nužno racionalna) baza konstantna, a eksponent je varijabla, zovu se eksponencijalnim funkcijama. Preciznije:

Definicija 6 (Eksponencijalne funkcije) Eksponencijalna funkcija s bazom a je funkcija $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ zadana formulom

$$f(x) = a^x.$$

Pritom baza a ne može biti bilo kakav realan broj. Kao prvo, ako bi bilo $a = 0$ imali bismo $f(x) = 0$ za $x \neq 0$ i $f(0)$ ne bi bio definiran, dakle nešto poput konstantne funkcije s „rupom“ u domeni (ovo bi zapravo bila racionalna funkcija $f(x) = \frac{0}{x}$). Ako bismo uzeli $a = 1$, dobili bismo pravu konstantnu funkciju $f(x) = 1$. Dakle, baza eksponencijalne funkcije ne smije biti ni 0 ni 1. Može li baza eksponencijalne funkcije biti negativna? Ne. Uočimo da u definiciji zahtijevamo da je prirodna domena eksponencijalne funkcije cijeli skup $\mathbb{R}$. Pokušajmo primjerice s $f(x) = (-1)^x$ zadati eksponencijalnu funkciju. Ako u nju uvrstimo $x = -\frac{1}{2}$, dobit ćemo $f\left(-\frac{1}{2}\right) = (-1)^{1/2} = \sqrt{-1}$, što nije realan broj, dakle kao realna funkcija ona ne bi imala $\frac{1}{2}$ u svojoj prirodnoj domeni pa joj prirodna domena ne bi bio $\mathbb{R}$. Iz prethodnog razmatranja slijedi: Baza eksponencijalne funkcije mora biti pozitivan realan broj različit od 1.

Primjer 31 Funkcija zadana formulom $f(x) = \frac{1}{3^{-x}}$ na prvi pogled nije eksponencijalna funkcija, no koristeći pravila o transformiranju algebarskih izraza lako je uvjeriti se da se zapravo radi o eksponencijalnoj funkciji s bazom 3:

$$f(x) = \frac{1}{3^{-x}} = \left(\frac{1}{3}\right)^{-x} = 3^x.$$

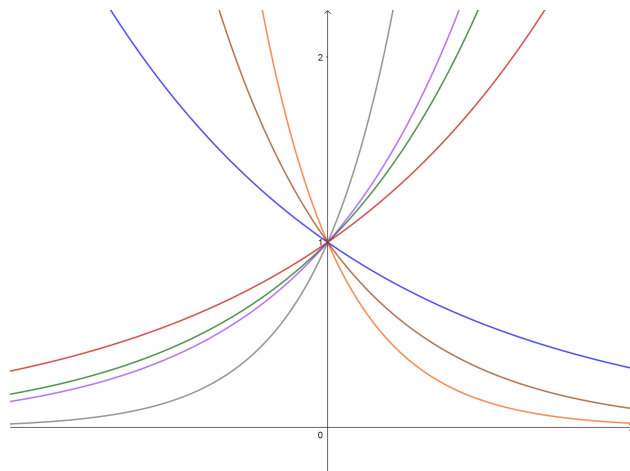
Slično, funkcija zadana pravilom $g(x) = 4^{2x}$ je eksponencijalna funkcija s bazom $4^2 = 16$.

Ovisno o tome je li baza eksponencijalne funkcije veća ili manja od 1 dobit ćemo rastuću ili padajuću eksponencijalnu funkciju: Eksponencijalne funkcije s bazom $a > 1$ su rastuće, a one za koje je $0 < a < 1$ su padajuće. Grafovi svih eksponencijalnih funkcija os ordinata sijeku u točki $(0, 1)$ jer je za svaku od njih $f(0) = a^0 = 1$.

Zadatak 29 U kojoj točki graf funkcije s formulom $f(x) = C a^x$ siječe os ordinata?

Eksponencijalne funkcije nemaju nultočaka, štoviše: iznosi su im strogo pozitivni: Slika svake eksponencijalne funkcije je $\langle 0, +\infty \rangle$, tj. graf im je uvijek iznad osi apscisa. Uz modifikaciju kodomene na taj skup, eksponencijalne funkcije postaju bijekcije $f : \mathbb{R} \rightarrow \langle 0, +\infty \rangle$.

Os apscisa je jednostrana horizontalna asimptota za svaku eksponencijalnu funkciju: Ako je baza $a > 1$, radi se o asimptoti na lijevoj strani (brojevi a^x su za jako negativne x jako blizu nule), a ako je baza $a < 1$, radi se o asimptoti na desnoj strani (brojevi a^x su za jako velike x jako blizu nule). Grafovi nekoliko eksponencijalnih funkcija prikazani su na slici 2.24.



Slika 2.24: Grafovi eksponencijalnih funkcija (slika izrađena programom Geogebra).

Najčešće se koristi eksponencijalna funkcija s bazom e . Broj e je matematička konstanta i iracionalan je, a iznosi približno 2,71828. Umjesto e^x često se koristi oznaka $\exp(x)$.

Primjer 32 1s-orbitala vodikovog atoma je skalirana eksponencijalna funkcija koja poziciji elektrona u prostoru pridružuje broj

$$\psi_{1s} = \sqrt{\frac{1}{a_0^3 \pi}} \exp\left(-\frac{r}{a_0}\right),$$

gdje je $r \geq 0$ udaljenost elektrona do jezgre, a $a_0 = 52,9 \text{ pm}$ je Bohrov radijus. Ako bismo 1s-orbitalu vodikovog atoma gledali kao realnu funkciju jedne varijable r , imali bismo funkciju

$$f_{1s}(x) = A a^x,$$

gdje je $A = \sqrt{\frac{\text{pm}^3}{a_0^3 \pi}} > 0$, $a = \exp(-\frac{\text{pm}}{a_0})$ i $x = \frac{r}{\text{pm}}$, dakle se radi o skaliranoj eksponencijalnoj funkciji s bazom a , ali s domenom $[0, +\infty)$ jer r ne može biti negativan. Točka grafa na osi ordinata je $(0, A)$, a radi se o padajućoj eksponencijalnoj funkciji jer je $a < 1$ budući da je $-\frac{\text{pm}}{a_0} < 0$, a e na negativan broj je manje od 1 jer je $\exp(x)$ rastuća eksponencijalna funkcija.

Na kraju, spomenimo još dva svojstva eksponencijalnih funkcija, a to su da za sve $x, x' \in \mathbb{R}$ vrijede formule

$$f(x + x') = a^{x+x'} = a^x a^{x'} = f(x)f(x'),$$

$$f(x - x') = a^{x-x'} = a^x : a^{x'} = f(x) : f(x').$$

2.5.2 Hiperbolne funkcije

Povremeno se u primjenama pojavljuju i četiri hiperbolne funkcije. Njihove definicije su kako slijedi:

- **sinus hiperbolni:** $\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2},$
- **kosinus hiperbolni:** $\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2},$
- **tangens hiperbolni:** $\operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}},$
- **kotangens hiperbolni:** $\operatorname{cth} x = \frac{1}{\operatorname{th} x} = \frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}.$

Budući da su brojevi e^x i e^{-x} smisleni i pozitivni za sve realne brojeve, očito je prirodna domena za prve tri hiperbolne funkcije cijeli skup $\mathbb{R}$. Kod kotangensa hiperbolnog u prirodnoj domeni nisu x -evi za koje je $e^x = e^{-x}$. Takav broj je samo $x = 0$ pa je prirodna domena kotangensa hiperbolnog skup $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

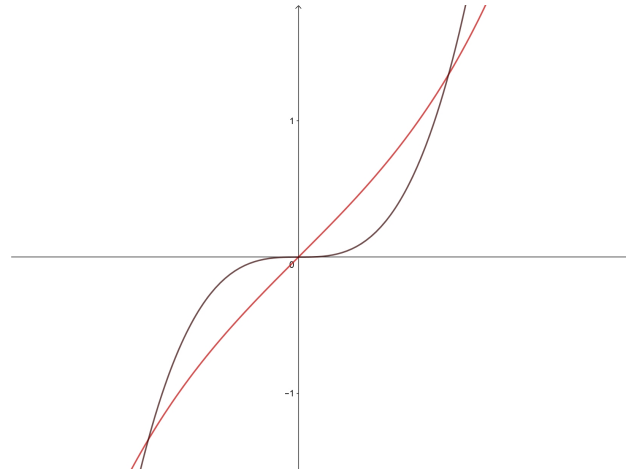
Napomena 2 Imena hiperbolnih funkcija potječu od toga što bi se mogle definirati slično kao i trigonometrijske funkcije (vidi sljedeći odjeljak), s tim što bi se umjesto jedinične kružnice uzela istostrana hiperbola. Također, kao što ćemo vidjeti u odjeljku 4, definicijske formule za sinus i kosinus hiperbolni analogne su formulama koje vrijede za „obični“ sinus i kosinus, s razlikom da se za hiperbolne funkcije koristi realna, a za trigonometrijske kompleksna eksponencijalna funkcija.

Sinus hiperbolni je neparna rastuća funkcija čiji graf podsjeća na graf funkcije kubiranja, no usporedbom tih grafova (slika 2.25) vidi se da oko ishodišta graf sinusa hiperbolnog priliježe uz $y = x$, dok se krivulja $y = x^3$ oko ishodišta više priljubljuje uz x -os. Kosinus hiperbolni je parna funkcija čiji graf se naziva lančanica i podsjeća na parabole $y = ax^2 + 1$ s $a > 0$ (slika 2.26). Grafovi tangensa i kotangensa hiperbolnog (slika 2.27) imaju dvije horizontalne asimptote: lijevo $y = -1$ i desno $y = 1$. Tangens hiperbolni je rastuća, kotangens hiperbolni padajuća funkcija, a oba su neparne funkcije.

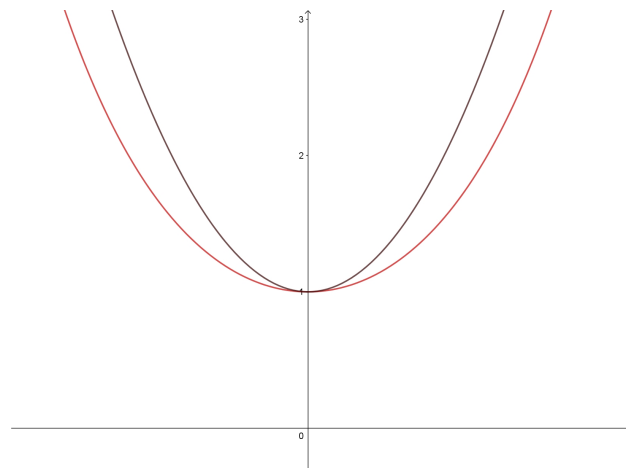
Zadatak 30 Skicirajte graf funkcije zadane formulom $f(x) = 5\operatorname{th}(1 - 2x) + 10$.

2.5.3 Kompozicije i inverzi funkcija

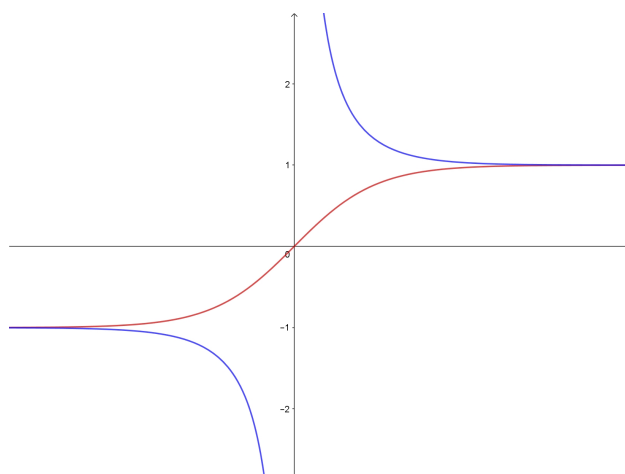
Mnoge funkcije djeluju tako da prvo nezavisnu varijablu transformiraju po jednom pravilu u neku međuvrijednost, a onda tu međuvrijednost transformiraju u konačnu vrijednost funkcije. Takvom kombinacijom pravila, tj. uvrštavanjem jednog pravila u drugo, dobivamo novu funkciju koju možemo i ne moramo gledati kao sastavljenu od polazne dvije.



Slika 2.25: Graf funkcije sh (crveno) i njegova usporedba s (crnim) grafom funkcije kubiranja (slika izrađena programom Geogebra).



Slika 2.26: Graf funkcije $\cosh$ (crveno) i njegova usporedba s (crnom) parabolom $y = x^2 + 1$ (slika izrađena programom Geogebra).



Slika 2.27: Graf funkcije th (crveno) i cth (plavo); slika izrađena programom Geogebra.

Primjer 33 Ako želimo odrediti masu otopljene tvari u otopini poznate množinske koncentracije c i poznatog volumena V , možemo prvo iz c i V odrediti množinu otopljene tvari prema pravilu $n = cV$, a zatim iz množine odrediti masu prema pravilu $m = nM$, gdje je M molarna masa otopljene tvari. Dobili smo kompoziciju funkcija množine u ovisnosti o koncentraciji i volumenu s funkcijom mase u ovisnosti o množini. Alternativno, mogli smo odmah iskombinirati formule tako da dobijemo pravilo $m = cMV$, čime izbjegnemo računanje međurezultata n ako nam on nije od značaja.

Definicija 7 (Kompozicija funkcija) Kompozicija funkcija $f : A \rightarrow B$ i $g : C \rightarrow D$ je funkcija $f \circ g$ čije pravilo je dano s

$$f \circ g(x) = f(g(x)).$$

Što je domena, a što je kodomena od $f \circ g$? Rezultati od $f \circ g$ su negdje gdje su rezultati od f jer se dobiju uvrštavanjem nečega ($g(x)$ -ova) u funkciju f . Dakle, kodomena od $f \circ g$ je kodomena od f , tj. skup B . S druge strane, u $f \circ g$ uvrštavamo x -eve koje prvo moramo uvrstiti u g da bismo mogli izračunati $f(g(x))$, dakle su x -evi iz domene od g odnosno domena od $f \circ g$ je skup C . Sve skupa to nam daje $f \circ g : C \rightarrow B$. No, pritom skupovi A i D ne smiju biti bilo kakvi. Budući da je D kodomena od g , znamo da je sigurno $g(x) \in D$ (za sve $x \in C$). Budući da $g(x)$ moramo moći uvrstiti u f slijedi da svaki $g(x)$ mora biti i u domeni A od f , tj. mora vrijediti $D \subseteq A$ da bi kompozicija $f \circ g$ bila smisljena. U praksi se to lako vidi: Ukoliko izračunati $g(x)$ ne možemo uvrstiti u f , kompozicija $f \circ g$ nije definirana u x .

Primjer 34 Neka je $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dana s $f(x) = 2x + 1$, a $g : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ s $g(x) = \sqrt{x}$, onda imamo da je $f \circ g(x) = f(g(x)) = f(\sqrt{x}) = 2\sqrt{x} + 1$ i koji god nenegativan x uzmemo to je moguće izračunati te je $f \circ g : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$.

Zamijenimo li redoslijed, nailazimo na probleme. Formalno, $g \circ f(x) = g(f(x)) = g(2x + 1) = \sqrt{2x + 1}$ te se sve čini smisljeno. No, kao domen od f uzeli smo $\mathbb{R}$ te bi $g \circ f$ trebala također biti definirana na $\mathbb{R}$. Za neke realne x , primjerice za $x = -5$, broj $2x + 1$ je negativan te se ne može izračunati $g \circ f(x)$ za takve x . Stoga $g \circ f$ nije definirana uz početni odabir domene od f . Ako bi nam pak bilo dovoljno za domen od f uzeti skup $[-\frac{1}{2}, +\infty)$, onda bi i $f \circ g$ i $g \circ f$ bile dobro definirane (ali različite).

Prethodni primjer važan je ne samo jer upozorava na oprez pri baratanju (ko)domenama kod kompozicije, nego vidimo i da kod kompozicije funkcija treba paziti na redoslijed: Čak i ako su obje kompozicije $f \circ g$ i $g \circ f$ smisljene, one u pravilu nisu iste funkcije. Neformalnije rečeno, nije svejedno koje pravilo uvrštavamo u koje, odnosno nije svejedno što radimo prvo, a što drugo.

Primjer 35 Ako su x sastojci za kolač, f miješanje i g pečenje, onda je $f(x)$ tijesto za kolač, a $g(f(x)) = g \circ f(x)$ je ispečeni kolač, dok su $g(x)$ spečeni sastojci, a $f(g(x)) = f \circ g(x)$ su izmiješani prethodno ispečeni sastojci.

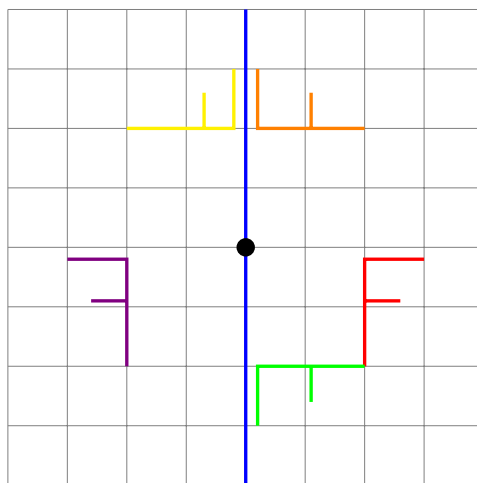
Primjer 36 Pogledajte crveno slovo F na slici 2.28. Ako ga prvo zrcalimo preko plavog pravca (ljubičasto) i zatim zarotiramo u pozitivnom smjeru za pravi kut oko crne točke, doći će u zelenu poziciju. Ako ga pak prvo zarotiramo u pozitivnom smjeru za pravi kut oko crne točke (narančasto), a zatim zrcalimo s obzirom na plavu os, doći će u žutu poziciju. Dakle, kompozicija osne simetrije i rotacije za 90° oko točke na osi simetrije nije komutativna.

U nekim slučajevima desi se da kod uzastopnog primjenjivanja dva pravila rezultat na kraju izgleda kao početak — što je prvo pravilo promijenilo, drugo je „poništilo“ i vratilo „u polazno stanje“.

Primjer 37 Ako crveno slovo F iz prethodnog primjera (slike 2.28) prvo zarotirate za 90° u pozitivnom smjeru oko crne točke (narančasta pozicija), a zatim oko iste točke za 270° (isto u pozitivnom smjeru), doći će u polaznu, crvenu poziciju.

U takvim slučajevima kažemo da je druga funkcija inverzna prvoj i prva inverzna drugoj. Preciznije:

Definicija 8 (Inverzna funkcija) Inverzna funkcija funkcije $f : A \rightarrow B$ je funkcija $g : B \rightarrow A$ (ako takva postoji) takva da je $f \circ g(x) = x$ za sve $x \in B$ i $g \circ f(x) = x$ za sve $x \in A$. Tada pišemo $g = f^{-1}$.

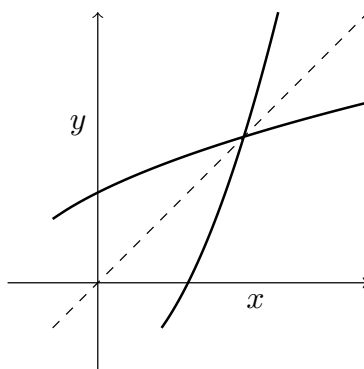


Slika 2.28: Nekomutativnost kompozicije funkcija

Pojednostavljeno rečeno: ako f x -u pridružuje y (recimo, broju 2 broj -3), onda f^{-1} y -u pridružuje x (broju -3 broj 2) — za sve x i pripadne y .

Nemaju sve funkcije inverze: Funkcija ima inverz ako i samo ako je bijekcija, tj. injekcija i surjekcija. Zašto su ta dva svojstva bitna? Surjektivnost znači da je svaki y iz kodomene B pridružen nekom x -u iz domene A , dakle se može uzeti taj x kao $f^{-1}(y)$, tj. moguće je definirati pravilo f^{-1} s domenom B . Injektivnost znači da različitim x -evima pridružujemo različite y . Kad bi funkcija f imala inverz, a da pritom dvama x -evima x_1 i x_2 bude pridružen isti y , onda bi inverz f^{-1} morao tom y -u pridružiti i x_1 i x_2 , tj. f^{-1} ne bi bio funkcija.

Već smo se susreli s jednim važnim primjerom inverznih funkcija, korijenima. Pritom smo imali dva slučaja. Neparni korijeni su inverzne funkcije neparnih monoma (ovdje mislimo na monome s koeficijentom 1), recimo $\sqrt[3]{\cdot} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ je inverzna funkcija bijekcije $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^3$, jer za sve realne brojeve x i y vrijedi $\sqrt[3]{x^3} = x$ (tj. $f^{-1} \circ f(x) = x$) i $(\sqrt[3]{y})^3 = y$ (tj. $f \circ f^{-1}(y) = y$). S druge strane, parni monomi nisu bijekcije s $\mathbb{R}$ na $\mathbb{R}$. Uzmimo primjerice kvadriranje. Ono nije injekcija jer recimo -2 i 2 kvadrirani oba daju isti rezultat 4, a nije ni surjekcija jer se negativni brojevi ne mogu napisati kao kvadrati realnih brojeva. Surjektivnost lako postignemo: Promijenimo kodomenu $\mathbb{R}$ u sliku te funkcije $[0, +\infty)$. Injektivnost se pak ne može postići bez „zahvata” u domeni, točnije sužavanja domene. Takva promjena funkcije u novu kod koje se mijenja samo domena, i to na manji skup, zove se **restrikcija funkcije**. Restrikcije ćemo jednostavnosti radi (nepravilno) označavati jednako kao i polazne funkcije, ali ćemo pritom jasno isticati novu domenu. U slučaju kvadriranja ako za domenu uzmemo $[0, +\infty)$, onda smo dobili injekciju: kvadrati različitih nenegativnih brojeva su različiti. Stoga $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$



Slika 2.29: Grafovi dviju međusobno inverznih funkcija u Kartezijevom koordinatnom sustavu.

doduše nema inverza, ali $f : [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$, $f(x) = x^2$ ga ima i njen inverz je funkcija drugog korijena.

Ako znamo graf bijekcije f u Kartezijevom koordinatnom sustavu, onda je lako nacrtati graf njezine inverzne funkcije: Graf od f^{-1} je zrcalno (osno) simetričan grafu od f s obzirom na pravac $y = x$ (slika 2.29). Ako koristimo općenitiji pravokutni koordinatni sustav, ta simetrija više neće biti vidljiva. Usporedite primjerice grafove funkcije kubiranja i funkcije trećeg korijena (vidi slike 2.16 (b) i 2.22 (b)). Zbog navedene simetrije zaključujemo i da ako neka bijekcija ima horizontalnu asimptotu $y = c$, onda njen inverz ima vertikalnu asimptotu $x = c$ i obrnuto.

Korisno je zapamtiti još i sljedeće: Ako je neka bijekcija rastuća, njen inverz je također rastuća funkcija, a ako je bijekcija padajuća, njen inverz je padajuća funkcija.

Zadatak 31 *Dokažite da ako je $f : I \rightarrow I'$ rastuća, gdje su I i I' intervali, onda je f bijekcija i inverz joj je rastuća funkcija.*

2.5.4 Logaritamske funkcije

Budući da su eksponencijalne funkcije kao funkcije s $\mathbb{R}$ u $\langle 0, +\infty \rangle$ bijekcije, one imaju svoje inverzne funkcije i tim inverznim funkcijama prirodna domena je $\langle 0, +\infty \rangle$, a kodomena (i slika) je $\mathbb{R}$. Inverzne funkcije eksponencijalnih funkcija zovu se logaritamske:

Definicija 9 (Logaritamske funkcije) *Logaritamska funkcija s bazom a , u oznaci $\log_a$, je inverzna funkcija eksponencijalne funkcije s istom bazom.*

Budući da je eksponencijalna funkcija s bazom a bijekcija s $\mathbb{R}$ na $\langle 0, +\infty \rangle$, slijedi da je prirodna domena logaritamske funkcije s bazom a interval $\langle 0, +\infty \rangle$ (dakle,

u logaritme možemo uvrštavati samo pozitivne brojeve) i $\log_a : \langle 0, +\infty \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ je također bijekcija. Budući da su logaritmi definirani preko eksponencijalnih funkcija zaključujemo i da su jedine dopuštene baze logaritama pozitivni brojevi različiti od 1.

Opisno iskazana međusobna inverznost eksponencijalne funkcije i logaritma s istom bazom je da je logaritam nekog broja po danoj bazi eksponent na koji treba potencirati tu bazu da bi se dobio polazni broj. Budući da je prirodna domena svake logaritamske funkcije $\langle 0, +\infty \rangle$ znači da nema smisla računati logaritme negativnih brojeva ni nule.

Primjer 38 Uočite da izraz $2^3 = 8$ istovremeno znači i da je $\sqrt[3]{8} = 2$ i da je $\log_2 8 = 3$.

Primjer 39 Iz definicije slijedi:

$$\begin{aligned}\log_7 1 &= \log_7 7^0 = 0, \\ \log_{451} 451 &= \log_{451} 451^1 = 1, \\ \log_{1/4} 4 &= \log_{\frac{1}{4}} \left(\frac{1}{4}\right)^{-1} = -1,\end{aligned}$$

a $\log_5 0$ nema smisla jer 5 ni na koju potenciju ne daje nulu.

Zadatak 32 Bez kalkulatora zaključite koji broj je veći: $\log_5 50$ ili $\log_{50} 500$.

Po definiciji za svaku dozvoljenu bazu a ($a > 0$, $a \neq 1$) imamo po jedan par eksponencijalne i logaritamske funkcije za koje vrijede formule koje izražavaju njihovu inverznost:

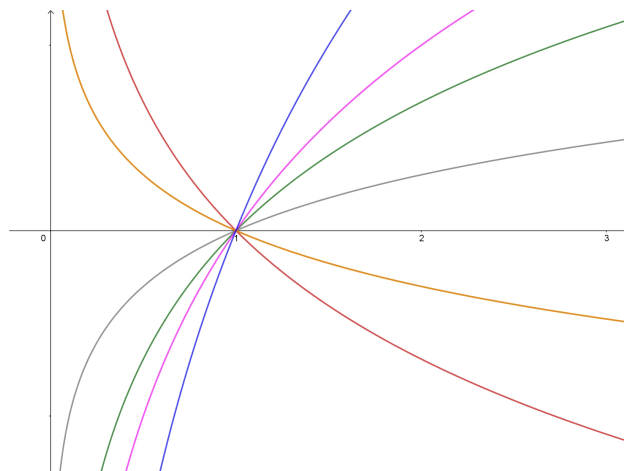
$$\begin{aligned}\log_a a^x &= x, & x &\in \mathbb{R}, \\ a^{\log_a y} &= y, & y &> 0.\end{aligned}$$

Za sve logaritme vrijedi

$$\log_a 1 = 0$$

jer je $a^0 = 1$ za svaku dozvoljenu bazu a . Stoga je 1 nultočka, i to jedina, svake logaritamske funkcije. odnosno grafovi svih logaritamskih funkcija os apscisa sijeku u točki $(1, 0)$. Logaritamske funkcije s bazama većim od 1 su rastuće, a one s bazama manjim od 1 su padajuće, kao i njima odgovarajuće inverzne eksponencijalne funkcije. Stoga imamo dva osnovna tipa grafova logaritamskih funkcija, kako je prikazano na slici 2.30. Vidljivo je da je za sve logaritamske funkcije y -os vertikalna asimptota: Za baze manje od 1 logaritmi brojeva blizu nule su jako veliki, a za baze veće od 1 su jako mali (jako negativni).

Zadatak 33 Na slici 2.30, koji logaritam ima veću bazu: zeleni ili crveni? zeleni ili plavi?



Slika 2.30: Grafovi logaritamskih funkcija (slika izrađena programom Geogebra).

Za dvije posebno česte baze logaritmi imaju posebne oznake: logaritam s bazom 10 (dekadski logaritam) se označava jednostavno s $\log$ (vrlo rijetko s $\log_{10}$), a logaritam s bazom e (prirodni logaritam) se umjesto s $\log_e$ obično označava s $\ln$.

Dekadski logaritam broja daje nam njegov red veličine: $\log(1,25 \cdot 10^{12}) = \log(1,25) + 12$, što je broj između 12 i 13 (dekadski logaritam je rastući pa iz $1 < 1,25 < 10$ zaključujemo $0 < \log 1,25 < 1$).

Zadatak 34 *Skicirajte graf funkcije zadane formulom $f(x) = 1 - \log(1 - x)$.*

Pomoću logaritama svaku eksponencijalnu funkciju možemo svesti na transformiranu eksponencijalnu funkciju s bazom e :

$$a^x = \exp(x \ln a).$$

Dva osnovna svojstva logaritamskih funkcija su dualna na kraju prethodnog poglavlja navedenim dvama svojstvima eksponencijalnih funkcija:

$$f(x \cdot x') = \log_a(x x') = \log_a x + \log_a x' = f(x) + f(x'),$$

$$f(x : x') = \log_a \frac{x}{x'} = \log_a x - \log_a x' = f(x) - f(x').$$

Te dvije formule vrijede (samo) za $x, x' > 0$ jer inače njihove desne strane ne bi imale smisla.

Napomena 3 *Gornje formule možemo zapamtiti i ovako: Logaritmi su povijesno uvedeni u 17. st. da bi olakšali komplicirane račune s „ružnim“ decimalnim brojevima*

u doba kad su se svi računi provodili ručno. Budući je lakše zbrojiti ili oduzeti nego pomnožiti ili podijeliti dva decimalna broja, pamtimo: logaritam umnoška je zbroj logaritama (logaritam pretvara množenje u zbrajanje), a logaritam kvoacijenta je razlika logaritama (logaritam svodi dijeljenje na oduzimanje).

Primjer 40 $\log_3(-3x)$ nije jednako $\log_3(-3) + \log_3 x$, nego je jednako $\log_3 3 + \log_3(-x) = 1 + \log_3(-x)$. Uočite i da polazni i zadnji izraz imaju smisla za iste, negativne, x .

Povremeno je od koristi sljedeća formula za promjenu baze logaritma:

$$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$$

koja vrijedi za sve dozvoljene baze a i b . Specijalno, vrijedi

$$\log_{1/a} x = -\log_a x.$$

Primjer 41 Najpoznatija pojava logaritama u kemiji je definicija $p[H]$ otopine.¹³

$$p[H] = -\log \frac{c(H^+)}{\text{mol/L}},$$

iznosa 1 mol/L. Mjerenjem $p[H]$ možemo odrediti koncentraciju $c(H^+)$:

$$c(H^+) = 10^{-p[H]} \cdot \text{mol/L}.$$

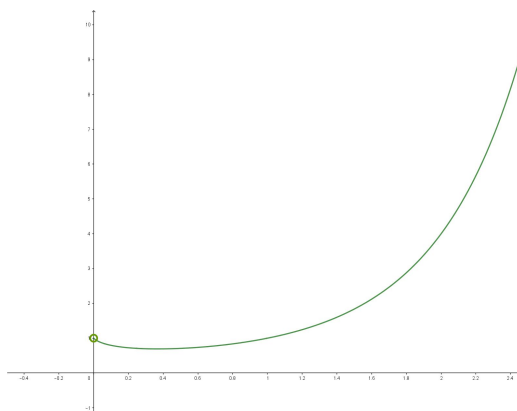
Uobičajeno je gornju definiciju riječima izreći ovako: $p[H]$ je negativan dekadski logaritam iznosa koncentracije hidronijevih iona u otopini, mjerene u molima po litri. Riječ negativan ovdje smo naglasili jer bi korektno bilo reći suprotan: iznosi $p[H]$ su u pravilu pozitivni brojevi i definicija je takva kakva jest upravo jer su logaritmi $\log \frac{c(H^+)}{\text{mol/L}}$ u otopinama najčešće negativni brojevi (koncentracije H^+ iona su u pravilu manje od standardne te je razlomak pod logaritmom po vrijednosti između 0 i 1).

Budući da je dekadski logaritam rastuća funkcija, a promjena predznaka pretvara rastuću u padajuću funkciju, slijedi da je $p[H]$ padajuća funkcija od $c(H^+)$, tj. $p[H]$ za kiseliu otopinu je manji nego za manje kiselu. Sâm simbol p može se tumačiti kao pokratak za $-\log$.

Zadatak 35 Ako je konstanta disocijacije (slabe) kiseline HA definirana kao

$$K_a = \frac{c(H^+)c(A^-)}{c(HA)},$$

¹³Definicija „pravog“ pH glasi: pH je suprotna vrijednost dekadskog logaritma relativne aktivnosti vodikovih iona u otopini. Zato ovdje koristimo fizikalno-kemijski korektnu oznaku $p[H]$ umjesto pH.



Slika 2.31: Opća potencija $y = x^x$ (slika izrađena programom Geogebra).

pokažite da za par (slabe) kiseline HA i njene konjugirane baze A^- vrijedi Henderson-Hasselbalchova jednačba

$$p[H] = pK_a + \log \frac{c(A^-)}{c(HA)}.$$

Zadatak 36 *Koje od hiperbolnih funkcija su bijekcije? Za one koje jesu, odredite formule njihovih inverznih funkcija.*

2.5.5 Opće potencije

Ponekad se susreću funkcije eksponencijalnog oblika čije pravilo sadrži nezavisnu varijablu i u bazi i u eksponentu. Takva je primjerice funkcija zadana pravilom

$$f(x) = x^x.$$

Takve funkcije nisu ni monomi ni eksponencijalne funkcije, nego spadaju u tzv. **opće potencije**. Formula takve funkcije je općenito oblika $f(x) = u(x)^{v(x)}$, a definira se kao

$$f(x) = u(x)^{v(x)} := \exp(v(x) \ln u(x)).$$

Iz te se definicije vidi da je prirodna domena takve funkcije skup svih realnih brojeva x za koje je $u(x) > 0$. Primjerice, $f(x) = x^x = \exp(x \ln x)$ za prirodnu domenu ima skup $\langle 0, +\infty \rangle$ jer je tu $u(x) = x$. Graf funkcije $f(x) = x^x$ prikazan je na slici 5.7.

2.5.6 Trigonometrijske i ciklometrijske funkcije

Osnovne trigonometrijske funkcije su sinus, kosinus, tangens i kotangens i one sve četiri spadaju u periodične funkcije: **Periodična funkcija** (realna, jedne varijable) je

funkcija f sa svojstvom da se može naći broj $T > 0$ (**period** od f) takav da za sve x iz domene od f vrijedi

$$f(x + T) = f(x). \quad (2.2)$$

Najmanji pozitivan period, ako postoji, naziva se **temeljnim periodom** funkcije. Ako je nezavisna varijabla dimenzije duljine, temeljni period se obično naziva valnom duljinom i označava s λ .

Uvrstimo li $x - T$ na mjesto broja x u jednakost (2.2) dobivamo da mora vrijediti i $f(x) = f(x - T)$. Analogno bi se vidjelo da ako gornja jednakost vrijedi za sve x iz domene, onda mora vrijediti i $f(x + nT) = f(x)$ za sve x i za sve cijele brojeve n — svaki cjelobrojni višekratnik perioda funkcije je također njezin period. Specijalno, vidimo da domena periodične funkcije s periodom T za svaki x kojeg sadrži mora sadržavati i sve brojeve $x + nT$. Jedna moguća domena periodičnih funkcija je skup $\mathbb{R}$. Alternativno, domena periodične funkcije može biti beskonačna unija intervala I_n ($n \in \mathbb{Z}$), gdje pojedini interval I_n sadrži brojeve između $a + nT$ i $b + nT$. Pritom intervali I_n mogu biti otvoreni, zatvoreni ili poluotvoreni (ali svi istog tipa) i $0 \leq a < b \leq T$. Pojednostavljeno rečeno, takva domena sastoji se od svih za višekratnike od T ulijevo i udesno translatiranih kopija osnovnog intervala na kojem je funkcija definirana.

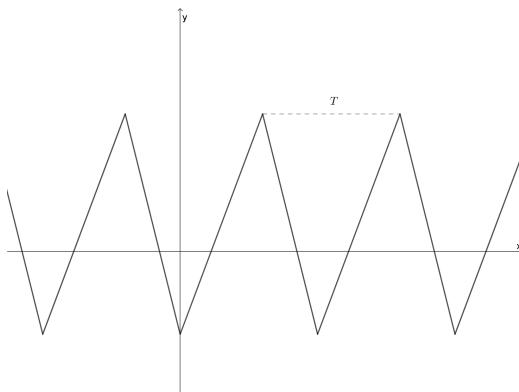
Primjer 42 Unija $\dots \langle -5, 4] \cup \langle -3, 2] \cup \langle -1, 0] \cup \langle 1, 2] \cup \langle 3, 4] \cup \dots$ je moguća domena neke periodične funkcije.

Vizualno, periodičnost funkcije se očituje u ponavljanju jednog dijela grafa (koji je širine perioda) u jednakim razmacima ulijevo i udesno (translacijama za višekratnike perioda). Primjer grafa periodične funkcije vidi se na slici 2.32. Na njoj je označen temeljni period T — ako bismo uzeli bilo koji uži dio grafa ne bismo njegovim ponavljanjem ulijevo i udesno mogli rekonstruirati čitav graf.

Najpoznatije periodične funkcije su trigonometrijske funkcije, tj. periodične funkcije čija pravila se mogu izraziti s konačno mnogo primjena četiriju osnovnih računskih operacija i komponiranja na funkcije sinus i kosinus. Iako ne najprecizniji¹⁴, svakako najjednostavniji način definiranja funkcija **sinus i kosinus** je pomoću jedinične kružnice. Radi se o kružnici polumjera 1 nacrtanoj u koordinatnoj ravni. Radi opasnosti od zabune, u slučaju da ju koristimo za definiciju funkcija sinus i kosinus, tj. za definiciju što je to $\sin x$ i $\cos x$ kad je x realan broj, koordinatne osi sustava u kom je nacrtana jedinična kružnica nije prikladno zvati x -os i y -os. Jedna jedinična kružnica prikazana je na slici 2.33, središte joj je označeno s O , a točka A ima koordinate $(1, 0)$. Ako je x duljina luka $\widehat{AB}$ te kružnice od točke A do neke točke B , onda se $\cos x$ (kosinus broja x) definira kao apscisa točke B , a $\sin x$ (sinus broja x) kao njena ordinata. Pritom je za pozitivan x luk $\widehat{AB}$ gledan od točke A u pozitivnom smjeru, a za negativan u negativnom.¹⁵ Ovdje je zgodno podsjetiti:

¹⁴Precizna definicija ovih funkcija koristi redove potencija, vidi odjeljak ??.

¹⁵Podsjećamo, pozitivan smjer je smjer suprotan kretanju kazaljke na analognom satu, a negativan smjer je smjer kretanja takve kazaljke.

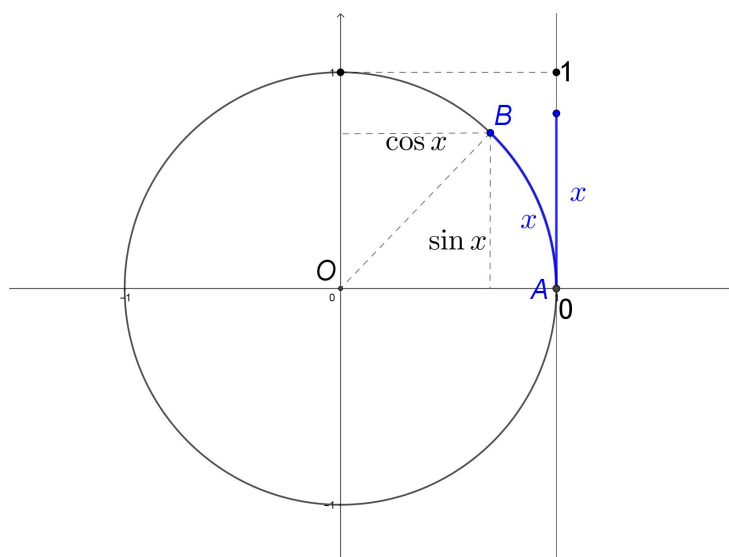


Slika 2.32: Graf periodične funkcije $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ s istaknutim temeljnim periodom T ; slika izrađena programom Geogebra.

Isto je reći „ x je duljina luka od točke A do točke B na jediničnoj kružnici“ i „kut $\angle AOB$ ima x radijana“. Dakle, ako nas zanima vrijednost sinusa ili kosinusa nekog broja, potrebno je naći točku B na jediničnoj kružnici tako da je duljina luka od A do B jednaka tom broju, tj. da kut $\angle AOB$ ima mjeru x . Taj proces poznat je kao namatanje brojevnog pravca na jediničnu kružnicu, pri čemu zamišljamo da je točka 0 tog pravca stavljena na točku A te da se pozitivni dio pravca na kružnicu namata u pozitivnom, a negativni u negativnom smjeru.

Iz gornje definicije sinusa i kosinusa očita su njihova glavna svojstva:

- Brojevi $\sin x$ i $\cos x$ mogu se odrediti za sve realne brojeve x jer kružnicu možemo obilaziti u oba smjera proizvoljno mnogo puta: Prirodna domena funkcija sinus i kosinus je cijeli skup $\mathbb{R}$.
- Apscise točaka na jediničnoj kružnici su brojevi između -1 i 1 , a isto tako i ordinate. Stoga su za svaki broj x brojevi $\sin x$ i $\cos x$ između -1 i 1 . Preciznije rečeno: Slika funkcija sinus i kosinus je segment $[-1, 1]$.
- Namatanjem pravca na kružnicu točke se ponavljaju nakon svakog „punog kruga“, tj. nakon što se prijeđe opseg 2π jedinične kružnice. Stoga su sinus i kosinus periodične funkcije s temeljnim periodom 2π .
- Za $x = 0$ nalazimo se u točki $A = (1, 0)$ pa je $\cos 0 = 1$ i $\sin 0 = 0$. Općenito, $\sin x$ je 0 kad god broju x odgovara jedna od točaka $(-1, 0)$ i $(1, 0)$, tj. kad god je x višekratnik od π : Nultočke funkcije sinus su svi brojevi $k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Kosinus je nula kad god broju x odgovara jedna od točaka $(0, 1)$ i $(0, -1)$, a to se dešava kad god je x neparni višekratnik od $\frac{\pi}{2}$: nultočke funkcije kosinus su svi brojevi $(2k + 1)\frac{\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$.
- Primjenom Pitagorina poučka na trokut određen ishodištem O , točkom $(\cos x, 0)$ i točkom $B = (\cos x, \sin x)$ (dakle, pravokutni trokut s katetama



Slika 2.33: Definicija sinusa i kosinusa; slika izrađena programom Geogebra.

duljina $\cos x$ i $\sin x$ te hipotenuzom duljine 1) dobivamo osnovnu formulu koja povezuje sinus i kosinus:¹⁶

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1.$$

- Ako bismo zamijenili uloge koordinatnih osi, vidimo da bi došlo do zamjene uloga sinusa i kosinusa, ali bi nam slika izgledala skoro isto. Pomnijim promatranjem zaključili bismo da je jedina bitna razlika između sinusa i kosinusa u jednom pravom kutu. Formulama se to izražava ovako:

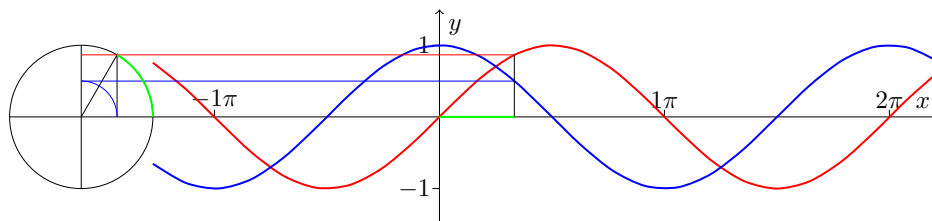
$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x, \quad \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x.$$

Stoga i grafovi tih funkcija izgledaju gotovo jednako — razlika je u horizontalnom pomaku za $\frac{\pi}{2}$ (vidi sliku 2.34).

- Sinus je neparna, a kosinus je parna funkcija.

Zadatak 37 *Temeljem definicija objasnite zašto je sinus neparna, a kosinus parna funkcija.*

¹⁶Ako je neka funkcija označena s f , onda je s f^2 označen kvadrat te funkcije: $f^2(x) := f(x)^2$.



Slika 2.34: Grafovi funkcija sinus (crveno) i kosinus (plavo).

Od važnijih formula za sinus i kosinus ovdje navodimo još samo četiri. Formule za sinus i kosinus dvostrukog kuta glase

$$\sin(2x) = 2 \sin x \cos x, \quad \cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x.$$

Adicijske formule za sinus i kosinus su

$$\sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \cos x \sin y, \quad \cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y.$$

Kao što smo rekli, oblici grafova sinusa i kosinusa su isti, samo su različito pozicionirani u koordinatnom sustavu. Općenito, sinusoidalni valovi temeljnog perioda T i amplitude (polovice razlike visina najviše i najniže točke vala) A mogu se opisati kao transformirani kosinusi, tj. formulom oblika

$$C + A \cos(\omega t + \delta),$$

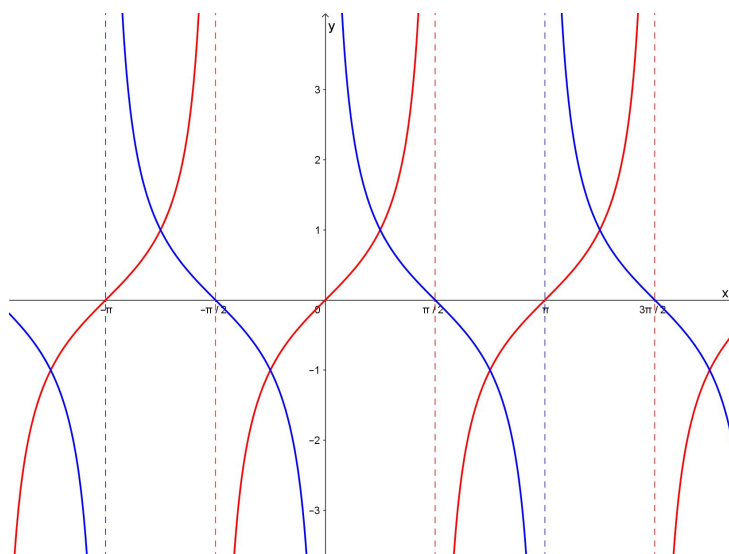
gdje je C prosječna visina vala (tj. val se nalazi između horizontala $y = C \pm A$), $\omega = \frac{2\pi}{T}$ je (kutna) frekvencija, a δ je fazni (horizontalni) pomak. Varijablu smo ovdje označili s t umjesto s x jer je u primjenama varijabla periodične funkcije najčešće vrijeme.

Zadatak 38 Skicirajte graf funkcije $f(x) = 1 + 2 \cos(3x + 4)$.

Funkcije **tangens** i **kotangens** su kvocijenti sinusa i kosinusa:

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}, \quad \operatorname{ctg} x = \frac{1}{\operatorname{tg} x} = \frac{\cos x}{\sin x}.$$

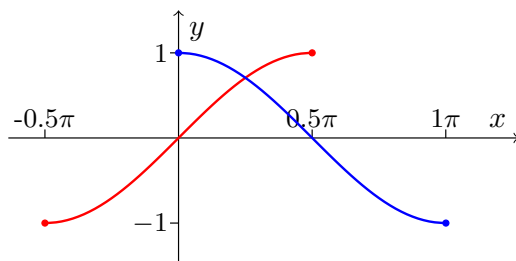
S obzirom na nultočke funkcija sinus i kosinus, vidimo da je prirodna domena funkcije tangens skup $\mathbb{R} \setminus \{(2k+1)\frac{\pi}{2} : k \in \mathbb{Z}\}$ (realni brojevi bez neparnih višekratnika broja $\frac{\pi}{2}$), a prirodna domena funkcije kotangens je skup $\mathbb{R} \setminus \{k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$ (realni brojevi bez svih višekratnika broja π). Lako je provjeriti da su i tangens i kotangens neparne periodične funkcije s temeljnim periodom π . Na svakom od intervala koji u uniji čine njenu domenu, funkcija tangens je rastuća, a kotangens padajuća. Grafove funkcija tangens i kotangens prikazuje slika 2.35. Istaknute su i njihove vertikalne asimptote, koje se pojavljuju u svim točkama u kojima nisu definirane.



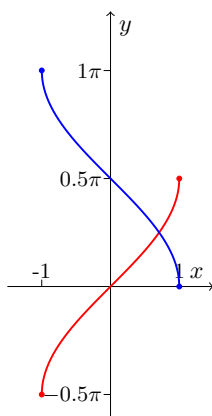
Slika 2.35: Grafovi funkcija tangens (crveno) i kotangens (plavo). Slika je izrađena programom Geogebra.

Periodična funkcija ne može imati horizontalne asimptote (zašto?). Također, periodična funkcija ne može biti injekcija, jer se po njenoj definiciji za beskonačno mnogo vrijednosti varijable postižu iste vrijednosti funkcije. Stoga nijedna od trigonometrijskih funkcija nema inverznu funkciju. No, ako odaberemo njihove restrikcije na prikladne manje domene, moguća je definicija arkus-funkcija, tj. **ciklometrijskih funkcija**, koje mnogi (jako nepravilno) nazivaju inverznim trigonometrijskim funkcijama.

Ako umjesto sinusa $\sin : \mathbb{R} \rightarrow [-1, 1]$ (surjekcija, nije injekcija) gledamo njegovu restrikciju $\text{Sin} : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \rightarrow [-1, 1]$, a umjesto kosinusa $\cos : \mathbb{R} \rightarrow [-1, 1]$ (isto surjekcija, nije injekcija) gledamo njegovu restrikciju $\text{Cos} : [0, \pi] \rightarrow [-1, 1]$, onda smo dobili dvije bijekcije, čiji grafovi su prikazani na slici 2.36. **Arkus-sinus** i



Slika 2.36: Grafovi funkcija Sin (crveno) i Cos (plavo).



Slika 2.37: Grafovi funkcija arkus-sinus (crveno) i arkus-kosinus (plavo).

arkus-kosinus su inverzne funkcije funkcija Sin i Cos:

$$\arcsin : [-1, 1] \rightarrow \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

je definiran s

$$\arcsin x = y \Leftrightarrow x = \sin y,$$

a

$$\arccos : [-1, 1] \rightarrow [0, \pi],$$

je definiran s

$$\arccos x = y \Leftrightarrow x = \cos y.$$

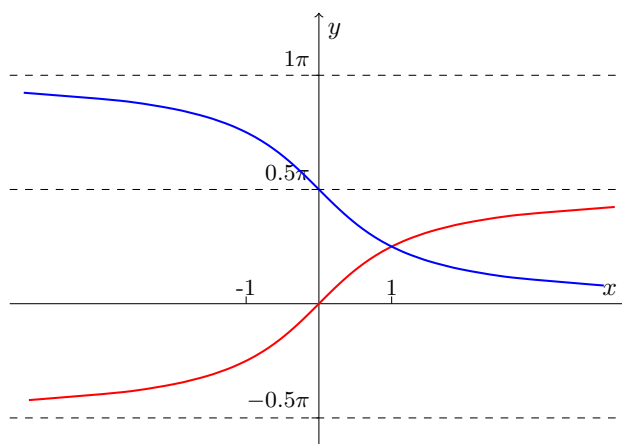
Odgovarajući grafovi prikazani su na slici 2.37. Iz definicije je očito da treba biti oprezan s korištenjem arkus-sinusa i arkus-kosinusa: Za zadani broj između -1 i 1 one određuju samo po jedan od beskonačno mnogo iznosa čiji je taj zadani broj sinus odnosno kosinus.

Primjer 43 Ako rješavamo jednadžbu $\cos x = -\frac{1}{2}$, funkcija $\arcsin$ dati će $x = \frac{5\pi}{6}$. No, to nije jedini iznos x čiji kosinus je jednak $-\frac{1}{2}$: osim njega, to su i svi brojevi $\frac{5\pi}{6} + 2k\pi$, gdje je k cijeli broj, ali i svi brojevi $\frac{7\pi}{6} + 2k\pi$, gdje je k cijeli broj.

Slično se definiraju **arkus-tangens** i **arkus-kotangens**. Prvo se uzmu restrikcije $\text{Tg} : \langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ i $\text{Ctg} : \langle 0, \pi \rangle \rightarrow \mathbb{R}$, koje su bijekcije, a njihovi inverzi su arkus-tangens i arkus-kotangens:

$$\arctg : \mathbb{R} \rightarrow \langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \rangle, \quad \arctg x = y \Leftrightarrow x = \text{Tg } y;$$

$$\text{arcctg} : \mathbb{R} \rightarrow \langle 0, \pi \rangle, \quad \text{arcctg } x = y \Leftrightarrow x = \text{Ctg } y.$$



Slika 2.38: Grafovi funkcija arkus-tangens (a) i arkus-kotangens (b).

Odgovarajući grafovi prikazani su na slici 2.38. Budući da grafovi funkcija tangens i kotangens imaju vertikalne asimptote, grafovi funkcija arkus-tangens i arkus-kotangens imaju horizontalne asimptote (arkus-tangens lijevo ima horizontalnu asimptotu $y = \frac{\pi}{2}$, a desno $y = \frac{\pi}{2}$, dok arkus-kotangens kao lijevu horizontalnu asimptotu ima $y = \pi$, a desnu $y = 0$). Kao i kod arkus-sinusa i arkus-kosinusa, kod arkus-tangensa i arkus-kotangensa također trebamo biti svjesni da daju samo po jednu od beskonačno mnogo vrijednosti čiji tangens ili kotangens nam je zadan, a ostale, ako nam trebaju, moramo sami rekonstruirati poznavanjem svojstava funkcija tangens i kotangens. Uočimo i da su arkus-sinus i arkus-tangens rastuće, a arkus-kosinus i arkus-kotangens padajuće funkcije. Arkus-sinus i arkus-tangens su neparne funkcije, dok arkus-kosinus i arkus-kotangens nisu ni parne ni neparne.

Ovime smo došli do kraja pregleda osnovnih **elementarnih funkcija**, tj. svih funkcija koje se iz algebarskih, eksponencijalnih, logaritamskih, po četiriju osnovnih trigonometrijskih i ciklotometrijskih funkcija mogu dobiti s četiri osnovne računske operacije te komponiranjem; sve ostale realne funkcije jedne varijable nazivaju se neelementarnim funkcijama. Pritom, sve elementarne funkcije koje nisu algebarske nazivamo **transcendentnim funkcijama**. Dok se u algebarske funkcije mogu uvrštavati fizikalne veličine skupa s mjernim jedinicama (uz uvjet homogenosti, tj. da ne možemo zbrajati, oduzimati ni izjednačavati varijable i konstante koje nisu iste fizikalne dimenzije), u transcendentne funkcije (kao primjerice u definiciji $p[H]$, vidi primjer 41) možemo uvrštavati samo „čiste“ brojeve, odnosno kod transcendentnih funkcija su i nezavisna i zavisna varijabla „čisti“ brojevi.

Pod ispitivanjem **toka funkcije** podrazumijeva se određivanje svih potrebnih podataka za crtanje njenog grafa. Prvi korak ispitivanja toka funkcije je **određivanje njene prirodne domene** (ako joj domena nije eksplicitno zadana). Prirodna domena za formulu $y = f(x)$ određuje se uzimajući u obzir prirodne domene elementarnih funkcija, tj. u logaritme smiju biti uvršteni samo pozitivni brojevi; u arkus-sinus i

arkus-kosinus smiju biti uvršteni samo brojevi između -1 i 1 ; pod parnim korijenima ne smiju biti negativni brojevi; ne smije se dijeliti s nulom. Uz to je, ako postoje, potrebno odrediti i sjecišta s koordinatnim osima.¹⁷ Ostale korake za ispitivanje toka funkcije opisat ćemo u odjeljku 3.3.

Primjer 44 *Formulom*

$$f(x) = \log \frac{1}{\sqrt{\frac{\pi}{4}} - \sqrt{\arcsin x}}$$

zadana je realna funkcija jedne varijable. Prvo (zbog arkus-sinusa) mora biti $x \in [-1, 1]$. Nadalje, $\arcsin x$ ne smije biti negativan jer je pod kvadratnim korijenom, dakle mora biti $x \geq 0$, tj. ostaje nam $x \in [0, 1]$. Na kraju, izraz pod logaritmom, $\frac{1}{\sqrt{\frac{\pi}{4}} - \sqrt{\arcsin x}}$, mora biti pozitivan, a to vrijedi za $\sqrt{\frac{\pi}{4}} - \sqrt{\arcsin x} > 0$, tj. $\sqrt{\arcsin x} < \sqrt{\frac{\pi}{4}}$. Kako su tu prema prethodnom pod korijenima pozitivni brojevi, zadnju nejednakost smijemo kvadrirati te dobivamo $\arcsin x < \frac{\pi}{4}$. Dakle, mora biti $x < \frac{1}{\sqrt{2}}$. Zaključujemo da je prirodna domena funkcije f skup $[0, \frac{1}{\sqrt{2}})$.

Funkcija je definirana u 0 i iznos joj je $f(0) = \log \sqrt{\frac{4}{\pi}} \approx 0,052$, tj. graf od f siječe y -os u $\log \sqrt{\frac{4}{\pi}}$.

Logaritam je 0 ako je u njega uvršten 1 , dakle je naša funkcija 0 ako je izraz pod logaritmom jednak 1 , a on je jednak 1 ako je $\sqrt{\frac{\pi}{4}} - \sqrt{\arcsin x} = 1$. No, ta jednadžba nema realnih rješenja. Dakle, f nema nultočka.

2.6 Priказ neafinih funkcija pomoću afinih („linearizacija“)

Pojam linearizacije funkcije u matematici obično znači aproksimaciju neafine funkcije pomoću affine funkcije (tangente na graf), na nekom intervalu. U ovom odjeljku ćemo pak pod linearizacijom podrazumijevati ezaktno pretvaranje neafine ovisnosti u afinu pomoću prikladne zamjene varijabli. Naime, u kemiji i drugim prirodnim znanostima često je potrebno ili zgodno neku funkcionalnu ovisnost $Y = f(X)$ prikazati pomoću pravca u koordinatnoj ravnini. Razlozi mogu biti različiti, a jedan od češćih je mogućnost uspoređivanja eksperimentalno dobivenih podataka s pretpostavljenom funkcijom f ili korištenje metode najmanjih kvadrata (vidi odjeljak ??). Ako funkcija f nije afina, graf joj nije pravac, ali se sama ovisnost uz odgovarajuću zamjenu varijabli u većini slučajeva lako prevodi u afinu. U smislu ovog udžbenika, **linearizacija neafine funkcije** $Y = f(X)$ je $y = ax + b$, gdje su nove varijable x i y izvedene iz izvornih varijabli X i Y , pri čemu mora vrijediti:

¹⁷Sjecišta s osi apscisa nije uvijek moguće naći elementarnim metodama.

2.6. PRIKAZ NEAFINIH FUNKCIJA POMOĆU AFINIH („LINEARIZACIJA“)⁶¹

- x i y se mogu izraziti kao funkcije od X i Y i konstanti te se supstitucijom tih izraza u $y = ax + b$ dobiva izvorna ovisnost $Y = f(X)$;
- na razmatranom rasponu varijabli X i Y funkcije koje povezuju x s X (i Y), odnosno y s Y (i X), moraju biti bijektivne, tj. iz svakog nacrtanog ili izračunatog para (x, y) može egzaktno¹⁸ i jednoznačno izračunati (rekonstruirati) par (X, Y) .

Naravno, dobiveni a i b moraju biti konstantni, tj. ne smiju ovisiti ni o X ni o Y .

Zadatak 39 Otkrijte greške u sljedećim linearizacijama:

- $A \iota \exp(C \chi^2) = D \chi \exp(C \chi)$ (ovisnost ι o χ za $1 \leq \chi \leq 6$) linearizirano uz $y = \ln \frac{\iota}{\chi}$, $b = \ln D - \ln A$, $x = \chi$ i $a = B - C \chi$.
- $\tau^4 + 16 = 8\tau^2 + 800\tau^4 \ln\left(\frac{0.1}{\omega}\right)$ (ovisnost τ o ω za $0,5 \leq \tau \leq 1,5$) linearizirano uz $y = \frac{1}{\tau^2}$, $b = \frac{1}{4}$, $x = \sqrt{\ln \frac{0.1}{\omega}}$ i $a = \sqrt{50}$.

Uobičajeno je (no ne uvijek i najzgodnije!) uzeti da y ovisi samo o konstantama i Y , a x samo o konstantama i X .

Primjer 45 Arrheniusov zakon za ovisnost koeficijenta brzine reakcije o temperaturi glasi

$$k = A \exp\left(-\frac{E_a}{RT}\right).$$

Uočimo da k i A uvijek imaju istu mjernu jedinicu (označimo ju s jed.),¹⁹ dok je jedinica od E_a jednaka jedinici od RT (dakle, J/mol).

Kad se žele usporediti eksperimentalno ili računski dobiveni parovi (T, k) s tom ovisnošću, najčešće s ciljem određivanja vrijednosti E_a (energije aktivacije) obično je lakše crtati ovisnost $\ln k$ o $\frac{1}{T}$:

$$\ln k = \ln A - \frac{E_a}{RT}.$$

Dakle, uz $y = \ln \frac{k}{\text{jed.}}$, $b = \ln \frac{A}{\text{jed.}}$, $a = -\frac{E_a}{RK}$ i $x = \frac{K}{T}$ linearizirali smo Arrheniusov zakon na oblik $y = ax + b$.

Ako bi se Arrheniusov zakon razmatrao za raspon temperatura od $T_1 = 200,0 \text{ K}$ do $T_2 = 300,0 \text{ K}$, uz gornji odabir x raspon na x -osi bio bi od $x_1 = \frac{1}{300} = 0,003333$ do $x_2 = \frac{1}{200} = 0,005000$, a x -os bi bila označena s $\frac{K}{T}$. Pritom uočimo da, budući da je ovisnost x o T ovdje padajuća, manjoj temperaturi odgovara veći x i obrnuto.

Raspon na y -osi, koja će biti označena s $\ln \frac{k}{\text{jed.}}$, možemo dobiti ili tako da T_1 i T_2 uvrstimo u izvorni oblik Arrheniusove jednadžbe i tako dobivene $k(T_1)$ i $k(T_2)$

¹⁸Obično se podrazumijeva i „ručno“, tj. bez korištenja programa za približno rješavanje jednadžbi. Drugim riječima, treba biti moguće eksplicitno izraziti X i Y preko x i y .

¹⁹Ta jedinica ovisi o redu reakcije, primjerice za reakcije prvog reda ona je s^{-1} .

uvrstimo u formulu za y , ili pak tako da uvrstimo x_1 i x_2 u linearizirani oblik $y = ax + b$. Ako odaberemo ovaj drugi način trebamo pripaziti na pravila računa sa značajnim znamenkama te stoga iznose a i b za taj račun ostavimo prvo s više od potrebnog broja znamenaka, a tek nakon toga zaokružujemo po pravilima računa sa značajnim znamenkama. U našem slučaju ta dva načina izračuna y_1 i y_2 su, ako uzmemo primjerice $E_a = 1,915 \cdot 10^5 \text{ J/mol}$ i $A = 1,610 \cdot 10^{12} \text{ jed.}$:

- $k(200,0 \text{ K}) = 1,610 \cdot 10^{12} \text{ jed.} \cdot \exp\left(-\frac{1915 \cdot 10^5}{8,3145 \cdot 200}\right) \approx 1.560843899392 \cdot 10^{-38} \text{ jed.}$ i analogno $k(300,0 \text{ K}) \approx 7.3200650344672 \cdot 10^{-22} \text{ jed}$ pa je $y_1 = \ln(1.560843899392 \cdot 10^{-38}) = -87.05$ i $y_2 = \ln(7.3200650344672 \cdot 10^{-22}) = -48.67$.
- $a = -\frac{1915 \cdot 10^5}{8,3145} \approx -23032.052438511$ i $b = \ln(1,610 \cdot 10^{12}) \approx 28.1072552949249$ pa je $y_1 = ax_1 + b = -23032.052438511 \cdot \frac{1}{200} + 28.1072552949249 = -87.05$ i $y_2 = ax_2 + b = -23032.052438511 \cdot \frac{1}{300} + 28.1072552949249 = -48.67$.

Primjer 46 Ostwaldov zakon za slabe elektrolite glasi

$$\frac{1}{\Lambda_m} = \frac{1}{\Lambda_m^\circ} + \frac{c \Lambda_m}{K(\Lambda_m^\circ)^2}.$$

Pritom je Λ_m molarna provodnost elektrolita ($\text{u S cm}^2 \text{ mol}^{-1}$), $\Lambda_m^\circ > 0$ je konstanta²⁰, kao i $K > 0$ ²¹

Označimo li

$$y = \frac{1}{\Lambda_m} \cdot \frac{\text{S cm}^2}{\text{mol}}, \quad x = c \Lambda_m \cdot \frac{\text{cm}}{\text{S}},$$

$$a = \frac{1}{K(\Lambda_m^\circ)^2} \cdot \frac{\text{S}^2 \text{ cm}}{\text{mol}}, \quad b = \frac{1}{\Lambda_m^\circ} \cdot \frac{\text{S cm}^2}{\text{mol}},$$

zakon poprima oblik

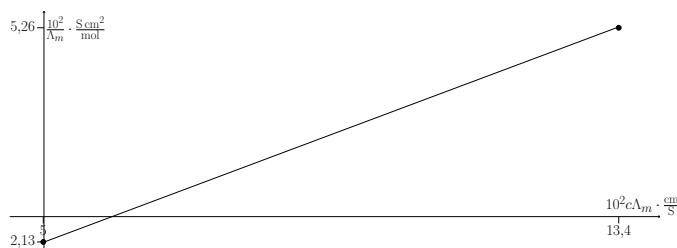
$$y = ax + b.$$

Konkretno, ako su nekim eksperimentom pri konstantnoj temperaturi utvrđivane molarne provodnosti za neki raspon koncentracija i ako su poznate teorijske vrijednosti $\Lambda_m^\circ = 390,7 \text{ S cm}^2 \text{ mol}^{-1}$ i za $K = 1,750 \cdot 10^{-5} \text{ mol dm}^{-3}$ dobivamo $a = 374,348$ i $b = 2,5595 \cdot 10^{-3}$. Ako su pri tom eksperimentu dobivene molarne provodnosti u rasponu od $19,00$ do $47,00 \text{ S cm}^2 \text{ mol}^{-1}$, vidimo da se vrijednosti y kreću između $y_1 = \frac{1}{47} = 0,02128$ i $y_2 = \frac{1}{19} = 0,05263$ pa je razuman raspon na y -osi npr. od $0,02$ do $0,055$.

Kako je $y = ax + b$, znači da je $x = (y - b)/a$. Stoga je raspon x -eva između $x_1 = (y_1 - b)/a = 0,00005000$ i $x_2 = (y_2 - b)/a = 0,0001340$. Stoga je prikladan raspon za x -os recimo od $5 \cdot 10^{-5}$ do $14 \cdot 10^{-5}$. Uz te raspone, odgovarajući graf kojim je prikazan Ostwaldov zakon u danoj konkretnoj situaciji prikazan je slikom 2.39.

²⁰Granična molarna provodnost, ovisi o temperaturi.

²¹Konstanta disocijacije slabog elektrolita.



Slika 2.39: Ostwaldov zakon prikazan pomoću afine funkcije.

Uočimo da se uz navedeni odabir lako rekonstruiraju iznosi izvornih varijabli. Primjerice, ako je $x = 10^{-4}$ i $y = 5 \cdot 10^{-2}$ imamo prvo $5 \cdot 10^{-2} = \frac{1}{\Lambda_m} \cdot \frac{\text{S cm}^2}{\text{mol}}$ pa je $\Lambda_m = 20,00 \frac{\text{mol}}{\text{S cm}^2}$, pa je $10^{-4} = c \Lambda_m \cdot \frac{\text{cm}}{\text{S}}$, dakle je $c = 5,0000 \cdot 10^{-6} \frac{\text{mol}}{\text{cm}^3}$.

Kad god je moguće, od više mogućih treba preferirati jednostavne odabire. Primjerice, moglo se Ostwaldov zakon prevesti u oblik

$$\frac{1}{\Lambda_m^2} - \frac{1}{\Lambda_m \Lambda_m^\circ} = \frac{c}{K(\Lambda_m^\circ)^2},$$

te definirati

$$y = \frac{1}{\Lambda_m^2} - \frac{1}{\Lambda_m \Lambda_m^\circ}$$

i (do na mjerne jedinice) $x = c$, $b = 0$, $a = \frac{1}{K(\Lambda_m^\circ)^2}$, što bi doduše dalo vrlo jednostavan x i pravac kroz ishodište, ali bi se iz iznosa y teško rekonstruirala odgovarajuća vrijednost Λ_m (kako?).

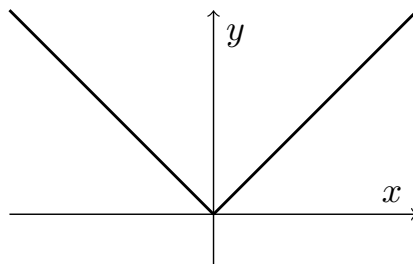
Zadatak 40 Ovisnost veličine κ o pozitivnoj veličini τ dana je jednadžbom:

$$\kappa = \exp\left(\frac{S\tau - H}{R\tau}\right).$$

Pritom je $R = 8,3145 \text{ J K}^{-1} \text{ mol}^{-1}$, $S = -44,08 \text{ J K}^{-1} \text{ mol}^{-1}$ i $H = -46,10 \text{ kJ mol}^{-1}$. Odredite mjerne jedinice od τ i κ . Linearizirajte zadanu ovisnost, odnosno interpretirajte ju kao jednadžbu pravca $y = ax + b$ u pravokutnom koordinatnom sustavu. Ako je u Vašoj linearizaciji $x = 2,000 \cdot 10^{-3}$, koliko iznose pripadni τ i κ ? Skicirajte lineariziranu ovisnost κ o τ ako znate da su se iznosi τ kretali u rasponu od 250,0 do 750,0 jedinica određenih na početku zadatka.

2.7 Funkcije zadane po dijelovima

Među neelementarnim funkcijama jedna je podvrsta relativno česta u primjenama. To su **funkcije zadane po dijelovima**, tj. realne funkcije jedne varijable kojima je



Slika 2.40: Graf funkcije apsolutne vrijednosti.

na jednom dijelu domene pravilo za izračunavanje vrijednosti funkcije je jedno, na drugom dijelu drugo, na trećem treće i t.d., pri čemu su sva ta pravila elementarne funkcije. Formalno zapisano, takve se funkcije zadaju kao:

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x), & x \in A, \\ f_2(x) & x \in B, \\ \dots & \dots \end{cases}$$

Taj zapis znači: Ako je x iz A , onda se $f(x)$ izračuna tako da se x uvrsti u f_1 ; ako je x iz B , onda se $f(x)$ izračuna tako da se x uvrsti u f_2 itd. Unija svih skupova $A, B, \dots$ je domena funkcije f (i pritom skupovi $A, B, \dots$ moraju biti u parovima disjunktne tj. nikoja dva ne smiju imati zajedničkih elemenata). Graf funkcije f dobiva se „lijepljenjem“ grafova funkcija $f_1, f_2, \dots$.

Najpoznatija funkcija zadana po dijelovima je **funkcija apsolutne vrijednosti** koja nenegativne brojeve ne mijenja, a negativnima promijeni predznak. Dakle, to je funkcija $| \cdot | : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ zadana s

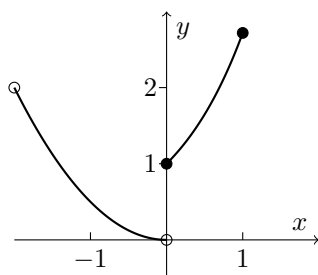
$$|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$$

Za negativne brojeve (lijevi dio koordinatnog sustava) vidimo da se pravilo podudara s linearnom funkcijom $f_1(x) = -x$, a za nenegativne (desni dio koordinatnog sustava) se pravilo podudara s linearnom funkcijom $f_2(x) = x$. Stoga se ukupni graf sastoji od ta dva dijela. Kako se f_1 i f_2 podudaraju u „točki lijepljenja“ $(x, f(x)) = (0, 0)$, ukupni graf biti će „u komadu“, a prikazan je na slici 2.40.

Napomenimo ovdje da uz već poznate transformacije grafova (odjeljak 2.3) sada možemo dodati još jednu: Ako je poznat graf od $y = f(x)$, graf funkcije

$$y = |f(x)| \begin{cases} f(x), & f(x) \geq 0 \\ -f(x) & f(x) < 0 \end{cases}$$

dobivamo tako da dijelove grafa od f koji su ispod x -osi zrcalimo s obzirom na nju, a ostatak grafa ostavimo kakav jest.



Slika 2.41: Primjer grafa funkcije zadane „po dijelovima” (uz primjer 47).

Zadatak 41 *Skicirajte graf funkcije $f(x) = 5 - |4 - 3|x^2 - 1||$.*

Općenito, dijelovi grafa funkcije zadane po dijelovima se mogu i ne moraju spojiti u „točkama lijepljenja”.

Primjer 47 *Funkcija f zadana je s*

$$f(x) = \begin{cases} e^x, & 0 \leq x \leq 1 \\ x^2, & -2 < x < 0 \end{cases}.$$

Ona je definirana za $x \in \langle -2, 0 \rangle \cup [0, 1] = \langle -2, 1 \rangle$, a graf joj je prikazan slikom 2.41. Lijevi dio grafa je dio parabole $y = x^2$, a desni je dio krivulje $y = f(x)$. Praznim kružićima su kao i uvijek istaknute su točke koje nisu dio grafa, a punim one koje jesu.

Poglavlje 3

Infinitezimalni račun za realne funkcije jedne varijable

3.1 Intuitivni opis derivacije i integrala

Limesi, derivacije i integrali spadaju u područje matematike poznato kao **infinitezimalni račun**, koji je pak dio matematičke analize. Pojmovi derivacije i integrala funkcije središnji su pojmovi više matematike i njihove definicije nisu sasvim jednostavne, ali za stjecanje sposobnosti provođenja jednostavnijih računa s derivacijama i integralima i primjenjivanja istih u mnogim rutinskim situacijama nije nužna njihova precizna definicije, već je dovoljno razumijevanje njihovih interpretacija. Stoga smo se ovdje odlučili za donekle nekonvencionalni pristup ovoj temi, posebice zato da studenti čim ranije budu sposobni pratiti upotrebu infinitezimalnog računa na fizici, koju studenti kemije u pravilu slušaju istovremeno s matematikom. Pravilne definicije bit će dane tek kasnije u ovom poglavlju, u odjeljku 3.4.2.

Kao motivacijski primjer uzmimo sljedeći primjer. Primjer je odabran jer je za potpuno rješenje istog potrebno koristiti i deriviranje i integriranje.

Primjer 48 Mala raketa lansirana je vertikalno uvis s početnom brzinom $35 \frac{\text{m}}{\text{s}}$. Tijekom prvih 30 sekundi ovisnost akceleracije rakete o vremenu dobro je aproksimirana funkcijom

$$a(t) = -0,300t^2 + 6,00t.$$

Koja je maksimalna i prosječna brzina te rakete tijekom navedenih 30 sekundi? Koliki put raketa prođe u tih 30 sekundi?

Prije nego se pozabavimo pristupom rješenju tog problema, uočimo prvo grešku u zadavanju problema, a ona se tiče homogenosti. Naime, lijeva strana i oba člana na desnoj strani jednakosti moraju imati istu fizikalnu dimenziju. Nezavisna varijabla t ima dimenziju vremena i uzevši u obzir tekst problema, prirodni odabir mjerne jedinice za t je s. Lijeva strana ima fizikalnu dimenziju akceleracije te je kao mjerna jedinica prikladna m/s^2 . Dakle, m/s^2 mora biti jednako višekratnicima od

s^2 odnosno s , pa prva konstanta ima mjernu jedinicu m/s^4 , a druga m/s^3 . Stoga je pravilno zapisana formula ovisnosti akceleracije o vremenu:

$$a(t) = -0,300 \frac{m}{s^4} t^2 + 6,00 \frac{m}{s^3} t.$$

Takoder, kao i uvijek, prije rješavanja problema povezanog s nekom funkcijom, potrebno je definirati domenу. S obzirom na tekst zadatka, ovdje je domena $0 \leq t \leq 30 s$.

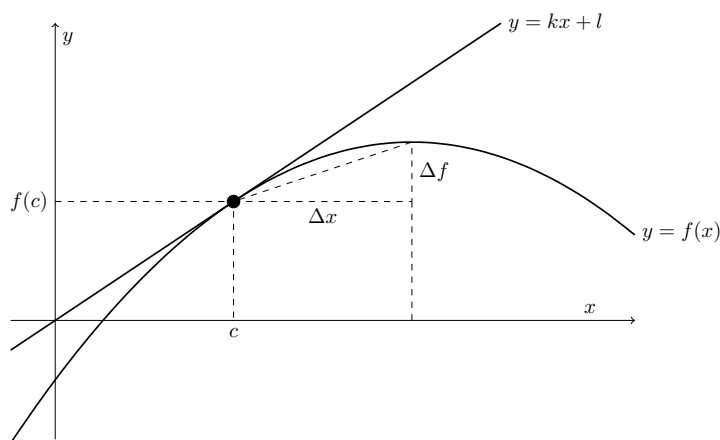
Zadatak 42 Skicirajte graf funkcije $a = a(t)$ iz primjera 48.

Iz prave definicije derivacije, koju ćemo dati u odjeljku ??, slijede tri njene interpretacije koje sve tri, ovisno o konkretnoj situaciji odnosno primjeni mogu poslužiti kao opisi smisla derivacije. Štoviše, povijesno gledano prava definicija derivacije postignuta je preciziranjem smisla tih triju interpretacija, tako da naš ovdje naizgled nestandardan pristup deriviranju (i integriranju) zapravo donekle prati i povijesni razvoj tih pojmova.

U nastavku pretpostavljamo da je f realna funkcija jedne varijable. Nezavisnu varijablu ćemo u ovom odjeljku najčešće označavati s t čak i ako se radi o čistom broju, zato što je u primjenama derivacija i integrala u kemiji i fizici nezavisna varijabla najčešće vrijeme. Postoje tri oznake zna derivaciju funkcije f : f' , $\dot{f}$ i $\frac{df}{dt}$.¹ Prva oznaka se ponajviše koristi u matematici, kad je potpuno jasno koje od slova koje se pojavljuju u formuli funkcije f je njena nezavisna varijabla, druga slično, ali samo ako je nezavisna varijabla označena s t . Posljednja oznaka posebno je popularna u fizikalnim i fizikalno-kemijskim primjenama, kad formule funkcija sadrže mnoga slova, jer jasnije ističe nezavisnu varijablu po kojoj se derivira. Oznaka $\frac{df}{dt}$ poprima oblik $\frac{d}{dt}(f(t))$ ako želimo napisati formulu funkcije f i ako je ona duga. Primjerice, za derivaciju od $t^2 + \exp(t)$ pišemo $\frac{d}{dt}(t^2 + \exp(t))$. Pritom $\frac{d}{dt}$ možemo shvatiti kao simbol značenja „derivacija po t od“. U svakom slučaju, sve te tri oznake predstavljaju deriviranu funkciju od f . No, ona se ne definira odjednom na cijeloj domeni, nego točku po točku, tj. definiramo (opisujemo) što znači $f'(c)$ odnosno $\dot{f}(c)$ odnosno $\frac{df}{dt}(c)$ za pojedini c iz domene funkcije f .

Prvi od tri opisa smisla derivacije neposredno je vezan za naš motivacijski primjer 48. Naime, ako je fizikalno značenje nezavisne varijable t funkcije f vrijeme, onda je za svaki vremenski interval Δt (u odnosu na fiksirani trenutak c) prosječna brzina promjene vrijednosti funkcije f u tom intervalu jednaka $\frac{\Delta f}{\Delta t} = \frac{f(t) - f(c)}{t - c}$. Ukoliko skraćujemo vremenski interval, bit ćemo sve bliži trenutnoj brzini promjene vrijednosti f u trenutku c te možemo reći: Derivacija $\dot{f}(c)$ od f u trenutku c je trenutna brzina promjene iznosa f u tom trenutku. Ako je $\dot{f}(c)$ definiran za svaki trenutak c , na taj način smo definirali novu funkciju $\dot{f}$ koju zovemo jednostavno **derivacijom funkcije f** (ili, u ovoj konkretnoj interpretaciji, brzinom promjene funkcije f).

¹Oznaka derivacije oblika $\dot{f}$ potječe od sir I. Newtona (1690-ih godina), a oznaka f' od J.-L. Lagrangea (1749.). Oznaka $\frac{df}{dt}$ potječe od G. W. Leibniza (1677.), koji još nije razmatrao derivaciju, nego kvocijent dvaju diferencijala.



Slika 3.1: Derivacija kao relativna promjena vrijednosti funkcije i kao koeficijent smjera tangente

Primjer 49 U primjeru 48 spominje se akceleracija. No, za pravocrtno gibanje je akceleracija u svakom trenutku definirana kao trenutna brzina brzine, tj. $a(t) = \dot{v}(t)$. Također, za pravocrtno gibanje je u svakom trenutku brzina isto što i trenutna brzina promjene puta, tj. $v(t) = \dot{s}(t)$. Kao što vidimo, u primjeru 48 imamo zadanu derivaciju funkcije v i iz nje bismo trebali odrediti funkciju v (da bismo joj mogli odrediti maksimalnu i prosječnu vrijednost) i slično iz nje funkciju s (da bismo mogli odrediti prijeđeni put).

Drugi opis smisla derivacije vezan je za tzv. problem tangente. Pritom, **tangenta** na neku krivulju (ovdje na graf funkcije) u danoj točki se definira kao pravac koji najbolje „prianja“ uz tu krivulju oko te točke (na uskom dijelu oko promatrane točke zanemariva je razlika između krivulje i tangente, tj. to je onaj pravac koji od svih pravaca koji prolaze tom točkom najbolje aproksimira krivulju u blizini te točke, vidi sliku 3.1). Uočimo da nije točno da je tangenta pravac koji krivulju siječe u samo jednoj točki, primjerice pravac $y = 1$ siječe, štoviše tangira, sinusoidu u beskonačno mnogo točaka. Primijetimo i da je svaki pravac sam sebi tangenta.

Ako je promatrana krivulja graf neke realne funkcije jedne varijable $y = f(x)$, ekvivalentno možemo reći i da je tangenta najbolja afina aproksimacija te funkcije u blizini (tzv. lokalna aproksimacija) neke točke c :² Ako je $x \approx c$ i $y = kx + l$ tangenta na graf $y = f(x)$ u točki c , onda je $f(x) \approx kx + l$. U tom smislu se derivacija $f'(c)$ funkcije f u točki c može opisati kao koeficijent smjera tangente na graf funkcije f povučene u točki s apscisom c . Ako je koeficijent smjera tangente

²Uočimo da ovdje izraz točka koristimo kako za geometrijski objekt, tj. točku u koordinatnom sustavu, tako i za apscisu točke, tj. element domene. To je uobičajeno u matematici jer apscisa točke grafa jednoznačno određuje tu točku i obrnuto.

određen za sve c iz nekog podskupa S domene od f , ponovno smo dobili funkciju f' (s domenom S) koju jednostavno zovemo derivacijom funkcije f .

Iz opisa derivacije kao koeficijenta smjera tangente slijedi da je **jednadžba tangente na graf funkcije** f u točki s apscisom c jednadžba pravca s koeficijentom smjera $f'(c)$ koji prolazi kroz točku $(c, f(c))$, tj.

$$y - f(c) = f'(c) \cdot (x - c).$$

Bitno je spomenuti da je ovakva interpretacija derivacije funkcije moguća samo ako su x i y interpretirane kao uobičajene pravokutne koordinate u ravnini, jer je pojam koeficijenta smjera pravca smislen samo za pravce u pravokutnom koordinatnom sustavu.

Iz opisa derivacije kao koeficijenta smjera tangente odmah zaključujemo i da je derivacija afine funkcije u bilo kojoj točki njezine prirodne domene jednaka koeficijentu smjera te afine funkcije:

$$(ax + b)' = a$$

za sve x . Primjerice, $(2 - 3x)' = -3$, a derivacija svake konstantne funkcije je nulfunkcija.

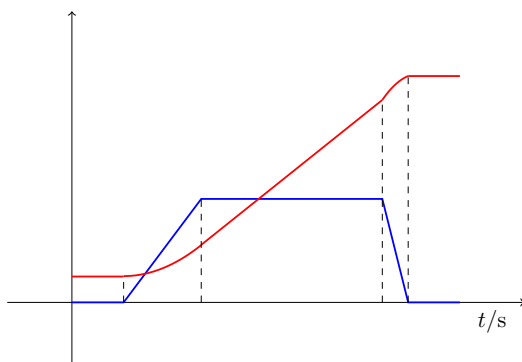
Zadatak 43 Skicirajte graf funkcije $f(x) = 5 - (x - 1)^2$ na milimetarskiom papiru s tangentama u točkama $x = -2, -1, 0, 1$ i 2 . Procijenite koeficijente smjerova tih pet tangenti pa u istom koordinatnom sustavu ucrtajte točke grafa derivacije f' s tim apscisama. Što naslućujete, koja vrsta funkcije je derivacija funkcije f ?

Budući da u ovom trenutku vjerujemo da su oba opisa korektna, dakle opisuju istu stvar, zaključujemo i da je u slučaju da je nezavisna varijabla vrijeme za pravocrtno gibanje brzina u svakom trenutku koeficijent smjera tangente na graf puta u ovisnosti o vremenu, a akceleracija u svakom trenutku koeficijent smjera tangente na graf brzine u ovisnosti o vremenu.

Zadatak 44 Ako znate da od dvije krivulje na slici 3.2 jedna prestavlja ovisnost udaljenosti točke koja se giba po pravcu o vremenu od neke fiksirane pozicije, a druga njenu brzinu, koja je koja? Argumentirajte!

Treći način opisa derivacije je više računski. Naime, derivacija funkcije f u točki c može se interpretirati i kao procjena relativne promjene iznosa funkcije, za male promjene iznosa nezavisne varijable (slika 3.1):

$$f'(c) \approx \frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \quad (\text{za } \Delta x \approx 0, \text{ tj. } x \approx c).$$



Slika 3.2: Ilustracija uz zadatak 44.

Napomena 4 Dok je za poznatu formulu funkcije $y = f(x)$ i poznat iznos Δx promjene nezavisne varijable x lako, lakše od deriviranja, izračunati točnu relativnu promjenu iznosa funkcije, ova treća interpretacija derivacija ima veliku važnost u termodinamici. Pritom derivacije funkcija često imaju samostalno značenje, primjerice reakcijski gradijenti se definiraju kao derivacije određenih termodinamičkih veličina po doseg u reakcije. No, mnoge termodinamičke veličine nisu mjerljive na tzv. apsolutnoj ljestvici, nego su mjerljive samo njihove relativne promjene. Stoga u takvim slučajevima umjesto da derivaciju koristimo za procjenu relativne promjene vrijednosti funkcije činimo obrnuto, temeljem relativnih promjena dolazimo do procjene vrijednosti derivacije razmatrane fizikalne veličine po njenoj nezavisnoj varijabli,

Vezano za treći opis derivacije lako je zapamtiti treću od oznaka za derivaciju funkcije, $\frac{df}{dt}(c)$, ali i uočiti kako odrediti mjernu jedinicu derivacije u fizikalnim kontekstima. Ako znamo mjerne jedinice nezavisne varijable t i zavisne varijable $y = f(t)$, vidljivo je da je mjerna jedinica derivacije od f jednaka kvocijentu mjernih jedinica zavisne i nezavisne varijable.

Primjer 50 Čak i da u primjeru 48 nismo znali mjernu jedinicu akceleracije, mogli smo ju dobiti temeljem posljednjeg komentara. Naime, u primjeru 49 smo uočili da je akceleracija derivacija brzine i brzina derivacija puta, oboje po vremenu. Budući da je mjerna jedinica za put m i za vrijeme s , vidimo da je mjerna jedinica brzine $\frac{m}{s}$, a mjerna jedinica akceleracije $\frac{\frac{m}{s}}{s} = \frac{m}{s^2}$.

Primjer 51 U kemijskoj kinetici se za reakcije u otopinama definira brzina reakcije kao

$$v = \frac{1}{\nu} \frac{dc}{dt},$$

gdje je $\nu < 0$ stehiometrijski koeficijent³ bilo kojeg sudionika reakcije i $c = c(t)$ njegova množinska koncentracija. Neovisno o tome razumijemo li smisao ove definicije i njegovu neovisnost o odabranom sudioniku reakcije, možemo zaključiti da je mjerna jedinica brzine reakcije čisti broj pomnožen s kvocijentom mjernih jedinica množinske koncentracije i vremena, dakle je mjerna jedinica za brzinu reakcije $\frac{\text{mol/L}}{\text{s}} = \text{mol L}^{-1} \text{s}^{-1}$ (ili neka druga mjerna jedinica iste fizikalne dimenzije, primjerice $\text{mmol cm}^{-3} \text{min}^{-1}$).

Zadatak 45 Odredite mjernu jedinicu derivacije veličine $\heartsuit$ po veličini $\diamondsuit$, ako je mjerna jedinica od $\heartsuit$ jednaka $\square \triangle *^{-1}$, a od $\diamondsuit$ je mjerna jedinica $\triangle *$ ²

Ako je za danu funkciju f moguće $f'(c)$ odrediti za svaki c iz njene domene temeljem bilo kojeg od tri gornja pristupa, f' će imati istu domenu kao f i kažemo: **f je derivabilna.**

Primjer 52 Ako je $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 4x - 3$, onda je $f' : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ konstantna funkcija $f'(x) = 4$ za sve x , dakle je f derivabilna funkcija.

Primjer 53 Niže u tablici derivacija imamo pravilo da je za $f(x) = \sin x$ derivacija dana s $f'(x) = \cos x$. To znači da za svaki konkretan broj c vrijedi $f'(c) = \cos c$, primjerice $f'(\pi) = \cos \pi = -1$.

Za rad s derivacijama nužna je **tablica derivacija**:

$f(t)$	$f'(t)$
C	0
t^n	$n t^{n-1}$
a^t	$a^t \ln a$
$\log_a t$	$\frac{1}{t \ln a}$
$\sin t$	$\cos t$
$\cos t$	$-\sin t$
$\text{tg } t$	$\frac{1}{\cos^2 t}$
$\text{ctg } t$	$-\frac{1}{\sin^2 t}$
$\arcsin t$	$\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$
$\arccos t$	$-\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$
$\text{arctg } t$	$\frac{1}{1+t^2}$
$\text{arcctg } t$	$-\frac{1}{1+t^2}$
$\text{sh } t$	$\text{ch } t$
$\text{ch } t$	$\text{sh } t$

³Stehiometrijski koeficijenti reaktanata uzimaju se s negativnim predznakom.

Primjer 54 Za sve smislene vrijednosti varijable x vrijedi:

$$t' = (t^1)' = 1 \cdot t^0 = 1; \quad \left(\frac{1}{x^3}\right)' = (x^{-3})' = -3x^{-2} = -\frac{3}{x^2};$$

$$(\sqrt[3]{u})' = \left(u^{\frac{1}{3}}\right)' = \frac{1}{3}u^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{3\sqrt[3]{u^2}}; \quad (t^{\sqrt{2}})' = \sqrt{2} t^{\sqrt{2}-1};$$

$$(e^x)' = e^x \ln e = e^x; \quad (\ln u)' = \frac{1}{u \ln e} = \frac{1}{u}.$$

Uočite da je u gornjem primjeru u svim osim u trećem slučaju derivacija definirana za iste nezavisne varijable kao i funkcija koju deriviramo, tj. pet od šest funkcija u tom primjeru su derivabilne. I stvarno, najčešće se pri deriviranju ne mijenja prirodna domena funkcije, odnosno najčešće f i f' imaju istu prirodnu domenu. Ipak, kako smo gore vidjeli, to ne vrijedi uvijek, jer primjerice derivacija trećeg korijena nije definirana u 0, dok treći korijen jest definiran u 0. Dakle, čak i elementarna funkcija ne mora biti derivabilna u svakoj točki svoje domene, o čemu ćemo više reći malo kasnije. No, domena derivirane funkcije nikad ne može biti veća od domene od f (jer nema smisla određivati $f'(c)$ ako c nije u domeni od f).

Najvažnije svojstvo deriviranja je **linearnost**. Linearnost deriviranja je zapravo spoj dva svojstva, aditivnosti i homogenosti. **Aditivnost deriviranja** znači da je derivacija zbroja funkcija zbroj njihovih derivacija:

$$(f(t) + g(t))' = f'(t) + g'(t).$$

Homogenost deriviranja je svojstvo da je derivacija umnoška konstante i funkcije jednaka produktu te konstante i derivacije funkcije:

$$(C f(t))' = C f'(t).$$

Uočimo da iz gornjih svojstava slijedi i da je derivacija razlike funkcija razlika njihovih derivacija:

$$\begin{aligned} (f(t) - g(t))' &= (f(t) + (-1) \cdot g(t))' = f'(t) + ((-1) \cdot g(t))' = \\ &= f'(t) + (-1) \cdot g'(t) = f'(t) - g'(t). \end{aligned}$$

Primjer 55 Za sve $x \in \mathbb{R}$ vrijedi

$$(x^5 - \pi \sin x + \sqrt{5})' = (x^5)' - \pi(\sin x)' + (\sqrt{5})' = 5x^4 - \pi \cos x.$$

Zadatak 46 Koristeći linearnost deriviranja izvedite formule za derivacije sinusa hiperbolnog i kosinusa hiperbolnog.

U primjeru 49 vidjeli smo da je za pravocrtno gibanje u svakom trenutku akceleracija derivacija brzine po vremenu, a brzina je derivacija puta po vremenu. Dakle, akceleracija je derivacija derivacije puta po vremenu. Općenito, deriviranjem funkcije prve derivacije dobivamo **drugu derivaciju** polazne funkcije, deriviranjem druge derivacije **treću derivaciju** i t.d. Ako je prva derivacija označana s $\dot{f}$, onda se druga derivacija označava s $\ddot{f}$. Tako u primjeru 49 možemo pisati $a(t) = \ddot{s}(t)$. Ako koristimo oznaku f' za prvu derivaciju, onda su oznake za drugu i treću derivaciju f'' i f''' , a daljnje derivacije (n -ta za $n > 3$) se u pravilu označavaju s $f^{(n)}$. Ako pak koristimo oznaku $\frac{df}{dt}$ za prvu derivaciju, oznaka za n -tu derivaciju ($n > 1$) je $\frac{d^n f}{dt^n}$, primjerice $\frac{d^2 y}{dx^2}$ je druga derivacija y po x .

Primjer 56 Neka je $f(x) = 3x^3 - 2x^5 - x$. Tada je (za sve x) $f'(x) = 9x^2 - 10x - 1$, $f''(x) = 18x - 10$, $f'''(x) = 18$, $f^{(4)}(x) = 0$ (nulfunkcija), $f^{(5)}(x) = 0$ i t.d.

Kao u gornjem primjeru, općenito iz linearnosti deriviranja slijedi:

Propozicija 2 Ako je p polinom stupnja n , onda je $p'(x)$ polinom stupnja $n - 1$, $p''(x)$ je polinom stupnja $n - 2$ i t.d.; $p^{(n)}$ je konstantna funkcija, a sve daljnje derivacije od p su nulfunkcije.

Očigledno je, po bilo kojem od tri dana opisa smisla derivacije, da je derivacija konstantne funkcije nulfunkcija. Postoji li još koja funkcija koja derivirana daje nulfunkciju? Intuicija kaže da ne, a to se za funkcije zadane na otvorenom intervalu može i dokazati:⁴

Propozicija 3 Ako je $f'(t) = 0$ za sve $t \in I$ gdje je I otvoren interval, onda je $f(t) = 0$ za sve $t \in I$.

Primjer 57 Iz primjera 49 znamo da je u motivacijskom primjeru 48 $a(t) = \ddot{v}(t) = \ddot{s}(t)$ za sve t između 0 i 30 s. Pritom znamo i da je $a(t)$ polinom drugog stupnja. Zbog svega navedenog zaključujemo: $v(t)$ mora biti polinom trećeg stupnja i $s(t)$ mora biti polinom četvrtog stupnja.

Jedna od najvažnijih primjena derivacija u prirodnim znanostima je njihovo korištenje za postavljanje i interpretiranje diferencijalnih jednadžbi te provjeru je li neka funkcija njihovo rješenje. Na realne funkcije jedne varijable odnose se **obične diferencijalne jednadžbe**, tj. jednadžbe koje opisuju nepoznatu funkciju preko veze između nje, njezine nezavisne varijable i njezinih derivacija. Budući da ćemo se u ovom udžbeniku baviti samo običnim diferencijalnim jednadžbama, često ćemo izostavljati naglasak „obične“. **Rješenje diferencijalne jednadžbe** je svaka funkcija koja uvrštavanjem u nju daje jednakost koja je istinita za sve vrijednosti nezavisne varijable. **Red diferencijalne jednadžbe** je red najviše derivacije nepoznate funkcije

⁴Za dokaz je potreban Lagrangeov teorem srednje vrijednosti, kojeg ćemo obraditi kasnije.

koja se u njoj pojavljuje. U primjenama su najčešće diferencijalne jednačbe prvog i drugog reda, tj. jednačbe u kojima se nepoznata funkcija pojavljuje jednom i(li) dvaput derivirana.

Primjer 58 Obična diferencijalna jednačba $y' = y$ je prvog reda i iskazuje da tražimo funkciju koja se deriviranjem ne promijeni. Uvrstimo li $y = C \exp(t)$ u nju, vidimo da je za svaki t

$$y' = (C \exp(t))' = C \exp(t) = y,$$

dakle je $C \exp(t)$ jedno rješenje jednačbe $y' = y$.

Rješavanjem diferencijalnih jednačbi bavit ćemo se u poglavlju ??, no već u ovom poglavlju naučit ćemo derivirati sve realne funkcije jedne varijable, dakle ćemo naučiti provjeriti je li neka funkcija rješenje obične diferencijalne jednačbe. U primijenjenom kontekstu diferencijalne jednačbe najčešće dobivamo povezivanjem osnovne funkcije (puta, koncentracije, profita, ...) s brzinom njezine promjene (prvom derivacijom) i eventualno njenom akceleracijom (drugom derivacijom) koristeći fizikalne zakone.

Primjer 59 Promatramo li titranje objekta mase m na vertikalno visećoj opruzi s koeficijentom elastičnosti k , u svakom trenutku možemo bilježiti vertikalni odmak z tijela od ravnotežnog položaja $z = 0$ (recimo, pozitivni z znači pomak nadolje, a negativni nagore). Prema drugom Newtonovom zakonu,⁵ je $ma(t) = -kz(t)$, tj. $m\ddot{z} = -kz$. Time smo dobili običnu diferencijalnu jednačbu drugog reda koja opisuje ovisnost pozicije z o vremenu.

Primjerom 57 kao i spomenom običnih diferencijalnih jednačbi, zašli smo u problem antideriviranja, tj. nalaženja funkcije f ako joj znamo derivaciju $F = f'$.

Definicija 10 (Antiderivacija (primitivna funkcija)) Antiderivacija (primitivna funkcija) zadane funkcije $F : I \rightarrow \mathbb{R}$ (gdje je I otvoren interval) je svaka funkcija $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ sa svojstvom $f'(t) = F(t)$ za sve $t \in I$.

Primjer 60 U primjeru 57 možemo reći da je brzina antiderivacija akceleracije, a put antiderivacija brzine, odnosno da su primjerom 48 zadane obične diferencijalne jednačbe prvog i drugog reda $\dot{v} = -0,330 \frac{\text{m}}{\text{s}^4} t^2 + 6,00 \frac{\text{m}}{\text{s}^3} t$ i $\ddot{s} = -0,330 \frac{\text{m}}{\text{s}^4} t^2 + 6,00 \frac{\text{m}}{\text{s}^3} t$.

Primjer 61 Jednačba $\dot{y} = \cos t$ je obična diferencijalna jednačba prvog reda koja zahtijeva nalaženje funkcije y koja derivirana daje $\cos t$. Jedna takva funkcija je, kako vidimo iz tablice derivacija, $y = \sin t$.

⁵U svom nerelativističkom obliku, drugi Newtonov zakon za pravocrtno gibanje kaže da je u svakom trenutku ukupna sila koja djeluje na objekt mase m koji se giba jednaka $ma = m\ddot{v} = m\ddot{s}$.

Primjer 62 Funkcija $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ zadana s $F(x) = 3x^2$ kao antiderivaciju ima npr. $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^3$. No, uočimo da su primjerice i $f_2(x) = x^3 - 10$ i $f_3(x) = x^3 + \pi$ također antiderivacije od F .

Kao i u prethodnom primjeru, tako i općenito vrijedi: Antiderivacija, ako postoji, nikad nije jedinstvena. To je lako dokazati. Naime, ako je f antiderivacija od F , tj. $f'(t) = F(t)$ za sve $t \in I$, označimo s f_C funkciju definiranu s $f_C(t) = f(t) + C$. Zbog aditivnosti deriviranja za sve konstante $C \in \mathbb{R}$ (njih beskonačno mnogo!) vrijedi

$$(f_C)'(t) = (f(t) + C)' = f'(t) + C' = F(t)$$

za sve $t \in I$, dakle je i f_C antiderivacija od F . Nadalje, nema drugačijih antiderivacija od F od onih oblika f_C . Naime, ako bi g bila neka druga antiderivacija od F osim f , znamo $f' = g' = F$ i f, g i F su definirane na istom intervalu I . Pogledajmo funkciju $g - f$. Njena derivacija za $t \in I$ je dana s $(g - f)'(t) = g'(t) - f'(t) = F(t) - F(t) = 0$. Prema propoziciji 3 zaključujemo da je $g - f$ konstantna funkcija na I , tj. da je $(g - f)(t) = C$ za sve $t \in I$, odnosno $g(t) = f(t) + C = f_C(t)$ za sve $t \in I$. Time smo dokazali sljedeći teorem:

Teorem 2 Ako funkcija $F : I \rightarrow \mathbb{R}$ ima antiderivaciju, onda ih ima beskonačno mnogo. Ako je f jedna antiderivacija od F , onda su sve antiderivacije od F dane formulom $f_C(t) = f(t) + C$, gdje je $C \in \mathbb{R}$ proizvoljna konstanta.

Ovdje je bitno upozoriti na važnost jednog detalja iz definicije antiderivacije. U definiciji se zahtijeva da su funkcija i njena antiderivacija zadane na istom, jednom, otvorenom intervalu I .

Primjer 63 Uzmimo funkciju $F(x) = \frac{1}{x}$. Lako je pogoditi da su njene antiderivacije oblika $f_C(x) = \ln x + C$. No, $\ln$ je definiran na $I = \langle 0, +\infty \rangle$, a F za prirodnu domenu ima $\langle -\infty, 0 \rangle \cup \langle 0, +\infty \rangle$ — izgleda kao da smo pri antideriviranju „izgubili” pola domene. Da smo F gledali kao funkciju zadanu na I , onda bi f_C stvarno bile sve njene antiderivacije. No, budući da je F zadana na uniji dva disjunktne intervala, ona na svakom od njih ima drugačiju formulu antiderivacije. Na $I' = \langle -\infty, 0 \rangle$ jedna antiderivacija od F bila bi zadana formulom $g(x) = \ln(-x)$ jer je, kako ćemo lako provjeriti nakon što uvedemo lančano pravilo u odjeljku 3.2.1, $g'(x) = -\frac{1}{-x} = \frac{1}{x}$ za $x \in I'$. Dakle, možemo definirati da su antiderivacije od F (na njezinoj prirodnoj domeni) dane s

$$f_C(x) = \begin{cases} C + \ln x, & x > 0 \\ C + \ln(-x), & x < 0 \end{cases}$$

ili kraće zapisano, antiderivacije su dane s

$$f_C(x) = C + \ln|x|, \quad x \in I' \cup I = \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Antideriviranje je neposredno vezano za pojam neodređenog integrala.

Definicija 11 (Neodređeni integral) Neodređeni integral funkcije F je skup svih njenih antiderivacija. Oznaka neodređenog integrala funkcije F , ako joj je nezavisna varijabla označena s t , je

$$\int F(t) dt.$$

Funkcija F zove se *podintegralna funkcija*.

Temeljem gornjeg teorema i definicije, trebali bismo pisati: $\int F(t) dt = \{f_C : C \in \mathbb{R}\}$. Iz praktičnih razloga uobičajen je jednostavniji zapis:

$$\int F(t) dt = f(t) + C.$$

Neodređenu konstantu C nazivamo **konstantom integracije**. Za integral jedinične funkcije uobičajeno je umjesto $\int 1 dt$ pisati $\int dt$. Budući da je jedinična funkcija derivacija identitete, prema gornjem teoremu zaključujemo da je $\int dt = t + C$. Za slučajeve da je podintegralna funkcija oblika $F(t) = \frac{1}{g(t)}$ uobičajeno je pisati $\int \frac{dt}{g(t)}$ umjesto $\int \frac{1}{g(t)} dt$.

Primjer 64 Pišemo npr.

$$\int 3x^2 dx = x^3 + C,$$

$$\int \frac{dt}{t} = \ln |t| + C.$$

Tablicu neodređenih integrala sad možemo shvatiti kao tablicu derivacija sa zamijenjenim stupcima, uz dodavanje konstante integracije:

$F(t)$	$\int F(t) dt$
K	$Kt + C$
$t^\alpha, \alpha \neq -1$	$\frac{t^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$
$\frac{1}{t}$	$\ln t + C$
a^t	$\frac{a^t}{\ln a} + C$
$\sin t$	$-\cos t + C$
$\cos t$	$\sin t + C$
$\frac{1}{1+t^2}$	$\arctg t + C$
$\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$	$\arcsin t + C$

Sjetimo li se da je deriviranje imalo svojstvo linearnosti i uzeši u obzir da je neodređeni integral definiran preko antiderivacije, lako se vidi da vrijedi i **linearnost**

neodređenog integrala: Neka su funkcije F i G zadane na istom intervalu te K neka konstanta. Tada vrijedi:

$$\int (F(t) + G(t)) \, dt = \int F(t) \, dt + \int G(t) \, dt$$

(aditivnost integriranja) i

$$\int K F(t) \, dt = K \int F(t) \, dt$$

(homogenost integriranja). Pod **tabličnim integriranjem** podrazumijeva se integriranje temeljem osnovne tablice integrala uz korištenje svojstva linearnosti i, po potrebi, transformacija podintegralne funkcije formulama iz elementarnije matematike.

Primjer 65 Izračunajmo $\int \cos^2\left(\frac{x}{2}\right) \, dx$. Znamo da je $\cos^2 a = \frac{1+\cos(2a)}{2}$ pa imamo

$$\begin{aligned} \int \cos^2 \frac{x}{2} \, dx &= \int \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos x \right) \, dx = \\ &= \frac{1}{2} \int dx + \frac{1}{2} \int \cos x \, dx = \frac{x}{2} + \frac{\sin x}{2} + C. \end{aligned}$$

Uočimo da iako smo tu zbrojili dva neodređena integrala, na kraju smo napisali samo jednu konstantu integracije C umjesto $C_1 + C_2$. To je naravno zato što je zbroj (i razlika, produkt, kvocijent, ...) konstanti konstanta.

Primijetimo da su prema opisanom u određenom smislu deriviranje i integriranje međusobno inverzne operacije. Preciznije, vrijedi

$$\left(\int F(t) \, dt \right)' = F(t), \quad \int f'(t) \, dt = f(t) + C.$$

Uz oznaku $\frac{d}{dt}$ gornje formule poprimaju još lakše pamtljive oblike

$$\frac{d}{dt} \left(\int F(t) \, dt \right) = F(t), \quad \int \frac{df}{dt} \, dt = f(t) + C.$$

Uočimo da iz svega navedenog slijedi da ako znamo integrirati, onda znamo riješiti obične diferencijalne jednadžbe koje su oblika $y' = F(x)$ ili $y'' = F(x)$, tj. diferencijalne jednadžbe u kojima je poznata eksplicitna formula prve ili druge derivacije nepoznate funkcije: Ako je $y' = F(x)$, onda je $y = \int F(x) \, dx$, a ako je $y'' = F(x)$, onda je $y' = \int F(x) \, dx$ pa je $y = \int (\int F(x) \, dx) \, dx$.

Primjer 66 Zadana je diferencijalna jednadžba $y'' = x + \exp(x)$. Tada je $y' = \int (x + \exp(x)) \, dx = \frac{x^2}{2} + \exp(x) + C_1$ pa je $y'' = \int \left(\frac{x^2}{2} + \exp(x) + C_1 \right) \, dx = \frac{x^3}{6} + \exp(x) + C_1 x + C_2$.

U prethodnom primjeru uočimo da smo pri drugom integriranju drugačije označili konstantu integracije. To je zato što bi korištenje iste oznake značilo da — krivo! — tvrdimo da je ta konstanta ista u oba integriranja. Budući da je osnovna tehnika u pozadini rješavanja običnih diferencijalnih jednadžbi integriranje, ovaj primjer ukazuje na to da se kod rješavanja običnih diferencijalnih jednadžbi prvog reda pojavljuje jedna, a kod onih drugog reda dvije neodređene konstante. To dovodi do definicije **općeg rješenja diferencijalne jednadžbe**: Opće rješenje diferencijalne jednadžbe je ono njeno rješenje koje sadrži onoliko neodređenih konstanti koliki je njezin red. Primjerice, $y = C \exp(x)$ je opće rješenje jednadžbe $y' = y$.

Primjer 67 Iz primjera 57 znamo da je

$$v(t) = \int a(t) dt = \int \left(-0,300 \frac{\text{m}}{\text{s}^4} t^2 + 6,00 \frac{\text{m}}{\text{s}^3} t\right) dt = -0,300 \frac{\text{m}}{\text{s}^4} \cdot \frac{t^3}{3} + 6,00 \frac{\text{m}}{\text{s}^3} \cdot \frac{t^2}{2} + C_v,$$

dakle je $v(t) = -0,100 \frac{\text{m}}{\text{s}^4} t^3 + 3,00 \frac{\text{m}}{\text{s}^3} t^2 + C_v$. Iz toga se dobije da je $s(t) = \int v(t) dt = -0,025 \frac{\text{m}}{\text{s}^4} t^4 + 1,00 \frac{\text{m}}{\text{s}^3} t^3 + C_v t + C_s$. Uočimo da je $v(0) = C_v$, dakle je C_v početna brzina 35 m/s rakete:

$$v(t) = -0,100 \frac{\text{m}}{\text{s}^4} t^3 + 3,00 \frac{\text{m}}{\text{s}^3} t^2 + 35 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Takoder, na početku lansiranja raketa još nije prešla nikakav put, dakle je $0 = s(0) = C_s$, odnosno

$$s(t) = -0,025 \frac{\text{m}}{\text{s}^4} t^4 + 1,00 \frac{\text{m}}{\text{s}^3} t^3 + 35 \frac{\text{m}}{\text{s}} t.$$

Dok u ovom trenu još ne znamo odgovoriti na pitanja o brzini postavljena u primjeru 48 (iako bi smo znanjem o grafovima polinoma i transformacijam grafova lako skicirali oblik grafa brzine u ovisnosti o vremenu — skicirajte ga! — i lako se uvjerili da stvarno postiže traženi maksimum), sad možemo odgovoriti na pitanje o putu: U 30 s raketa je prešla put $s(30 \text{ s}) = 7800 \text{ m}$.

U gornjem primjeru vidimo i da je fizikalna dimenzija integrala $\int F(t) dt$ jednaka „umnošku“ fizikalnih dimenzija zavisne i nezavisne varijable ($F(t)$ i t), odnosno mjerna jedinica od $\int F(t) dt$ je umnožak mjernih jedinica od t i $F(t)$.

Fizikalno interpretirano, postoji beskonačno mnogo funkcija pozicije u ovisnosti o vremenu ako nam je jedini poznati podatak o gibanju ovisnost brzine o vremenu — to je razlog zašto se u takvim fizikalnim primjenama obično zadaje i početni uvjet koji omogućuje odabir točno jedne od svih antiderivacija.

Primjer 68 Ako je brzina čestice pri slobodnom padu dana s $v(t) = -gt$, onda se lako vidi da je pozicija opisana sa $z(t) = -\frac{g}{2} t^2 + C$ za neku konstantu C (čija fizikalna dimenzija je duljina). Ako znamo početni uvjet da je u trenutku $t = 0$ pozicija bila $z(0) = h$, onda mora vrijediti $z(0) = 0 + C = C = h$. Stoga je antiderivacija (funkcija pozicije u ovisnosti o vremenu) koja zadovoljava taj početni uvjet jedinstveno određena sa $z(t) = h - \frac{g}{2} t^2$.

Kao u prethodnom primjeru, diferencijalne jednačbe se u pravilu, osobito u primjenama, pojavljuju s **početnim uvjetima**. Za diferencijalne jednačbe prvog reda početni uvjet je vrijednost nepoznate funkcije u jednoj točki domene, obično u 0. Za diferencijalne jednačbe drugog reda početni uvjeti su vrijednost nepoznate funkcije i njezine prve derivacije u istoj točki domene, obično u 0.

Primjer 69 U primjeru 59 bilo bi prirodno zadati početnu poziciju, primjerice $z(0) = 0$, te početnu brzinu $\dot{z}(0) = v_0$. Te dvije jednakosti bi onda bile početni uvjeti za diferencijalnu jednačbu $m\ddot{z} = -kz$ tj. $\ddot{z} + \frac{k}{m}z = 0$. Jednostavnosti radi, uzmimo ovdje da je $\frac{k}{m} = 1\text{ s}^{-2}$ i $x = \frac{t}{s}$, odnosno diferencijalnu jednačbu gledamo u „bezdimenzijskom“ obliku $z'' + z = 0$. Nije teško provjeriti da je onda sa $z(t) = C_1 \cos x + C_2 \sin x$ dano njeno opće rješenje:

$$z' = -C_1 \sin x + C_2 \cos x \Rightarrow \ddot{z} = -C_1 \cos x - C_2 \sin x,$$

$$z'' + z = -C_1 \cos x - C_2 \sin x + C_1 \cos x + C_2 \sin x = 0.$$

Pritom, znamo i da je $0 = z(0) = C_1 \cos 0 + C_2 \sin 0 = C_1$, dakle je $z(t) = C_2 \sin x$. Dalje je $v_0 = z'(0) = C_2 \cos 0 = C_2$, dakle je do na mjerne jedinice $C_2 = v_0$. Uključimo li opet fizikalnu dimenziju u rješenje, vidimo da je rješenje problema iz primjera 59 uz navedene početne uvjete i pretpostavku $\frac{k}{m} = 1\text{ s}^{-2}$ dano s

$$z(t) = v_0 s \sin\left(\frac{t}{s}\right).$$

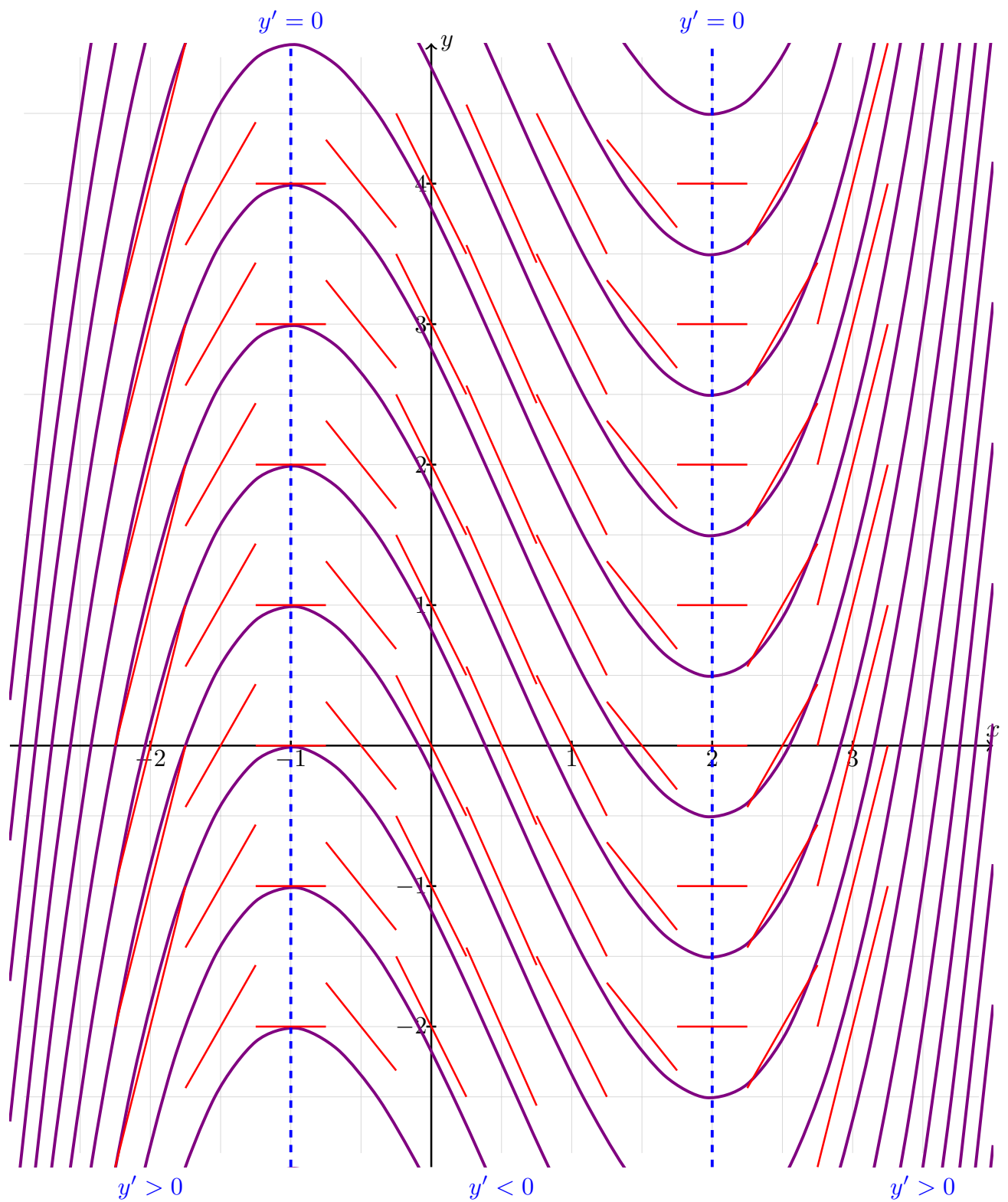
Kao u gornjem primjeru, tako i općenito: Početni uvjeti služe za određivanje **partikularnog rješenja** diferencijalne jednačbe, tj. izno: Partikularno rješenje diferencijalne jednačbe je svako njezino rješenje koje se dobije iz općeg rješenja za konkretne vrijednosti konstanti u njemu.

Razliku općeg i partikularnog rješenja diferencijalne jednačbe možemo opisati i geometrijski: Opće rješenje predstavlja familiju tzv. integralnih krivulja u koordinatnoj ravnini koje zadovoljavaju diferencijalnu jednačbu, a partikularno rješenje je jedna od tih krivulja.

Primjer 70 Integralne krivulje diferencijalne jednačbe $y''' = 0$ su sve kvadratne funkcije, tj. parabole u ravnini kojima je os simetrije vertikalna. Da je bio zadan početni uvjet $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$, $y''(0) = 2$ dobili bismo partikularno rješenje, parabolu $y = x^2 + 1$.

Za obične diferencijalne jednačbe 1. reda moguće je naslutiti oblik njihovih integralnih krivulja gledajući u kojim točkama (x, y) s postižu razne konkretne vrijednosti y' .

Primjer 71 Opišimo i skicirajmo familiju integralnih krivulja diferencijalne jednačbe $y' = x^2 - x - 2$.



Slika 3.3: Integralne krivulje diferencijalne jednačbe $y' = x^2 - x - 2$.

Prvo uočimo da je $y' = 0$ za $x = -1$ i $x = 2$, dakle sve integralne krivulje u svojim točkama s apscisama -1 i 2 imaju horizontalne tangente. Nadalje, $y' < 0$ za $-1 < x < 2$, dakle sve integralne krivulje imaju padajuće tangente na intervalu $\langle -1, 2 \rangle$, a rastuće inače. Štoviše, $F(x) = x^2 - x - 2$ pada za $x < \frac{1}{2}$, a raste za $x > \frac{1}{2}$, dakle imamo:

- Za $x < -1$ tangente pa stoga i integralne krivulje rastu, ali sve sporije slijeva udesno;
- za $-1 < x < \frac{1}{2}$ tangente pa stoga i integralne krivulje padaju, ali sve strmije;
- za $-\frac{1}{2} < x < 2$ tangente pa stoga i integralne krivulje padaju, ali sve blaže;
- za $x > 2$ tangente pa stoga i integralne krivulje rastu i to sve strmije što je veći x .

Posebno, na slici 3.3 crveno su ucrtane tangente integralnih krivulja u nekim točkama (x_0, y_0) : Ako odaberemo točku (x_0, y_0) u koordinatnoj ravnini i ako je diferencijalnu jednadžbu moguće zapisati u obliku $y' =$ „neki izraz $\mathcal{I}$ s x i y “, onda je u točki (x_0, y_0) koeficijent smjera tangente integralne krivulje jednak vrijednosti izraza $\mathcal{I}$ kad u njega uvrstimo (x_0, y_0) . Primjerice, iz naše jednadžbe vidimo da je u točkama s apscisom 0 , dakle u točkama na y -osi, koeficijent smjera tangente jednak $0^2 - 0 - 2 = -2$.

Naravno, ovu konkretnu diferencijalnu jednadžbu znamo riješiti jer je oblika $y' = F(x)$:

$$y = \int (x^2 - x - 2) \, dx = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - 2x + C,$$

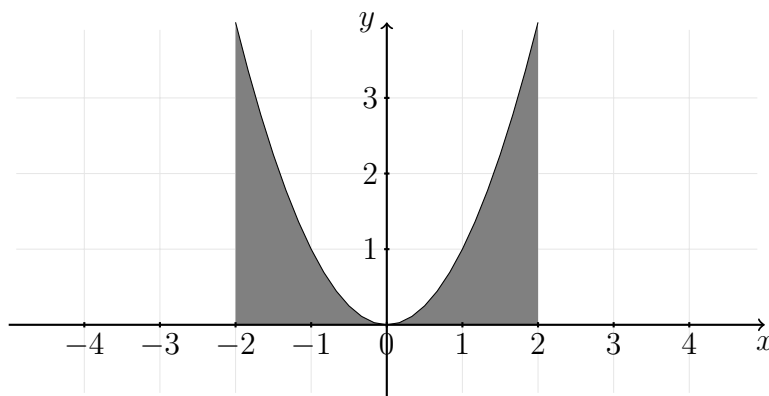
tj. integralne krivulje (ljubičasto na slici 3.3) stvarno zadovoljavaju opisana svojstva.

Osim neodređenih integrala, za primjene su izuzetno bitni i određeni integrali. Dok je definicija neodređenog integrala koju smo dali potpuno precizna, definicija određenog integrala će zasad, kao i definicija derivacije, zapravo biti opis njegova smisla, a pravu definiciju dat ćemo kasnije, u odjeljku 3.4.3. Pritom ćemo ovdje imati samo jednu varijantu opisa, a ta je koristeći graf realne funkcije jedne varijable prikazan u Kartezijevom koordinatnom sustavu. Kao što derivacija rješava problem tangente, tako određeni integral rješava problem površine.

Primjer 72 Kolika je površina omeđena parabolom $y = x^2$ i pravcima $y = 0$, $x = -2$ i $x = 2$ (slika 3.4)?

Određeni integral nenegativne po dijelovima neprekidne⁶ realne funkcije jedne varijable F po području integriranja $[a, b]$ (odnosno, integral od F u granicama od

⁶Definiciju po dijelovima neprekidne funkcije dat ćemo u odjeljku 3.4.2, ali zasad je dovoljno znati da su sve elementarne funkcije i sve po dijelovima zadane funkcije gledane na segmentu koji je podskup njihove prirodne domene po dijelovima neprekidne.



Slika 3.4: Problem površine.

a do b), u oznaci

$$\int_a^b F(t) dt,$$

po iznosu je jednak površini koju omeđuju graf funkcije, os apscisa i vertikalni pravci $x = a$ i $x = b$ (a po fizikalnoj dimenziji jednak je umnošku fizikalnih dimenzija nezavisne i zavisne varijable). Za po dijelovima neprekidne funkcije koje su na području integriranja dijelom negativne, dijelovi navedene površine koji su ispod osi apscisa pribrajaju se s negativnim predznakom.

Primjer 73 *Koliko iznosi*

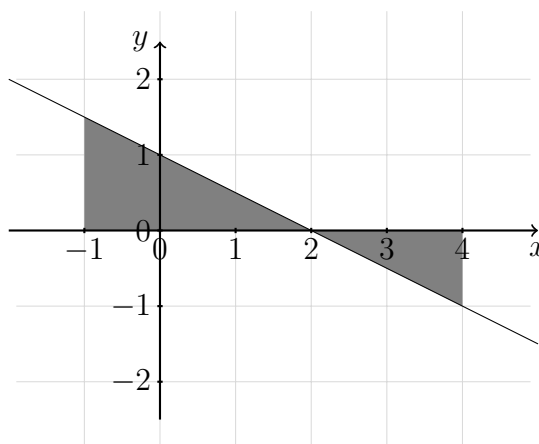
$$\int_{-1}^4 \left(1 - \frac{x}{2}\right) dx?$$

Taj integral predstavlja površinu koju s x -osi zatvara graf afine funkcije $F(x) = 1 - \frac{x}{2}$, omeđenu vertikalama $x = -1$ i $x = 4$. Za $-1 \leq x \leq 2$ funkcija F je dijelom nenegativna (za $-1 \leq x \leq 2$), vidi sliku 3.5, a dijelom negativna (za $2 < x \leq 4$). Stoga je $\int_{-1}^4 F(x) dx$ ovdje jednak razlici površina dvaju pravokutnih trokuta:

$$\int_{-1}^4 \left(1 - \frac{x}{2}\right) dx = \frac{3 \cdot \frac{3}{2}}{2} - \frac{2 \cdot 1}{2} = \frac{9}{4} - 1 = \frac{5}{4}.$$

Zadatak 47 *Izračunajte $\int_{-2}^1 (3x - |2x - 1|) dx$.*

Uočimo ovdje da, da smo u primjeru 73 trebali odrediti površinu omeđenu grafom od F , osi apscisa i vertikalama $x = -1$ i $x = 4$, odgovor bi bio $\frac{9}{4} + 1 = \frac{13}{4}$: Samo za nenegativne funkcije $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ je $\int_a^b F(x) dx$ jednak površini omeđenoj



Slika 3.5: Dijelovi površine ispod osi apscisa pribrajaju se s negativnim predznakom.

na opisani način. Ako pak stvarno trebamo površinu omeđenu s grafom od F , vertikalama $x = a$ i $x = b$ i osi apscisa, trebamo izračunati $\int_a^b |F(x)| dx$.

Zbog veze s površinom i činjenice da dužine imaju površinu nula, zaključujemo da za svaku funkciju F vrijedi

$$\int_a^a F(x) dx = 0.$$

Također, za svaku po dijelovima neprekidnu (zapravo, za svaku integrabilnu) $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ i svaki $c \in \langle a, b \rangle$ vrijedi

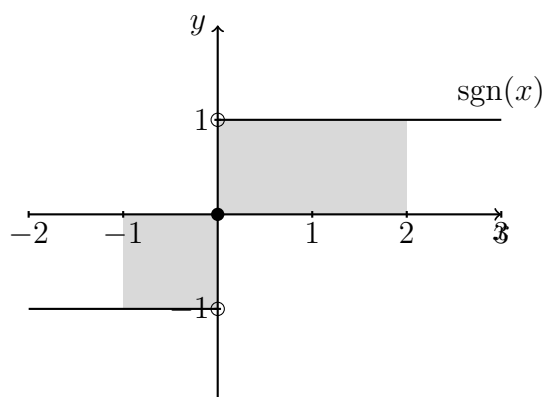
$$\int_a^b F(x) dx = \int_a^c F(x) dx + \int_c^b F(x) dx, \quad (3.1)$$

jer površinu iz opisa $\int_a^b F(x) dx$ možemo razbiti na dva dijela vertikalom $x = c$.

Primjer 74 Funkcija signum, oznaka sgn , je po dijelovima definirana funkcija koja ima iznos 1 za pozitivne iznose nezavisne varijable, -1 za negativne, a u 0 iznosi 0. Njen graf možete vidjeti na slici 3.6, a iz njega lako zaključujemo (rastavljanjem površine vertikalom $x = 0$) da je

$$\int_{-1}^2 \operatorname{sgn} x dx = \int_{-1}^0 \operatorname{sgn} x dx + \int_0^2 \operatorname{sgn} x dx = -1 + 2 = 1.$$

Zadatak 48 Izračunajte određeni integral od $F(x) = \operatorname{sgn}(1 - x)$ u granicama od 0 od 3.



Slika 3.6: Ilustracija uz primjer 74.

Zadatak 49 *Izračunajte*

$$\int_{-2}^3 F(x) dx$$

ako je

$$F(x) = \begin{cases} 3 - 2x & x < 0, \\ x + 1, & 0 \leq x \leq 1, \\ 1, & x > 1. \end{cases}$$

Ne sasvim očito, ali izvedivo iz prave definicije, vrijedi i:

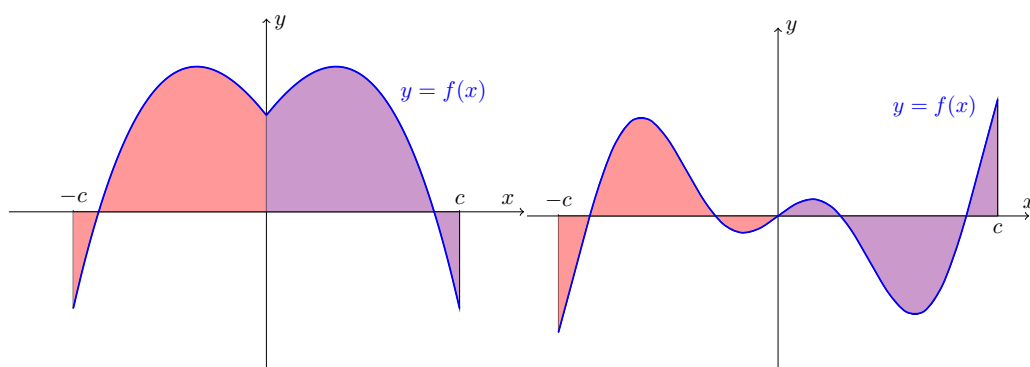
$$\int_a^b F(x) dx = - \int_b^a F(x) dx$$

(zamjena granica integrala mijenja predznak određenog integrala). Nadalje, iz svojstava grafova parnih i neparnih funkcija, vidi se da vrijedi:

Propozicija 4 *Ako je $F : [-c, c] \rightarrow \mathbb{R}$ po dijelovima neprekidna, onda ako je F parna, $\int_{-c}^c F(t) dt = 2 \int_0^c F(t) dt$, a ako je F neparna, $\int_{-c}^c F(t) dt = 0$.*Dokaz propozicije nije težak,⁷ no umjesto formalnog dokaza, na slikama 3.7 dajemo vizualni argument.**Primjer 75**

$$\int_{-5}^5 t \exp(-t^2) dt = 0, \quad \int_{-\pi}^{\pi} \cos t dt = 2 \int_0^{\pi} \cos t dt.$$

⁷Integral se rastavi na integrale od $-c$ do 0 i 0 do c i u lijevom zamijeni t s $-t$ te naravno koriste definicije parne i neparne funkcije.



Slika 3.7: Za parnu F je $\int_{-c}^c F(t) dt = 2 \int_0^c F(t) dt$, a za neparnu $\int_{-c}^c F(t) dt = 0$.

Dok za afine funkcije i njihove kompozicije, zbrojeve i razlike s apsolutnom vrijednosti i(li) funkcijom signum možemo na način iz gornjih primjera uvijek izračunati određeni integral po bilo kojem segmentu, to nije izvedivo za ostale funkcije. Općenito se za izračunavanje određenih integrala koristi **Newton-Leibnizova formula**. Ona vrijedi (ne samo) za *elementarne* funkcije $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ i glasi

$$\int_a^b F(t) dt = f(b) - f(a),$$

gdje je f bilo koja antiderivacija funkcije F . Desna strana Newton-Leibnizove formule obično su bilježi kao $f(t)\big|_{t=a}^b$ ili kraće $f(t)\big|_a^b$. Ako je funkcija F zadana po dijelovima, prije korištenja Newton-Leibnizove formule na pojedinim dijelovima domene, rastavljemo integrala koristeći formulu 3.1.

Primjer 76 Izračunajmo $\int_1^2 \frac{dt}{t}$:

$$\int_1^2 \frac{dt}{t} = \int_1^2 t^{-1} dx = (\ln |t|)\big|_1^2 = \ln 2 - \ln 1 = \ln 2.$$

Primjer 77 Za

$$F(x) = \begin{cases} \exp(x), & x > 0 \\ x^2, & -1 < x \leq 0 \\ x + 2, & x \leq -1 \end{cases}.$$

je prvo

$$\int_{-2}^2 F(x) dx = \int_{-2}^{-1} F(x) dx + \int_{-1}^0 F(x) dx + \int_0^2 F(x) dx,$$

jer se u -1 i 0 mijenja pravilo pa je to potencijalna točka prekida. Dalje imamo

$$\int_{-2}^{-1} F(x) dx = \int_{-2}^{-1} (x + 2) dx = \left(\frac{x^2}{2} + 2x \right) \bigg|_{-2}^{-1} = \frac{1}{2},$$

$$\int_{-1}^0 F(x) dx = \int_{-1}^0 x^2 dx = \left. \frac{x^3}{3} \right|_{-1}^0 = \frac{1}{3},$$

$$\int_0^2 F(x) dx = \int_0^2 e^x dx = \left. e^x \right|_0^2 = e^2 - 1,$$

pa je

$$\int_{-2}^2 F(x) dx = e - \frac{1}{6}.$$

Posljedica Newton-Leibnizove formule je da su i određeni integrali (po dijelovima neprekidnih) funkcija linearni:

$$\int_a^b (F(t) + G(t)) dt = \int_a^b F(t) dt + \int_a^b G(t) dt,$$

$$\int_a^b K F(t) dt = K \int_a^b F(t) dt.$$

Rješenja običnih diferencijalnih jednadžbi podjednako su povezana s određenim kao i s neodređenim integralom. Zapravo, ne radi se o dvije vrste integrala, nego o dva pojavna oblika jednog (Riemannovog) integrala. Naime, Newton-Leibnizova ne zahtijeva da su granice integriranja a i b konstante. Ako gornju granicu b proglasimo varijabilnom i označimo s, primjerice, x , ona poprima oblik

$$\int_a^x F(t) dt = f(x) - f(a),$$

gdje je f jedna antiderivacija od F . Gornju jednakost možemo zapisati i u obliku

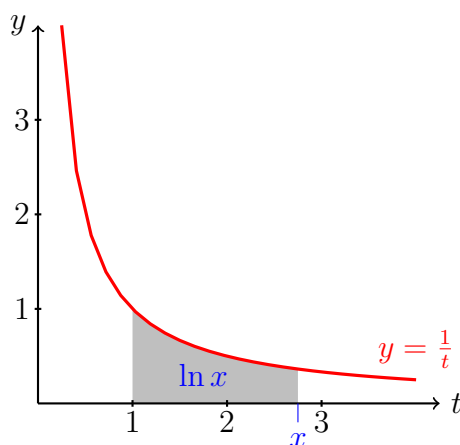
$$f(x) = f(a) + \int_a^x F(t) dt,$$

iz čega vidimo da ne samo da se određeni integral (neprekidne) funkcije može izračunati pomoću neodređenog, tj. antiderivacije, nego i obrnuto, antiderivacija i stoga i neodređeni integral (neprekidne) funkcije se može izračunati iz određenog.

Primjer 78 U primjeru 76 zamijenimo gornju granicu 2 varijabilnom granicom x :

$$\int_1^x \frac{dt}{t} = (\ln |t|) \Big|_1^x = \ln |x| - \ln 1 = \ln |x|.$$

Ako je $x > 0$ vidimo da je $\ln x = \int_1^x \frac{dt}{t}$, tj. prirodni logaritam se može definirati koristeći graf racionalne funkcije $F(t) = \frac{1}{t}$ (za $x > 1$ vidi sliku 3.8; za $x < 1$ imamo da je $\ln x = \int_1^x \frac{dt}{t} = - \int_x^1 \frac{dt}{t}$), tj. $\ln x$ je jednak suprotnom iznosu površine omeđene s grafom $y = \frac{1}{t}$, osi apscisa i vertikalama $t = x$ i $t = 1$). Naravno, $\ln 1 = \int_1^1 \frac{dt}{t} = 0$.



Slika 3.8: Definicija prirodnog logaritma pomoću površine (za $t > 1$ je $\ln t$ jednak površini omeđenoj s osi apscisa, krivuljom $y = \frac{1}{x}$ i vertikalama $x = 1$ i $x = t$).

Iz navedene veze neodređenog s određenim integralom slijedi i da diferencijalne jednačbe oblika $y' = F(t)$ možemo rješavati i pomoću određenog integrala: Rješenje im je $y = f(t) = f(a) + \int_a^t F(\tau) d\tau$, gdje je a jedan element domene funkcije $y = f(t)$, tj. $f(a)$ je u pravilu poznat iz početnog uvjeta (zato je u primjenama najčešće $a = 0$).

Općenito, je Y neka veličina ovisna o vremenu t (pozicija točke na pravcu, koncentracija nekog reaktanta, jakost struje,⁸...). Ako je poznata ovisnost $V(t) = \dot{Y}(t)$ brzine promjene veličine Y u vremenu, onda je

$$Y(t) = \int V(t) dt.$$

Konstanta integriranja se može odrediti ako je zadan početni uvjet oblika $Y(a) = Y_0$ (primjerice, početna pozicija, početna koncentracija, naboj u početnom trenutku, ...), kao u primjeru 69. Alternativno, ako je V elementarna ili općenitije neprekidna (a u pravilu jest) imamo

$$Y(t) = Y(a) + \int_a^t V(\tau) d\tau.$$

Primjer 79 Ako objekt mase m slobodno pada s pozicije 0, dakle je $s(0) = v(0) = 0$, po drugom Newtonovom zakonu je $m\ddot{s} = mg$, dakle je diferencijalna jednačba $\ddot{s} = g$. Stoga je redom

$$v = \dot{s} = \int_0^t g d\tau = g\tau \Big|_0^t = gt,$$

⁸Jakost struje u ovisnosti o vremenu je brzina promjene naboja u vremenu, tj. $I = \frac{dq}{dt}$.

$$s = \int_0^t g \tau \, d\tau = \left. \frac{g}{2} t^2 \right|_0^t = \frac{g}{2} t^2.$$

Osim određivanja veličine ovisne o vremenu iz poznate brzine njezine promjene, određeni integral ima i druge važne fizikalne interpretacije. Osvrnimo se ovdje na tri od njih.

Neka je dan neki objekt (primjerice tanka ravna žica), takav da je moguće postaviti brojevni pravac (x -os) tako da gustoća ρ pojedinog dijela tog objekta ovisi samo o poziciji $x \in [0, L]$ (primjerice, udaljenosti promatranog dijela od početka žice duljine L): $\rho = \rho(x)$, $0 \leq x \leq L$. Tada je **masa** tog objekta

$$m = \int_0^L \rho(x) \, dx.$$

Zadatak 50 Ako je x -os postavljena duž tankog štapa duljine 1 m tako da mu je jedan kraj u ishodištu, a drugi u točki $(1, 0)$, kolika je masa tog štapa ako znamo da ovisno o poziciji duž štapa je gustoća štapa jednaka $\rho(x) = \exp(-x) \text{ g/mL}$.

Nadalje, različite vrste rada W se za tzv. neprekidne fizikalne procese definiraju putem integrala.

- **Mehanički rad** uslijed djelovanja sile iznosa $F(x)$ za pravocrtni⁹ pomak x od pozicije a do pozicije b definiran je s $W = \int_a^b F(x) \, dx$.
- **Volumni rad** definira se s $W = - \int_{V_i}^{V_f} p(V) \, dV$, za reverzibilnu promjenu volumena od V_i do V_f . Ovdje je $p(V)$ tlak pri volumenu V .
- **Kemijski rad** uslijed promjene množine neke komponente sustava je definiran s $W = \int_{n_1}^{n_2} \mu(n) \, dn$, za promjenu množine od n_1 do n_2 ; pritom je $\mu(n)$ kemijski potencijal promatrane komponente kad joj je množina n .
- **Električni rad** pri pomicanju naboja q_1 od udaljenosti $r = a$ do udaljenosti $r = b$ u odnosu na naboj q_2 je $W = \int_a^b \frac{k_e q_1 q_2}{r^2} \, dr$. Pritom je $k_e = 8,99 \cdot 10^9 \text{ N m}^2 \text{ C}^{-2}$ Coulombova konstanta.

Primjer 80 Po drugom Newtonovom zakonu vrijedi $F(t) = m\dot{v}(t)$ te je odgovarajući mehanički rad pri pravocrtnom pomaku od a do b jednak

$$W = \int_a^b F(x) \, dx = m \int_a^b \frac{dv}{dt} \, dx = \{ dx = v \, dt \} =$$

⁹Za pomake duž krivulje trebat će nam krivuljni integrali, o njima ćemo govoriti kasnije, u poglavlju ??.

$$= m \int_a^b \frac{dv}{dt} v dt = m \int_{v_a}^{v_b} v dv = \frac{m(v_b^2 - v_a^2)}{2} = \Delta E_k.$$

Dakle, za svaku silu je pripadni mehanički rad jednak promjeni kinetičke energije.

S druge strane, ako sila F neprekidno ovisi samo o poziciji tijela x , onda mora postojati antiderivacija od F , tj. funkcija pozicije $-V$ takva da je $-V'(x) = F(x)$ za sve x i tu antiderivaciju zovemo potencijalnom energijom tijela. U tom je slučaju $W = \int_a^b F(x) dx = V_a - V_b = -\Delta V$. Općenito, sile za koje pripadni rad ne ovisi o putu, nego samo o početnoj i konačnoj poziciji (dakle, one koje imaju antiderivaciju $-V$ i ako se početna i konačna pozicija podudaraju, rad je 0), zovemo konzervativnim silama. Među konzervativne sile spadaju konstantna sila ($V(x) = -Fx + C$) i sila elastične opruge $F(x) = -kx$ ($V(x) = \frac{kx^2}{2} + C$). Za takve sile kombinacija prethodna dva rezultata daje

$$\Delta E_k = -\Delta V,$$

tj. zakon očuvanja energije.

Primjer 81 Rad potreban da se dva naboja iz beskonačnosti dovedu na razmak x (izvršen protiv unutarnje sile) jednak je radu potrebnom da se takvi naboji razdvoje s početnog razmaka R :

$$W = \int_R^\infty \frac{k_e q_1 q_2}{r^2} dr = \lim_{X \rightarrow \infty} \left(-\frac{k_e q_1 q_2}{X} + \frac{k_e q_1 q_2}{R} \right) = \frac{k_e q_1 q_2}{R}.$$

To vrijedi za svaki $R \geq 0$ te je posljednjim izrazom definiran elektrostatski potencijal za dva naboja na razmaku R .

Zadatak 51 Izračunajte izvršeni rad pri reverzibilnoj izotermnoj ekspanziji 0,500 mol idealnog plina pri temperaturi 20°C od početnog do osmerostrukog volumena. Podsjećamo da je jednadžba stanja idealnog plina $pV = nRT$, a opća plinska konstanta iznosi $R = 8,314 \frac{\text{J}}{\text{K mol}}$.

Određeni integrali se koriste i za određivanje promjena iznosa termodinamičkih funkcija stanja. Funkcije stanja su funkcije čije promjene tijekom bilo kojeg procesa ovise samo o početnom i konačnom stanju, a ne i o samom termodinamičkom procesu, tj. o međustanjima.

Primjer 82 Promjena entalpije H se za izobarne promjene temperature sustava računa kao

$$\Delta H = \int_{T_i}^{T_f} C_p(T) dT,$$

gdje je T_i početna i T_f konačna temperatura, a $C_p(T)$ je ovisnost izobranog toplinskog kapaciteta o temperaturi sustava.

Pretpostavimo da se za promatrani raspon temperatura molarni toplinski kapacitet $C_{p,m} = \frac{C_p}{n}$ može dobro aproksimirati funkcijom oblika

$$C_{p,m}(T) = a + bT + \frac{c}{T^2},$$

gdje su a , b i c ne nužno pozitivne konstante ovisne o vrsti plina.

Ako su za promatrani plin, primjerice vodik [1, str. 992], sve tri konstante a , b i c pozitivne, i ako se radi o zagrijavanju, pokažimo da je promjena entalpije pozitivna neovisno o početnoj i konačnoj temperaturi.¹⁰

Imamo prvo da je $C_p(T) = n C_{p,m}(T)$ pa je

$$\begin{aligned}\Delta H &= \int_{T_i}^{T_f} C_p(T) dT = \int_{T_i}^{T_f} a n + b n T + \frac{c n}{T^2} dT = \\ &= a n T + b n \frac{T^2}{2} - \frac{c n}{T} \Big|_{T_i}^{T_f} = a n (T_f - T_i) + \frac{b n}{2} (T_f - T_i)^2 - c n \left(\frac{1}{T_f} - \frac{1}{T_i} \right).\end{aligned}$$

Budući da se radi o zagrijavanju i da su zadani $a, b > 0$, znači da je $T_f > T_i$, očigledno su oba prva dva od tri člana u ΔH pozitivni. Nadalje je $\frac{1}{T_f} < \frac{1}{T_i}$ pa je zbog pozitivnosti c i zadnji član $-c n \left(\frac{1}{T_f} - \frac{1}{T_i} \right)$ pozitivan. Dakle, ako su $a, b, c > 0$ i $T_i < T_f$, onda je sigurno $\Delta H > 0$.

Završimo ovo poglavlje s objašnjenjem spomenute mogućnosti da za neku realnu funkciju jedne varijable ne postoji njezina derivacija u nekoj točki domene.

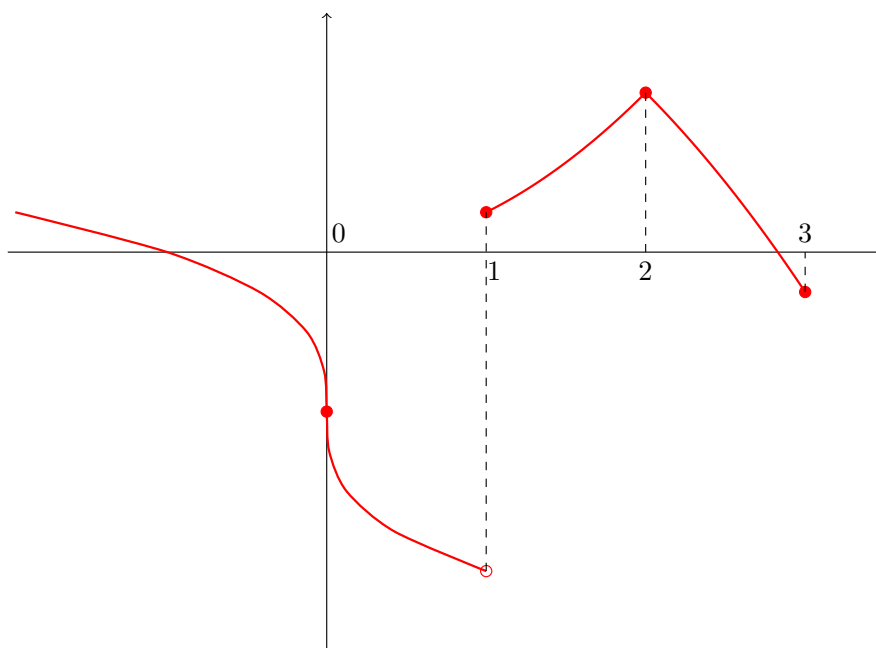
Primjer 83 Za funkcije $f(x) = x^5$ i $g(x) = \sqrt[5]{x}$ je $f'(x) = 5x^4$ i $g'(x) = \frac{1}{5\sqrt[5]{x^4}}$ pa je $f'(0) = 0$, ali se $g'(0)$ ne može izračunati (iako je 0 u domeni od g).

Iz gornjeg primjera vidimo da nije isto kad je derivacija neke funkcije jednaka nuli i kad se ne može izračunati. Ako je $f'(c) = 0$, onda derivacija u c postoji, a tangenta u točki grafa $(c, f(c))$ je horizontalna, primjerice u a i b za funkciju čiji graf je prikazan na slici 3.11 je derivacija te funkcije jednaka 0. S druge strane, može se dogoditi da je c u domeni funkcije f (inače nema ni smisla tražiti $f'(c)$), ali se $f'(c)$ ne može odrediti. U tom slučaju kažemo da derivacija funkcije f u točki c ne postoji.

Budući da je $f'(c)$ koeficijent smjera tangente na graf $y = f(x)$ o u točki $(c, f(c))$, derivacija $f'(c)$ neće postojati u dva slučaja: Ako tangenta u točki $(c, f(c))$ ne postoji ili pak ako je vertikalna. Upravo je **vertikalna tangenta** u $c = 0$ uzrok nepostojanja derivacije funkcije g u 0 u gornjem primjeru. S druge strane, nepostojanje tangente može imati tri uzroka, koja ukratko opisujemo u nastavku.

Ako graf $y = f(x)$ ima „špicu“ u nekoj točki $(c, f(c))$, onda nikoji od pravaca kroz tu točku nije tangenta, jer je tangenta pravac koji se najbolje priljubljuje uz krivulju oko te točke. U slučaju „špice“ mogla bi se naći dva pravca koji bi bili tangente „slijeva“ i „zdesna“, no nijedan od njih se ne priljubljuje uz graf na drugoj od dvije strane u odnosu na „špicu“ te stoga graf tu nema tangente odnosno funkcija nema derivaciju u pripadnoj apscisi.

¹⁰Ovdje je zgodno napomenuti da predznak promjene entalpije određuje je li proces egzoterman ($\Delta H < 0$) ili endoterman ($\Delta H > 0$).



Slika 3.9: Graf funkcije koja u četiri točke (0, 1, 2 i 3) nije derivabilna.

Primjer 84 Funkcija apsolutne vrijednosti ima derivaciju jednaku -1 u svim $x < 0$, jednaku 1 u svim $x > 0$,¹¹ a u 0 nema derivaciju.

Problem nastaje i ako je u nekoj točki domene graf „pukao“. Tada iz sličnih razloga kao u „špici“ ne postoji tangenta u toj točki. O ovom će više riječi biti u odjeljku 3.4.3.

Naposlijetku, ako je domena poluotvoren ili zatvoren interval ili pak ako je domena unija disjunktih intervala od kojih su neki poluotvoreni ili zatvoreni, funkcija (po definiciji) nije derivabilna u nikojem od zatvorenih rubova tih intervala (dakle, onih rubova koji su uključeni u domen). Primjerice, ako imamo $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, neovisno o pripadnom pravilu $y = f(x)$, ona nije derivabilna u a i b . Možemo to tumačiti ovako: za lijevi rub mogli bismo naći „desnu“ tangentu, no kako funkcija nije definirana lijevo od lijevog ruba, slijeva se taj pravac ne priljubljuje uz graf funkcije (jer grafa tamo ni nema); analogno vrijedi za desni rub.

Slika 3.9 prikazuje graf jedne funkcije koja u četiri točke domene nije derivabilna, po jednoj za svaki od navedenih četiriju mogućih razloga nederivabilnosti.

¹¹Možemo reći: $|x|' = \operatorname{sgn} x$ za $x \neq 0$.

3.2 Tehnike deriviranja i integriranja

3.2.1 Tehnike deriviranja

Već smo vidjeli da je deriviranje linearno. Iako koristeći linearnost možemo derivirati mnoge funkcije, primjerice sve polinome, ono nije dovoljno već ako poželimo derivirati racionalne funkcije kojima nazivnik nije monom ni jednostavne transcendentne funkcije poput $f(x) = x \exp(x)$ ili $g(x) = \sin(x^2)$. Da bismo znali derivirati sve elementarne funkcije, gdje god su derivabilne, trebaju nam i pravila za deriviranje produkta, kvocijenta i kompozicije funkcija.

Primjer 85 Uzmimo $f(x) = x^2$ i $g(x) = 2x$. Tada je $f'(x) = 2x$ i $g'(x) = 2$.

Produkt funkcija f i g je funkcija h formule $h(x) = x^3$. Njena derivacija je $h'(x) = 3x^2$, što je različito od $f'(x)g'(x) = 2x \cdot 2 = 4x$. Dakle, derivacija produkta funkcija nije produkt njihovih derivacija.

Kvocijent funkcija f i g je funkcija formule $k(x) = \frac{x}{2}$ i njena je derivacija $k'(x) = \frac{1}{2}$, što je različito od $f'(x) : g'(x) = x$, dakle derivacija kvocijenta funkcija nije kvocijent njihovih derivacija.

Pravilne formule za derivacije produkta i kvocijenta funkcija su:

$$(f(t)g(t))' = f(t)g'(t) + f'(t)g(t), \quad \left(\frac{f(t)}{g(t)}\right)' = \frac{f'(t)g(t) - f(t)g'(t)}{g^2(t)},$$

odnosno u $\frac{d}{dt}$ notaciji

$$\frac{d}{dt}(f \cdot g) = \frac{df}{dt} \cdot g + f \cdot \frac{dg}{dt}, \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{\frac{df}{dt} \cdot g - f \cdot \frac{dg}{dt}}{g^2}.$$

Primjer 86 Prirodna domena funkcije zadane s $f(t) = t \ln t - \frac{t}{e^t}$ je skup svih pozitivnih brojeva. Za sve $t > 0$ vrijedi

$$f'(t) = (t \ln t)' - \left(\frac{t}{e^t}\right)' = (t)' \ln t + t (\ln t)' - \frac{(t)'e^t - t(e^t)'}{e^{2t}} = \ln t + 1 - \frac{1-t}{e^t}.$$

Stoga je $f'(1) = 1$ pa tangenta na graf od f u točki $(1, f(1))$, gdje je $f(1) = -\frac{1}{e}$, ima jednadžbu $y = x - 1 - \frac{1}{e}$.

Zadatak 52 Koristeći formulu za deriviranje kvocijenta funkcija izvedite formule za derivacije tangensa i kotangensa.

Primjer 87 Derivirajmo funkciju $f(t) = \exp(-kt)$. Budući da je $f(t) = (e^{-k})^t$, možemo ju derivirati po pravilu za derivaciju eksponencijalne funkcije s bazom e^{-k} :

$$f'(t) = (e^{-k})^t \cdot \ln e^{-k} = -k \cdot (e^{-k})^t = -k \exp(-kt).$$

Slično, ako bismo trebali derivirati $g(x) = \sin^2 x = \sin x \cdot \sin x$, mogli bismo primijeniti pravilo za derivaciju produkta i dobili bismo

$$g'(x) = \cos x \cdot \sin x + \sin x \cdot \cos x = 2 \sin x \cdot \cos x = \sin(2x).$$

U gornjem primjeru radilo se o kompozicijama nekih elementarnih funkcija čije derivacije su se mogle izračunati koristeći već poznate tehnike deriviranja. No, općenito za kompozicije trebamo **pravilo za deriviranje kompozicije funkcija (lančano pravilo)** koje glasi $(g \circ f)'(t) = g'(y) \cdot f'(t)$, gdje je $y = f(t)$. To se pravilo obično piše u obliku

$$(g \circ f)'(t) = g'(f(t)) \cdot f'(t),$$

odnosno

$$\frac{dz}{dt} = \frac{dz}{dy} \cdot \frac{dy}{dt}$$

(u posljednjem obliku lančanog pravila je $z = f \circ g$).

Primjer 88 Derivirajmo $h(x) = (\ln x)^{1000}$. To je kompozicija „vanjske funkcije” potenciranja na 1000-tu, $g(y) = y^{1000}$, i „unutrašnje funkcije” prirodnog logaritma, $y = f(x) = \ln x$. Stoga je

$$h'(x) = 1000y^{999} \cdot \frac{1}{x} = 1000 \frac{(\ln x)^{999}}{x}.$$

Primjer 89 Prema Newtonovom zakonu grijanja i hlađenja je brzina promjene temperature sustava ϑ (u °C) u svakom trenutku proporcionalna razlici temperature okoline i sustava. Dakle, ako temperaturu okoline označimo s ϑ_{ok} , Newtonov zakon grijanja i hlađenja simbolički zapisan ima oblik

$$\dot{\vartheta} = k(\vartheta_{\text{ok}} - \vartheta),$$

gdje je $\theta = \theta(t)$, a k konstanta (negativna ako se radi o hlađenju, a pozitivna ako se radi o zagrijavanju).

Recimo da je promatrani sustav patka koju želimo ispeći u pećnici (dakle, pećnica je okolina) zagrijanoj na konstantnih 200°C. Patka je na početku izvađena iz hladnjaka i imala temperaturu 2°C te je odmah stavljena u pećnicu.¹²

Odgovarajuća diferencijalna jednačina je tada

$$\dot{\vartheta} = k(200^\circ\text{C} - \vartheta) \tag{3.2}$$

s početnim uvjetom $\vartheta(0 \text{ min}) = 2^\circ\text{C}$. Budući da je mjerna jedinica za θ jednaka °C, ako vrijeme t mjerimo u minutama, jedinica od $\dot{\vartheta}$ je °C min⁻¹ te je mjerna jedinica od k jednaka min⁻¹.

¹²To u praksi nije preporučljivo.

Provjerimo da je ovisnost temperature patke o vremenu opisana s

$$\vartheta(t) = 200^{\circ}\text{C} - a \exp(-kt),$$

gdje je $a > 0$ konstanta:

$$\dot{\vartheta}(t) = a k \exp(-kt).$$

Uvrstimo ϑ i $\dot{\vartheta}$ u diferencijalnu jednadžbu 3.2:

$$a k \exp(-kt) = k (200^{\circ}\text{C} - 200^{\circ}\text{C} + a \exp(-kt))$$

što daje

$$a k \exp(-kt) = a k \exp(-kt),$$

a to je očito istinito za sve trenutke t te zaključujemo da je predložena funkcija rješenje diferencijalne jednadžbe 3.2.

U rješenju $\vartheta(t) = 200^{\circ}\text{C} - a \exp(-kt)$ imamo dvije neodređene konstante a (konstanta iz općeg rješenja diferencijalne jednadžbe prvog reda) i k (koja potječe od samog fizikalnog zakona). Koristeći početni uvjet dobivamo iznos a :

$$2^{\circ}\text{C} = \vartheta(0 \text{ min}) = 200^{\circ}\text{C} - a \exp(-k \cdot 0 \text{ min}) = 200^{\circ}\text{C} - a.$$

Vidimo da je $a = 198^{\circ}\text{C}$, tj.

$$\vartheta(t) = 200^{\circ}\text{C} - 198^{\circ}\text{C} \exp(-kt).$$

Početni uvjet nije dovoljan da odredimo iznos koeficijenta k . Ako bismo znali još jedan podatak o temperaturi patke u nekom trenutku nakon što smo ju stavili u pećnicu, možemo odrediti i njega. Recimo, nakon 30 minuta izmjerili smo temperaturu patke i dobili da je tada bila 16°C , dakle $\vartheta(30 \text{ min}) = 16^{\circ}\text{C}$. Ponovimo postupak kao kad smo koristili početni uvjet, ali sa zadnjim određenim oblikom funkcije ϑ :

$$16^{\circ}\text{C} = \vartheta(30 \text{ min}) = 200^{\circ}\text{C} - 198^{\circ}\text{C} \exp(-k \cdot 30 \text{ min}).$$

Rješavanje gornje eksponencijalne jednadžbe daje

$$k = \left(-\frac{1}{30} \ln \frac{92}{99} \right) \text{ min}^{-1} \approx 0,00244438 \text{ min}^{-1}.$$

Stoga je temperatura patke u svakom trenutku

$$\vartheta(t) = 200^{\circ}\text{C} - 198^{\circ}\text{C} \exp(-0,00244438t \text{ min}^{-1}).$$

Želimo li primjerice znati kad će patka biti pečena, tj. kad će joj temperatura biti $\vartheta(t) = 80^{\circ}\text{C}$, uvrstimo to u zadnju formulu i riješimo s obzirom na t . Ispasti će da se patka treba peći približno 204,868 minuta, tj. otprilike 3 sata i 25 minuta.

Zadatak 53 U mnogim strukama (fizici, kemiji, biologiji, ekonomiji, medicini, ...) kao važan model pojavljuje se tzv. logistička diferencijalna jednačba:

$$\dot{Y} = r Y \left(1 - \frac{Y}{K}\right)$$

s konstantama $r, K > 0$ i početnim uvjetom $Y(0) = Y_0 < K$.

Primjerice, u biologiji $Y = N$ je brojnost jedinki neke vrste u ovisnosti o vremenu t , $N(0) = N_0$ je početna brojnost, a K je kapacitet okoline: Ni u kom trenutku u toj okolini ne može živjeti K ni više jedinki. Primjerice, u blizinu nekog jezera naseljen je par pataka, patak i patka (u tom trenu nije bilo drugih živih pataka u blizini), a poznato je da su uvjeti u toj okolici pogodni za život do 1000 pataka. Nakon godinu dana uočeno je da je broj pataka bio 8. Provjerite da je partikularno rješenje logističke jednačbe za N koje odgovara navedenim uvjetima

$$N(t) = \frac{2000}{2 + 998 \exp(-rt)},$$

izračunajte r i odredite kada će broj pataka u toj okolini prijeći 100.

Zadatak 54 Prema drugom Kirchhoffovom zakonu, zbroj svih napona u strujnoj petlji jednak je nuli. Za jednostavni LR-strujni krug (s jednim otpornikom konstantnog otpora R ¹³ i zavojnicom konstantnog induktiviteta L ¹⁴) koji se napaja konstantnim naponom E drugi Kirchhoffov zakon poprima oblik

$$L \dot{I} + R I = E, \quad I = I(t),$$

s početnim uvjetom $I(0) = 0$. Provjerite da je ovisnost jakosti struje I o vremenu t u jednostavnom LR-strujnom krugu dana formulom

$$I(t) = \frac{E}{R} (1 - \exp(-Rt/L)).$$

Ponekad je koristan specijalni slučaj pravila za derivaciju kompozicije funkcija, za slučaj da je „vanjska“ funkcija prirodni logaritam:

$$(\ln f(t))' = \frac{f'(t)}{f(t)}.$$

Primjena gornje formule, tj. određivanje derivacije funkcije tako da ju prvo logaritmiramo, pa onda deriviramo logaritmiranu funkciju, zove se **logaritamsko deriviranje**.

¹³To dovodi do pada napona RI .

¹⁴To dovodi do pada napona $L\dot{I}$.

Primjer 90 Derivirajmo opću potenciju $f(x) = x^x = \exp(x \ln x)$ logaritamskim deriviranjem. Prvo logaritmiramo funkciju:

$$\ln f(x) = x \ln x.$$

Sad deriviramo logaritmiranu funkciju i iz dobivenog izrazimo $f'(x)$:

$$(\ln f(x))' = \ln x + x \cdot \frac{1}{x} \Rightarrow \frac{f'(x)}{f(x)} = 1 + \ln x \Rightarrow$$

$$f'(x) = (1 + \ln x)f(x) = (1 + \ln x)x^x.$$

$$c(t) = \frac{c_0}{1 - c_0 \nu k t}.$$

Naposlijetku, navedimo i pravilo za derivaciju inverza funkcije:

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(t)}, \quad y = f(t),$$

odnosno u $\frac{d}{dt}$ obliku

$$\frac{dy}{dt} = \frac{1}{\frac{dt}{dy}}.$$

Primjer 91 Neka je $y = \exp(t)$. Odredimo

$$\frac{d(y/t)}{d(1/t)},$$

tj. derivaciju kvocijenta $\frac{y}{t} = \frac{\exp(t)}{t}$ po varijabli $x = \frac{1}{t}$:

$$\begin{aligned} \frac{d(y/t)}{d(1/t)} &= \frac{d(y/t)}{dt} \cdot \frac{dt}{d(1/t)} = \frac{\exp(t) \cdot t - \exp(t) \cdot 1}{t^2} \cdot \frac{1}{\frac{d(1/t)}{dt}} = \\ &= \exp(t) \cdot \frac{t-1}{t^2} \cdot \frac{1}{-1/t^2} = (1-t)\exp(t). \end{aligned}$$

3.2.2 Osnovne tehnike integriranja

Dok se poznavanjem tehnika iz prethodnog odjeljka lako i brzo derivira svaka elementarna funkcija, integriranje općenito nije tako jednostavan proces. Iako je, kako ćemo kasnije vidjeti, više funkcija integrabilno nego derivabilno, traženje antiderivacije općenito nije direktan proces temeljem formule podintegralne funkcije, nego ovisno o njoj treba koristiti i kombinirati razne metode. Mi ćemo ovdje obraditi samo tri najčešće korištene metode integriranja: parcijalnu integraciju, supstituciju i rastav na parcijalne razlomke.

Metoda parcijalne integracije

U tablici osnovnih integrala, čak ni u većima od naše na str. 77, ne može se naći integral logaritamske funkcije. Razlog je u tome što u standardnoj tablici derivacija nema nijedne funkcije koja derivirana daje logaritamsku funkciju, tj. nikoja od osnovnih elementarnih funkcija derivirana ne daje logaritamsku. U ovom, a i mnogim drugim slučajevima, pomaže metoda parcijalne integracije, koja se izvodi iz formule za derivaciju produkta funkcija:

$$\frac{d}{dt}(uv) = \frac{du}{dt} \cdot v + u \cdot \frac{dv}{dt}.$$

Stoga je

$$u \cdot \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}(uv) - \frac{du}{dt} \cdot v.$$

Integriranje zadnje jednakosti po t daje

$$\int u \, dv = uv - \int v \, du,$$

pri čemu koristimo skraćeni zapis

$$df = f'(t) \, dt.$$

To je **formula parcijalne integracije**. Za određene integrale ona poprima oblik

$$\int_a^b u \, dv = uv \Big|_a^b - \int_a^b v \, du.$$

Parcijalnu integraciju primjenjujemo kad pod integralom prepoznamo jednu funkciju ($u = u(t)$) pomnoženu s derivacijom neke druge ($v'(t)$) pri čemu je v' lako integrirati i nakon deriviranja funkcije u dobijemo lakši integral $\int v \, du = \int u'(t)v(t) \, dt$. Tri standardna slučaja primjene parcijalne integracije su sljedeći:

- Funkcija u ima relativno jednostavnu derivaciju, a $v'(t) = 1$;
- Funkcija u je monom, a v' je (eventualno transformirana u smislu osnovnih transformacija iz odjeljka 2.3) eksponencijalna funkcija, sinus ili kosinus;
- Funkcija u je logaritamska funkcija, a v' je oblika $v'(t) = t^a$ za konstantan $a \in \mathbb{R}$.

Dajemo primjere za sva tri navedena tipična slučaja.

Primjer 92

$$\begin{aligned} \int_1^e \ln t \, dt &= \left\{ u(x) = \ln t, \, du = \frac{dt}{t}; \, dv = dt, \, v(t) = t \right\} = \\ &= t \ln t \Big|_1^e - \int_1^e t \frac{dt}{t} = e - \int_1^e dt = e - t \Big|_1^e = e - (e - 1) = 1. \end{aligned}$$

Primjer 93

$$\begin{aligned}
\int x^2 e^x dx &= \left\{ u(x) = x^2, du = 2x dx; dv = e^x dx, v(x) = e^x \right\} = \\
&= x^2 e^x - 2 \int x e^x dx = \left\{ u(x) = x, du = dx; dv = e^x dx, v(x) = e^x \right\} = \\
&= x^2 e^x - 2 \left(x e^x - \int e^x dx \right) = x^2 e^x - 2x e^x + 2e^x + C.
\end{aligned}$$

Primjer 94

$$\begin{aligned}
\int \frac{\ln x}{x^2} dx &= \left\{ u(x) = \ln x, du = \frac{dx}{x}; dv = x^{-2} dx, v(x) = -x^{-1} \right\} = \\
&= -\frac{\ln x}{x} + \int x^{-1} \cdot \frac{dx}{x} = -\frac{\ln x}{x} + \int x^{-2} dx = -\frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x} + C.
\end{aligned}$$

Navedene tri tipične situacije nisu jedine na koje se može primijeniti parcijalna integracija.

Primjer 95 *Izračunajmo $\int_0^\pi \sin^2 x dx$.*¹⁵

$$\begin{aligned}
\int_0^\pi \sin^2 x dx &= \{u = \sin x, dv = \sin x dx\} = -\sin x \cos x \Big|_0^\pi + \int_0^\pi \cos^2 x dx = \\
&= 0 + \int_0^\pi \cos^2 x dx = \int_0^\pi (1 - \sin^2 x) dx = x \Big|_0^\pi - \int_0^\pi \sin^2 x dx = \pi - \int_0^\pi \sin^2 x dx.
\end{aligned}$$

Označimo li $I = \int_0^\pi \sin^2 x dx$, dobili smo jednadžbu $I = \pi - I$ te je

$$\int_0^\pi \sin^2 x dx = I = \frac{\pi}{2}.$$

Metoda supstitucije

Promotrimo sljedeći integral:

$$\int \frac{dt}{at+b}.$$

On podsjeća na integral $\int \frac{dt}{t}$, no ako bismo pretpostavili da je $\int \frac{dt}{at+b} = \ln |at+b| + C$, lako bismo se deriviranjem uvjerali da nismo dobili točan rezultat. Prirodna ideja bila bi zamijeniti „problematični“ nazivnik $at+b$ novom varijablom y , no time integral poprima oblik $\int \frac{dt}{y}$, što nije smisleno jer bismo imali istovremeno dvije varijable (y i varijablu po kojoj integriramo, tj. t). Stoga se pri supstituciji $y = at+b$

¹⁵Ovaj integral može se izračunati i tabličnim integriranjem u kombinaciji sa supstitucijom.

treba supstituirati i dt . Kako? Ideja je jednostavna: $y' = a$, tj. $\frac{dy}{dt} = a$ te je $dt = \frac{1}{a} dy$. Stoga je

$$\int \frac{dt}{at+b} = \{y = at+b, dy = a dt\} = \int \frac{1}{a} \cdot \frac{dy}{y} = \frac{1}{a} \ln |y| + C = \frac{\ln |at+b|}{a} + C.$$

Općenito, kompoziciju $f \circ g$ affine funkcije $g(t) = at + b$ s nekom funkcijom f integriramo supstitucijom $y = at + b$, $dy = a dt$:

$$\int f(at+b) dx = \frac{1}{a} \int f(y) dy.$$

U slučaju određenog integrala potrebno je prilagoditi granice integracije: Ako polazni integral ima područje integracije $[\alpha, \beta]$ to znači da t poprima vrijednosti od α do β pa y poprima vrijednosti od $\alpha' = a\alpha + b$ do $\beta' = a\beta + b$:

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(at+b) dx = \frac{1}{a} \int_{a\alpha+b}^{a\beta+b} f(y) dy.$$

Alternativno, možemo prvo do kraja izračunati neodređeni integral pa tek onda uvrstiti granice integriranja.

Primjer 96 Izračunajmo $\int_0^{\pi} \cos(5-3x) dx$ na oba spomenuta načina:

$$\begin{aligned} \int_0^1 \cos(5-3x) dx &= \{y = 5-3x, dy = -3 dx; 0 \leq x \leq \pi \Rightarrow 5 \geq y \geq 2\} = \\ &= -\frac{1}{3} \int_5^2 \cos y dy = -\frac{1}{3} (\sin 2 - \sin 5) = \frac{\sin 5 - \sin 2}{3}; \\ \int \cos(5-3x) dx &= \{y = 5-3x, dy = -3 dx\} = -\frac{1}{3} \int \cos y dy = -\frac{1}{3} \sin y + C = \\ &= -\frac{1}{3} \sin(5-3x) + C \Rightarrow \int_0^1 \cos(5-3x) dx = -\frac{1}{3} \sin(5-3x) \Big|_0^1 = \frac{\sin 5 - \sin 2}{3}. \end{aligned}$$

Uočimo da je rezultat negativan, što je u skladu s činjenicom da je graf podintegralne funkcije na području integracije ispod osi apscisa.

Gornji slučaj je specijalni slučaj općenitije metode integriranja poznate pod imenom **metoda supstitucije**. Kao što je metoda parcijalne integracije analog formule za derivaciju produkta u kontekstu integrala, metoda supstitucije je analog lančanog pravila za derivaciju kompozicije funkcija. Formula **metode supstitucije** za neodređene integrale glasi:

$$\int F(f(t)) y'(t) dt = \{y = f(t), dy = f'(t) dt\} = \int F(y) dy.$$

Uobičajena primjena ove formule je u situacijama kad pod integralom uočimo neku funkciju i njenu derivaciju (do na multiplikativnu konstantu). Za određene integrale gornja formula poprima oblik:¹⁶

$$\int_a^b F(f(t)) y'(t) dt = \{y = f(t), dy = f'(t) dt\} = \int_{f(a)}^{f(b)} F(y) dy.$$

Primjer 97 Izračunajmo $\int t \exp(-t^2) dt$. Budući da (do na multiplikativnu konstantu -2) t možemo shvatiti kao derivaciju od $-t^2$, pokušaj supstitucije najsmisleniji je s $y = -t^2$. U tom slučaju je $dy = -2t dt$, tj. $t dt = -\frac{1}{2} dy$, te je

$$\int t \exp(-t^2) dx = \int -\frac{1}{2} \exp(y) dy = -\frac{1}{2} \exp(y) + C = -\frac{1}{2} \exp(-t^2) + C.$$

Primjer 98 Integral $\int_2^3 \frac{dx}{3-2x}$ jednak je

$$\begin{aligned} \int_2^3 \frac{dx}{3-2x} &= \{y = 3-2x, dy = -2 dx, y(2) = -1, y(3) = -4\} = \\ &= \int_{-1}^{-4} -\frac{1}{2} \frac{dy}{y} = -\frac{1}{2} \ln |y| \Big|_{-1}^{-4} = -\frac{1}{2} (\ln 4 - \ln 1) = -\ln 4^{1/2} = -\ln 2. \end{aligned}$$

Ponekad je formulu metode supstitucije zgodno čitati „udesno”.

Primjer 99 Promotrimo integral $\int \sin(\sqrt{t}) dt$. Kod njega nema vidljive kombinacije funkcije i njene derivacije. Pokušajmo vidjeti što bi nam dao jedini mogući pokušaj supstitucije u ovom integralu: $y = \sqrt{t}$, tj. $dy = \frac{1}{2\sqrt{t}} dt$. Prema posljednjem imamo $dx = 2\sqrt{t} dy = 2y dy$. Dobili bismo

$$\int \sin(\sqrt{t}) dt = \int 2y \sin y dy.$$

Posljednji integral je rješiv metodom parcijalne integracije — riješite ga do kraja!

Zadatak 55 Izračunajte $\int \sin^{10} t \cos t dt$.

Integriranje racionalnih funkcija

Svaku racionalnu funkciju moguće je integrirati, pri čemu prvo podintegralnu funkciju pogodno preoblikujemo. Ako je brojnik racionalne funkcije stupnja većeg ili jednakog stupnju nazivnika, prvo dijeljenjem polinoma preoblikujemo funkciju u zbroj polinoma i prave racionalne funkcije (vidi str. 33). Pritom, **prava racionalna funkcija** je racionalna funkcija kojoj brojnik ima manji stupanj od nazivnika.

¹⁶Pritom je bitno da je f' neprekidna na segmentu $[a, b]$.

Primjer 100 Uzmimo $\int \frac{x^3}{x^2-1} dx$. Prvo dijelimo

$$x^3 : (x^2 - 1) = x$$

i ostatak je x te je

$$\frac{x^3}{x^2-1} = x + \frac{x}{x^2-1},$$

dakle

$$\int \frac{x^3}{x^2-1} = \frac{x^2}{2} + \int \frac{x}{x^2-1} dx.$$

Stoga je pravo pitanje kako integrirati prave racionalne funkcije. Metoda preoblikovanja takve racionalne funkcije u oblik koji se lako integrira zove se **rastav na parcijalne razlomke**. Radi se o zapisu prave racionalne funkcije $\frac{p(t)}{q(t)}$ kao zbroja razlomaka koji su isključivo jednog od dva oblika:

$$\frac{A}{(t-c)^k}, \quad \frac{Bt+C}{(t^2+pt+q)^k}.$$

U slučaju da nazivnik $q(x)$ nema kvadratnih faktora bez realnih nultočaka potrebni su samo razlomci prvog tipa, pri čemu su izrazi $at+b$ faktori na koje možemo faktorizirati $q(t)$.

Najjednostavniji slučaj imamo kad $q(t)$ ima točno onoliko (različitih) realnih nultočaka koliki mu je stupanj (u daljnjem ćemo stupanj od q označiti s n), tj. kad ima n različitih jednostrukih realnih nultočaka $c_1, \dots, c_n$. U tom slučaju rastav na parcijalne razlomke bit će oblika

$$\frac{p(t)}{q(t)} = \sum_{i=1}^n \frac{A_i}{t-c_i},$$

gdje su $t-c_i$ različiti faktori nazivnika, a treba odrediti konstante $A_1, \dots, A_n$. One se određuju tako da cijelu jednakost pomnožimo s $q(t)$, čime dobijemo jednakost polinoma. Koeficijenti brojnika se onda mogu odrediti iz sustava kojeg dobijemo koristeći činjenicu da su dva polinoma jednaka točno ako im se svi koeficijenti uz odgovarajuće potencije podudaraju. Alternativno, možemo redom uvrstiti nultočke¹⁷ pojedinih faktora i tako dobiti tražene koeficijente. Postupak je najlakše opisati primjerom te ćemo nastaviti s primjerom 100.

Primjer 101 Potrebno je $\frac{x}{x^2-1}$ rastaviti na parcijalne razlomke. Faktorizirani oblik nazivnika je $(x-1)(x+1)$ te je

$$\frac{x}{x^2-1} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1}.$$

¹⁷Zapravo, potrebno je uvrstiti onoliko različitih vrijednosti t koliko imamo nepoznanica, tj. njih n , no najjednostavnije jednadžbe dobivamo uvrštavanjem nultočki od $q(t)$.

Potrebno je odrediti A i B . Pomnožimo li zadnju jednakost s $x^2 - 1$ dobivamo jednakost

$$x = A(x+1) + B(x-1).$$

Jedan način da dobijemo A i B je da ju napišemo u obliku $x = (A+B)x + (A-B)$ iz čega dobijemo sustav $A+B=1$, $A-B=0$. Alternativno i posebno u slučaju samo jednostrukih nultočaka brže je da uvrstimo $x=1$ i $x=-1$ (nultočke od x^2-1) u $x = A(x+1) + B(x-1)$ čime dobivamo

$$1 = 2A,$$

$$-1 = -2B.$$

Stoga je $A = B = \frac{1}{2}$ i

$$\frac{x}{x^2-1} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+1} \right)$$

te je

$$\int \frac{x}{x^2-1} dx = \frac{1}{2} \int \left(\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+1} \right) dx = \frac{1}{2} (\ln|x-1| + \ln|x+1|) = \frac{1}{2} \ln|x^2-1| + C.$$

Početni integral iz primjera 100 stoga je jednak

$$\int \frac{x^3}{x^2-1} = \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2} \ln|x^2-1| + C.$$

Nešto teži slučaj imamo ako $q(t)$ ima višestrukih realnih nultočki, tj. ako se u $q(x)$ neki faktor $t - c_i$ pojavljuje s potencijom k većom od 1, ali je zbroj svih kratnosti svih nultočaka n (tj. q nema kvadratnih faktora bez realnih nultočaka). U tom slučaju svakom takvom faktoru, tj. svakoj višestrukoj nultočki c nazivnika, ne odgovara jedan, nego k parcijalnih razlomaka

$$\frac{A_1}{t-c} + \frac{A_2}{(t-c)^2} + \dots + \frac{A_{k-1}}{(t-c)^{k-1}} + \frac{A_k}{(t-c)^k}.$$

Dakle, pojedinom faktoru nazivnika odgovara onoliko parcijalnih razlomaka koliki je eksponent tog faktora (kratnost odgovarajuće nultočke) i nazivnici su redom potencije tog faktora od 1 do uključivo kratnosti nultočke tog faktora. No, i dalje su brojnici svih parcijalnih razlomaka konstante. .

Primjer 102 Izračunajmo integral

$$\int \frac{t}{(2t+3)(t-3)^2} dx.$$

Prvi faktor nazivnika je $(2t+3)$ i on je potencije 1 pa njemu odgovara jedan parcijalni razlomak oblika $\frac{A}{2t+3}$. Drugi faktor $(t-3)$ je potencije 2 pa njemu odgovaraju 2

parcijalna razlomka s nazivnicima $(t-3)$ i $(t-3)^2$. Dakle, pretpostavljamo rastav podintegralne funkcije na parcijalne razlomke.

$$\frac{t}{(2t+3)(t-3)^2} = \frac{A}{2t+3} + \frac{B}{(t-3)^2} + \frac{C}{t-3}.$$

Množenje s $(2t+3)(t-3)^2$ daje

$$t = A(t-3)^2 + B(2t+3) + C(t-3)(2t+3).$$

Uvrstimo $t=3$ i $t=-3/2$ (nultočke nazivnika polazne funkcije) i dobijemo

$$3 = 9B, \quad -\frac{3}{2} = \frac{81}{4}A,$$

tj. $A = -\frac{2}{27}$ i $B = \frac{1}{3}$. Da bismo odredili C uvrstimo bilo koji treći t , recimo $t=0$:

$$0 = 9A + 3B - 9C,$$

iz čega dobivamo $C = \frac{1}{27}$. Imamo dakle

$$\begin{aligned} \int \frac{t}{(2t+3)(t-3)^2} dt &= \int \left(\frac{-2/27}{2t+3} + \frac{1/3}{(t-3)^2} + \frac{1/27}{t-3} \right) dt = \\ &= -\frac{1}{27} \ln |2t+3| - \frac{1}{3(t-3)} + \frac{1}{27} \ln |t-3| + C = \frac{1}{27} \ln \left| \frac{t-3}{2t+3} \right| - \frac{1}{3(t-3)} + C. \end{aligned}$$

Primijetimo: Kad god $q(t)$ ima ukupno n realnih nultočki kad im brojimo kratnost, $\frac{p(t)}{q(t)}$ se rastavlja na ukupno n parcijalnih razlomaka tipa $\frac{A}{(t-c)^k}$. Time se integriranje svodi na integriranje funkcija oblika $(t-c)^{-k} dx$ koje je lako integrirati supstitucijom $y = t - c$.

U slučaju da $q(t)$ sadrži i kvadratne faktore t^2+pt+q bez realnih nultočki (dakle, takve da je $p^2 < 4q$), u rastavu se po analognom principu pojavljuju parcijalni razlomci oblika $\frac{Bt+C}{(t^2+pt+q)^k}$, tj. parcijalni razlomci kojima su brojnici affine funkcije, a nazivnici potencije kvadratnih faktora bez realnih nultočaka. Pritom, ako je $k > 1$, onda se po principu kao kod višestrukih realnih nultočaka, pojavljuje k parcijalnih razlomak kojima je brojnik afina funkcija, a nazivnici redom potencije od 1 do k promatranog kvadratnog faktora.

Primjer 103 Rastavimo $\frac{1}{(x^2+1)(x-1)}$ na parcijalne razlomke. Faktor (x^2+1) nema realnih nultočaka i pojavljuje se s potencijom 1 pa njemu odgovara jedan parcijalni razlomak oblika $\frac{Ax+B}{x^2+1}$. Faktoru $(x-1)$ kao ranije odgovara parcijalni razlomak oblika $\frac{C}{x-1}$. Dakle:

$$\frac{1}{(x^2+1)(x-1)} = \frac{Ax+B}{x^2+1} + \frac{C}{x-1}.$$

Množenje s $(x^2 + 1)(x - 1)$ daje

$$1 = (Ax + B)(x - 1) + C(x^2 + 1).$$

Imamo 3 neodređena koeficijenta A , B i C , a samo jednu realnu nultočku nazivnika (to je 1) pa ćemo osim 1 u zadnju jednakost morati uvrstiti još dva broja, primjerice 0 i 2. Ako redom uvrstimo $x = 0, 1, 2$ u zadnju jednadžbu dobijemo sustav

$$2C = 1, \quad -B + C = 1, \quad 2A + B + 5C = 1.$$

Rješenje tog sustava je $A = -\frac{1}{2}$, $B = -\frac{1}{2}$, $C = \frac{1}{2}$ tj.

$$\frac{1}{(x^2 + 1)(x - 1)} = \frac{1}{2} \left(\frac{-x - 1}{x^2 + 1} + \frac{1}{x - 1} \right).$$

Zadatak 56 Koristeći rastav na parcijalne razlomke iz gornjeg primjera izračunajte

$$\int \frac{dx}{(x^2 + 1)(x - 1)}.$$

Zadatak 57 Izračunajte $\int_0^1 \frac{\exp(x) dx}{(\exp(x) + 1)(\exp(x) + 2)}.$

3.2.3 Parametarski zadane krivulje i parametarsko deriviranje

Dosad smo krivulje u ravnini znali opisati isključivo kao grafove realnih funkcija jedne varijable, dakle eksplicitnom jednadžbom oblika

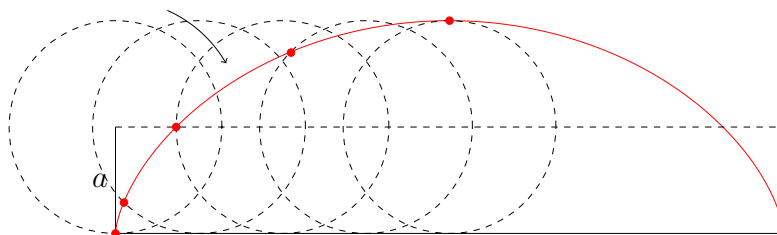
$$y = f(x).$$

Drugi način na koji možemo opisati krivulje u ravnini¹⁸ je parametarski: Za različite vrijednosti nekog parametra t , koji prolazi nekim intervalom realnih brojeva, eksplicitno definiramo koordinate točaka $(x(t), y(t))$ koje su na krivulji. To je jednostavno fizikalno zamisliti ovako: Za svaki trenutak t iz nekog intervala bilježimo apscisu $x(t)$ i ordinatu $y(t)$ trenutne pozicije materijalne točke koja se giba po ravnini.

Primjer 104 Putanja točke koja se giba u koordinatnoj ravnini tako da joj je u svakom trenutku apscisa jednaka kosinusu tog trenutka (podijeljenog s odabranom mjernom jedinicom), a ordinata sinus, je, po definiciji sinusa i kosinusa, jedinična kružnica.

Korisno je zapamtiti parametarske jednadžbe kružnica i elipsi:

¹⁸Definicija krivulje u prostoru bit će dana na str. 208.



Slika 3.10: Jedan luk cikloide.

- Kružnica polumjera r sa središtem (p, q) ima parametarske jednadžbe $x(t) = p + r \cos t$, $y(t) = q + r \sin t$ za $t \in [0, 2\pi)$.
- Elipsa s poluosima a (duljina horizontalne poluosi) i b (duljina vertikalne poluosi) i središtem u točki (p, q) ima parametarske jednadžbe $x(t) = p + a \cos t$, $y(t) = q + b \sin t$ za $t \in [0, 2\pi)$.

Ako gledamo samo luk kružnice ili elipse, onda će t prolaziti prikladnim manjim intervalom.

Primjer 105 Krivulja cikloida je putanja fiksirane točke na rubu kružnog „kotača“ polumjera a koji se kotrlja po pravcu koji je u ravni tog „kotača“ (slika 3.10). Parametarske jednadžbe cikloide su

$$x(t) = a(t - \sin t),$$

$$y(t) = a(1 - \cos t),$$

za $t \in [0, +\infty)$.

Neka je jednadžbama $x = x(t)$ i $y = y(t)$ parametarski zadana krivulja u ravni koordinatiziranoj Kartezijevim koordinatnom sustavu, gdje je $t \in I$. Što tada predstavljaju derivacije $\dot{x}(t)$ i $\dot{y}(t)$? U fizikalnoj interpretaciji krivulje kao trajektorije točke, u svakom trenutku t brojevi $\dot{x}(t)$ i $\dot{y}(t)$ predstavljaju iznose horizontalne odnosno vertikalne komponente brzine u trenutku t . Uređeni par $(\dot{x}(t), \dot{y}(t))$ stoga predstavlja **vektor brzine** u tom trenutku (odnosno, vektor brzine je u tom trenutku $\dot{x}(t) \vec{i} + \dot{y}(t) \vec{j}$). **Iznos brzine** u tom trenutku je $\sqrt{(\dot{x}(t))^2 + (\dot{y}(t))^2}$. Koeficijent smjera tangente u istoj točki (a na toj tangenti leži vektor brzine) je

$$\frac{dy}{dx}(t) = \frac{\dot{y}(t)}{\dot{x}(t)}.$$

Primjer 106 Odredimo iznos brzine u proizvoljnoj točki cikloide. Imamo $\dot{x}(t) = a(1 - \cos t)$ i $\dot{y}(t) = a \sin t$ te je

$$\sqrt{(\dot{x}(t))^2 + (\dot{y}(t))^2} = a\sqrt{1 - 2\cos t + \cos^2 t + \sin^2 t} = a\sqrt{2 - 2\cos t}.$$

Budući da kosinus poprima vrijednosti između -1 i 1 , vidimo da iznos brzine varira od 0 (kad god je $\cos t = 1$, tj. za $t = 2k\pi$, a to su točke za koje je $y = 0$, dakle točke cikloide koje su na x -osi) do $2a$ (kad god je $\cos t = -1$, dakle za $t = (2k+1)\pi$, a to su točke za koje je $y = 2a$, tj. točke maksimuma).

Zadatak 58 Pokažite da cikloida zadovoljava diferencijalnu jednadžbu

$$(y')^2 = \frac{2a - y}{y}.$$

Napomenimo da svaki graf funkcije $y = f(x)$ za x iz nekog intervala I možemo zapisati u parametarskom obliku: Uzevši $t = x$ parametarske jednadžbe tog grafa postaju $x(t) = t$, $y(t) = f(t)$, $t \in I$.

Primjer 107 Jednadžbu parabole $y = x^2$, $x \in \mathbb{R}$, možemo parametarski zapisati kao

$$x = t, \quad y = t^2, \quad t \in \mathbb{R}.$$

3.3 Tok funkcije

3.3.1 Interpretacija predznaka prve i druge derivacije

Iz opisa derivacije kao koeficijenta smjera tangente lako je zaključiti da vrijedi (a naravno, može se i formalno dokazati):

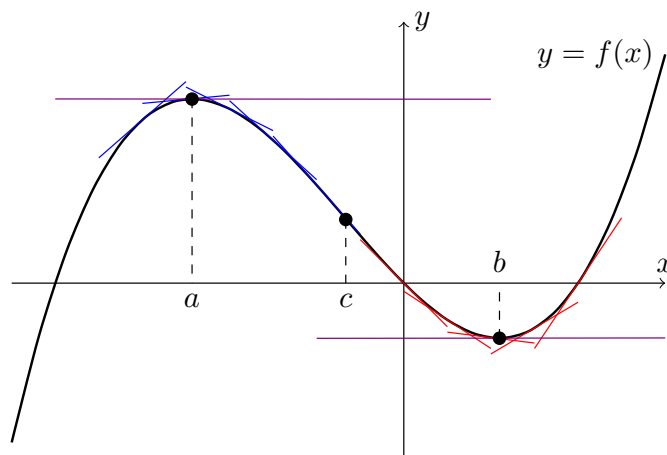
Teorem 3 (Interpretacija predznaka prve derivacije) Ako funkcija na nekom intervalu ima pozitivnu prvu derivaciju, ona (strogo) raste na tom intervalu, a ako na nekom intervalu ima negativnu prvu derivaciju, ona (strogo) pada na tom intervalu. Vrijedi i obrnuto: Rastuće derivabilne funkcije imaju pozitivnu, a padajuće derivabilne funkcije negativnu prvu derivaciju (na intervalu na kojem rastu, odnosno padaju).

Primjer 108 Funkcija čiji graf je prikazan na slici 3.11 ima pozitivnu prvu derivaciju na intervalima $\langle -\infty, a \rangle$ i $\langle b, +\infty \rangle$, a negativnu na intervalu $\langle a, b \rangle$.

Primjer 109 Dana je funkcija $f(x) = x \exp(-x^2)$. Njena prirodna domena je $\mathbb{R}$. Odredimo gdje ona raste.

Deriviranjem dobijemo $f'(x) = (1 - 2x^2) \exp(-x^2)$. Očigledno derivacija također postoji u svakoj točki $x \in \mathbb{R}$.

Rješavanjem nejednadžbe $f'(x) > 0$ dobit ćemo interval(e) na kojima f raste: $(1 - 2x^2) \exp(-x^2) > 0$ možemo podijeliti s $\exp(-x^2)$ (taj je faktor uvijek pozitivan pa ne utječe na predznak derivacije) te ostaje $1 - 2x^2 > 0$. Parabola $y = 1 - 2x^2$ je okrenuta prema dolje te je pozitivna između nultočaka $\pm \frac{1}{\sqrt{2}}$, dakle f raste na intervalu $\langle -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \rangle$.



Slika 3.11: Graf funkcije koja dijelom raste, dijelom pada, a i dijelom je konveksna, dijelom konkavna.

Primjer 110 U primjeru 51 rekli smo da se u kemijskoj kinetici brzina reakcije definira kao

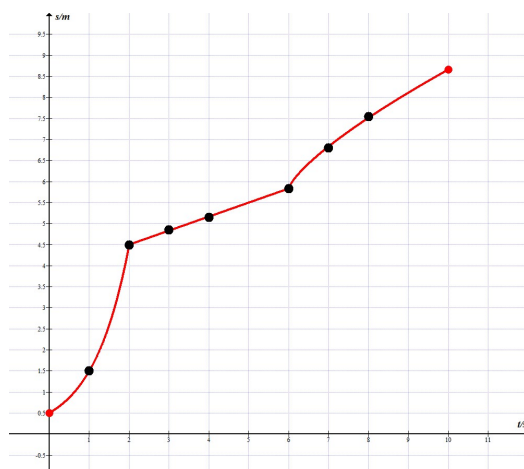
$$v = \frac{1}{\nu} \frac{dc}{dt},$$

gdje je $\nu < 0$ stehiometrijski koeficijent bilo kojeg¹⁹ sudionika reakcije i c njegova množinska koncentracija. U kemijskoj kinetici se stehiometrijski koeficijenti reaktanata uzimaju se s negativnim predznakom, a produkta s pozitivnim. Razlog je taj da u svakom slučaju dobijemo pozitivnu brzinu reakcije: Ako je odabrani sudionik produkt, njegova c je rastuća funkcija od t , dakle je $\frac{dc}{dt} > 0$ i $\nu > 0$ pa je brzina reakcije pozitivna. Ako je pak odabrani sudionik reaktant, onda je c padajuća funkcija od t pa je $\frac{dc}{dt} < 0$. Uz $\nu < 0$ vidimo da je i u ovom slučaju brzina reakcije pozitivna.

Dakle, utvrđivanjem predznaka prve derivacije možemo odrediti gdje dana funkcija raste ili pada. Budući da je $f'(x)$ nagib tangente u točki $(x, f(x))$ grafa od f i budući da je $f'' = (f')'$, gornje pravilo znači da kad je f'' pozitivna, nagibi tangenti rastu, a kad je f'' negativna padaju. Pogledamo li sliku 3.11, vidimo da prvi slučaj imamo desno od c , a drugi lijevo od c . Ta nam slika sugerira da je predznak druge derivacije funkcije povezan sa **zakrivljenosti grafa** te funkcije.

Situaciju kao na slici 3.11 lijevo od c nazivamo konkavnošću, a desno konveksnošću. Konveksnost i konkavnost imaju i svoju fizikalnu interpretaciju.

¹⁹Neovisnost definicije brzine o izboru odabranog sudionika se može dokazati preko doseg reakcije, no to nije predmet gradiva matematike.



Slika 3.12: Ovisnost puta o vremenu za gibanje koje je prvo ubrzano, zatim jednoliko, pa usporeno.

Primjer 111 Materijalna točka giba se pravocrtno tijekom 10 sekundi. Prvo se 2 sekunde giba ubrzano, zatim 4 sekunde jednoliko, a dalje usporeno. To znači da će u jednakim vremenskim intervalima unutar prve dvije sekunde prevaživati sve veće puteve: Δs će biti sve veći pri jednakim Δt . Primjerice, na slici 3.12 vidi se da je u prvoj sekundi ($\Delta t = 1$) prijeđeni put $\Delta s \approx 1$ m, a u drugoj je $\Delta s \approx 3$ m: Graf od $s = s(t)$ je za taj raspon t konveksan.

U jednakim vremenskim intervalima unutar sljedeće četiri sekunde će prevaživati jednake puteve: Δs će biti jednak pri jednakim Δt . Primjerice, na slici 3.12 vidi se da je u trećoj sekundi ($\Delta t = 1$) prijeđeni put $\Delta s \approx 0,3$ m, koliko je i u četvrtoj sekundi. Vizualno, graf od $s = s(t)$ je za taj raspon t ravan.

U jednakim vremenskim intervalima unutar zadnje četiri sekunde će prevaživati sve manje puteve: Δs će biti sve manji pri jednakim Δt . Primjerice, na slici 3.12 vidi se da je u sedmoj sekundi ($\Delta t = 1$) prijeđeni put $\Delta s \approx 1$ m, dok je u osmoj sekundi $\Delta s \approx 0,7$ m: Graf od $s = s(t)$ je za taj raspon t konkavan.

Kao i rast i pad, konveksnost („udubljenost“ grafa) i konkavnost („izbočenost“ grafa) se definiraju neovisno o pojmu derivacije.²⁰ Za nas je ovdje relevantna veza predznaka druge derivacije s konveksnosti i konkavnosti: Iz prethodog razmatranja zaključujemo da je funkcija konveksna ako joj je prva derivacija rastuća, a konkavna ako joj je prva derivacija padajuća funkcija.

Primjer 112 Pogledajmo opet graf na slici 3.12 i razmislimo o nagibima tangenti. Za vrijednosti nezavisne varijable $x = t/s$ u rasponu od 0 do 2 vidimo da nagibi

²⁰Formalna definicija glasi: Funkcija f je na intervalu I konveksna odnosno konkavna ako za svaka dva broja $x_1 < x_2$ iz tog intervala vrijedi $f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) < \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$ odnosno $f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) > \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$.

tangenti postaju sve veći kako x raste: ovisnost nagiba tangenti o x je rastuća. Budući da je nagib tangente u svakoj točki grafa derivabilne funkcije jednak prvoj derivaciji te funkcije, zaključujemo da na intervalu $[0, 2]$ derivacija funkcije $y = s/m$ (brzina) u ovisnosti o x raste. Slično, za vrijednosti nezavisne varijable x u rasponu od 6 do 10 vidimo da nagibi tangenti postaju sve manji. Stoga zaključujemo da na intervalu $[6, 10]$ derivacija funkcije y (brzina) u ovisnosti o x pada.

Formalnije iskazano:

Teorem 4 (Veza predznaka druge derivacije i zakrivljenosti grafa) *Ako funkcija na nekom intervalu ima pozitivnu drugu derivaciju, ona je konveksna na tom intervalu, a ako na nekom intervalu ima negativnu drugu derivaciju, ona je konkavna na tom intervalu. Vrijedi i obrnuto: konveksne dvaput derivabilne funkcije imaju pozitivnu, a konkavne dvaput derivabilne funkcije negativnu drugu derivaciju (na intervalima na kojima su konveksne, odnosno konkavne).*

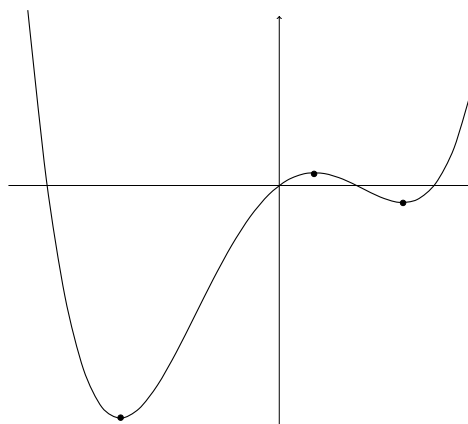
Uočimo da konveksnost i konkavnost nemaju neposredne veze s rastom i padom. Kao što vidimo primjerice na slici 3.11, funkcija može biti konveksna na nekom intervalu na kojem pada, ali i na intervalu na kojem raste ili pak na intervalu na kojem prvo pada pa onda raste. Isto tako, funkcija može biti konkavna na nekom intervalu na kojem pada, na intervalu na kojem raste, ili na intervalu na kojem prvo raste pa onda pada.

Primijetimo i da dva teorema iz ovog odjeljka možemo interpretirati i lokalno: ako je $f'(c)$ pozitivan (negativan), onda f raste (pada) na nekom intervalu oko c , a ako je $f''(c)$ pozitivan (negativan), onda je f konveksna (konkavna) na nekom intervalu oko c .

3.3.2 Lokalni ekstremi i točke infleksije

Pogledajmo opet graf na slici 3.11. Na njemu su istaknute tri točke, one s apscisama a , b i c . Za točku $(a, f(a))$ vidimo da ima najvišu poziciju, ali ne za čitav graf nego unutar prikladno uske pruge oko a . Dakle, $f(a) \geq f(x)$ za sve x iz nekog otvorenog intervala oko a . Slično, za točku $(b, f(b))$ vidimo da ima najnižu poziciju, ali ne za čitav graf nego unutar prikladno uske pruge oko b . Dakle, $f(b) \leq f(x)$ za sve x iz nekog otvorenog intervala oko b . U ovakvim slučajevima govorimo o lokalnim ekstremima funkcije:

Definicija 12 (Lokalni ekstremi) *Točka lokalnog maksimuma (odnosno minimuma) realne funkcije f je element c iz njene domene D takav da je $f(c) \geq f(x)$ (odnosno $f(c) \leq f(x)$) za sve x iz presjeka nekog otvorenog intervala koji sadrži c s domenom funkcije. Iznos $f(c)$ se u tom slučaju zove lokalni maksimum (odnosno lokalni minimum) funkcije f .*



Slika 3.13: Primjer funkcije s tri lokalna ekstrema.

Uočimo: Lokalni minimumi i maksimumi su elementi kodomene (tj. ordinate točaka grafa), dok su točke lokalnih minimuma i maksimuma elementi domene (tj. apscise točaka grafa).

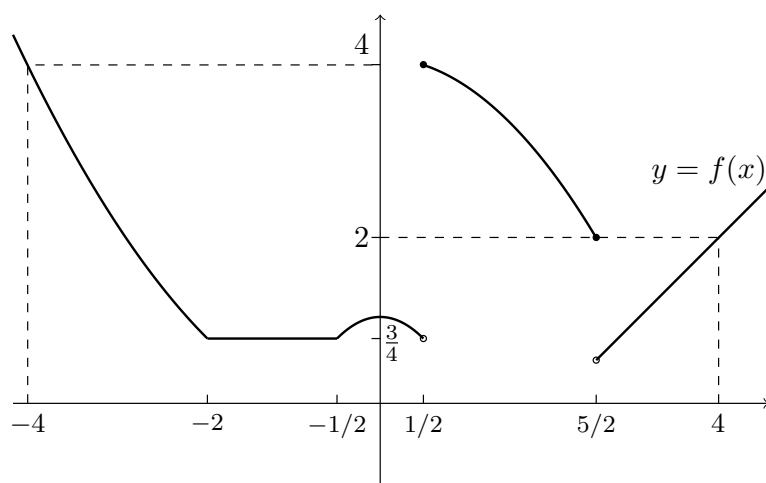
Primjer 113 Funkcija čiji je graf prikazan na slici 3.13 ima dvije točke lokalnog minimuma i jednu točku lokalnog maksimuma (to su apscise istaknutih triju točaka na grafu).

Temeljem slika 3.11 i 3.13 lako je uočiti da su točke lokalnih ekstrema derivabilne funkcije elementi njezine domene u kojima dolazi do promjene rasta u pad (točka lokalnog maksimuma) ili obrnuto (točka lokalnog minimuma). Budući da za derivabilne funkcije rast i pad vidimo iz predznaka prve derivacije (teorem 3), možemo zaključiti:

Propozicija 5 Ako je $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ derivabilna i ako u nekom $c \in I$ prva derivacija f' mijenja predznak ($f'(x) < 0$ za x iz nekog intervala $\langle a, c \rangle \subset I$ i $f'(x) > 0$ na x iz nekog intervala $\langle c, b \rangle \subset I$), onda je c točka lokalnog ekstrema funkcije f .

No, znamo da funkcije ne moraju biti svuda derivabilne. Stoga je za provjeru je li neka točka domene točka lokalnog ekstrema ili ne potrebno detaljnije proučiti graf u blizini te točke, odnosno po definiciji provjeriti radi li se o točki ekstrema ili ne. To je osobito važno za točke domene u kojima se graf razdvaja. Ovo je najlakše opisati primjerom.

Primjer 114 Graf funkcije f prikazan je slikom 3.14. Vidljivo je da je definirana na cijelom $\mathbb{R}$, ali nije derivabilna u četiri točke: -2 , $-\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}$ i $\frac{5}{2}$. Pritom je konstatna na intervalu $\langle -2, -\frac{1}{2} \rangle$.



Slika 3.14: Svi $c \in [-2, -1/2]$ su točke lokalnog minimuma i točke infleksije funkcije f , $\frac{1}{2}$ je točka lokalnog maksimuma, ali nije točka infleksije. Ostali elementi domene nisu točke lokalnih ekstrema ni točke infleksije.

Pogledajmo prvo $c = \frac{5}{2}$. Za $a < x < c$ (gdje je a bilo koji broj između $\frac{1}{2}$ i c , primjerice $a = 1$) je $f(x) > f(c) = 2$. No, za $c < x < b$ (gdje je b bilo koji broj veći od c i manji od 4, primjerice $b = 3$) je $f(x) < f(c)$. Dakle, za $x \in \langle 1, 3 \rangle$ imamo i onih za koje je vrijednost veća i onih za koje je vrijednost manja nego u c : $c = \frac{5}{2}$ nije točka lokalnog ekstrema ove funkcije.

Pogledajmo sad $c = \frac{1}{2}$. Za $a < x < c$ (gdje je a bilo koji broj između -4 i c , primjerice $a = 0$) je $f(x) < f(c) = 4$. S druge strane, za $c < x < b$ (gdje je b bilo koji broj veći od c i manji od $\frac{5}{2}$, primjerice $b = 1$) je $f(x) < f(c)$. Dakle, za sve $x \in \langle 0, 2 \rangle$ je $f(x) \leq f(c)$, odnosno $c = \frac{1}{2}$ je točka lokalnog maksimuma ove funkcije, a taj maksimum iznosi 4.

Pogledajmo sad točke -2 i $-\frac{1}{2}$. Uočljivo je da je između njih funkcija konstantna, pa skupa s njima moramo razmatrati bilo koji $c \in [-2, -1/2]$ jer svi takvi c daju isti $f(c) = \frac{3}{4}$. Ako je c jedan takav broj, pogledajmo sve $x \in \langle -3, 0 \rangle$ (dovoljno malog otvorenog intervala koji sadrži $[-2, -1/2]$). Za sve njih s grafa je vidljivo da je $f(x) \geq f(c) = \frac{3}{4}$. Stoga po definiciji zaključujemo: Svaki $c \in [-2, -1/2]$ in je točka lokalnog minimuma ove funkcije, a taj lokalni minimum iznosi $\frac{3}{4}$.

Vratimo se ponovno na sliku 3.11, ali ovaj put razmotrimo točku s apscisom c . Kao što se u a i b mijenjao rast u pad odnosno obrnuto, u točki c funkcija prelazi iz konkavne u konveksnu. Takve točke na grafu (tj. njihove apscise) nazivamo točkama infleksije:

Definicija 13 (Točka infleksije) Točka infleksije funkcije $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ je element c njezine domene sa svojstvom da je na nekom intervalu $\langle a, c \rangle \subseteq D$ funkcija f konveksna, a na nekom intervalu $\langle c, b \rangle \subseteq D$ konkavna, ili obrnuto.

Zbog veze zakrivljenosti grafa (konveksnosti odnosno konkavnosti) sa drugom derivacijom funkcije (teorem) vidimo da su za dvaput derivabilne funkcije njihove točke infleksije oni elementi domene u kojima dolazi do promjene predznaka druge derivacije.

Propozicija 6 *Ako je $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ dvaput derivabilna i ako u nekom $c \in I$ druga derivacija f'' mijenja predznak, tj. ako je c točka lokalnog ekstrema prve derivacije f' , onda je c točka lokalnog ekstrema funkcije f .*

Primjer 115 *Neka je $f(x) = x^3$. Tada je $f''(x) = 6x$, što je očito pozitivno za $x > 0$ i negativno za $x < 0$, dakle je 0 točka infleksije funkcije f .*

Kao što smo vidjeli u primjeru 111, pitanje konveksnosti i konkavnosti nije samo geometrijsko. Ovisnost puta o vremenu (kod pravocrtnog gibanja) je konveksna kad je akceleracija pozitivna, konkavna kad je negativna, a oboje (tj. pravocrtna) na intervalima na kojima je akceleracija nula.

Primjer 116 *Ako graf prikazuje ovisnost puta o vremenu nekog trkača, taj će graf u pravilu do nekog trenutka T biti konveksan, a zatim konkavan: značenje trenutka T (točke infleksije) je ovdje da je to onaj trenutak u kojem se počeo očitovati umor trkača.*

Najčešće su točke infleksije nultočke druge derivacije, no moguće je da točka infleksije bude i element domene funkcije u kojem ne postoji prva (ili druga) derivacija. Također, nije svaka nultočka druge derivacije točka infleksije.

Primjer 117 *Uzmimo funkciju $f(x) = x^4$. Za nju je $f'(x) = 4x^3$ i $f''(x) = 12x^2$. Stoga je 0 nultočka od f'' , ali znamo da graf od f nema točke infleksije.*

Kao i kod određivanja lokalnih ekstrema, tako i kod određivanja točaka infleksije posebno treba paziti kad funkcija nije derivabilna.

Primjer 118 *Za funkciju čiji graf je prikazan na slici 3.14, $\frac{1}{2}$ nije točka infleksije jer je i malo lijevo i malo desno od nje funkcija konkavna. S druge strane, sve točke u segmentu $[-2, -1/2]$ su točke infleksije. Naime, za pravce se dogovorno uzima da su istovremeno konveksni i konkavni, a s grafa vidimo da je lijevo od -2 funkcija konveksna, a desno (do $\frac{1}{2}$) konkavna.*

Zadatak 59 *Koje su točke lokalnih ekstrema i točke infleksije funkcije čiji graf je prikazan na slici 3.9?*

Kako u praksi nalazimo točke lokalnih ekstrema i točke infleksije realne funkcije jedne varijable kojoj je poznato pravilo $y = f(x)$? Kao što je vidljivo iz prethodnog, točke u kojima prva derivacija postoji i nije nula sigurno nisu točke lokalnih ekstrema, a točke u kojima druga derivacija postoji i nije nula sigurno nisu točke infleksije. Stoga zaključujemo: Ako je $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, onda je $c \in D$

- **kritična točka**, tj. moguća točka lokalnog ekstrema, ako je $f'(c) = 0$ ili ako $f'(c)$ ne postoji;
- moguća točka infleksije ako je c kritična točka od f' , tj. ako je $f''(c) = 0$ ili ako $f''(c)$ ne postoji.

U slučaju da je $f'(c) = 0$ kažemo da je c **stacionarna točka** funkcije f . Budući da je $f'(c)$ koeficijent smjera tangente na graf od f u točki s apscisom c , slijedi da su stacionarne točke funkcije one u kojima je tangenta na njezin graf horizontalna.

Prvo primijetimo da niti kritične točke funkcije ne moraju biti točke lokalnih ekstrema, niti kritične točke njene derivacije ne moraju biti točke infleksije.

Primjer 119 Ako je $f(x) = x^3$, onda je 0 kritična, štoviše stacionarna, točka funkcije f , ali nije njena točka lokalnog ekstrema.

Ako je $f(x) = x^4$, onda je 0 kritična, štoviše stacionarna, točka derivacije f' , ali nije točka infleksije funkcije f .

Dakle, prvi korak u određivanju lokalnih ekstrema je nalaženje kritičnih točaka funkcije, a prvi korak u određivanju točaka infleksije je nalaženje kritičnih točaka njene derivacije. Nakon tog je potrebno provjeriti radi li se o točkama ekstrema odnosno infleksije. Za sve funkcije koje se pojavljuju u primjenama to je izvedivo provjerama promjena predznaka prve odnosno druge derivacije, kako bismo utvrdili dolazi li u razmatranoj točki do promjene rasta u pad ili obrnuto, odnosno promjene konveksnosti u konkavnost ili obrnuto, uz odvojeno razmatranje kritičnih točaka u kojima graf „puca“ (kao u primjeru 114) i zavtorenih rubova pojedinih intervala od kojih se sastoji domena. Pritom redovno koristimo sljedeću činjenicu: Elementarna funkcija na danom intervalu ne može promijeniti predznak osim u nultočki.²¹

Primjer 120 Ovaj primjer preuzet je sa stranice [3]. Dana je funkcija

$$f(x) = x \cdot \sqrt[3]{(6-x)^2}.$$

Odredimo njene intervale rasta i pada te konveksnosti i konkavnosti i njene točke lokalnih ekstrema i točke infleksije.

Naša funkcija je elementarna, štoviše algebarska. Prirodna domena joj je $\mathbb{R}$. Derivirajmo ju dvaput:

$$f'(x) = \frac{18-5x}{3\sqrt[3]{6-x}}, \quad f''(x) = \frac{10x-72}{9\sqrt[3]{(6-x)^4}}.$$

Kritične točke funkcije f su $x_1 = 6$ (jer tu derivacija ne postoji) i stacionarna točka $x_2 = \frac{18}{5}$. Kritične točke od f' su x_1 (jer tu druga derivacija, naravno,²² ne postoji) i $x_3 = \frac{72}{10}$, koja je stacionarna točka od f' .

²¹To svojstvo općenito imaju sve neprekidne, ne samo elementarne funkcije.

²²Očigledno je da ako u točki domene ne postoji prva derivacija, tu ne može postojati ni druga.

Kritične točke od f dijele domenu na tri intervala: lijevo od x_2 , između x_2 i x_1 te desno od x_1 . Na svakom od njih je f' elementarna funkcija pa ne može promijeniti predznak. Stoga je dovoljno uvrstiti po jednu točku iz tih intervala da utvrdimo predznak od f' . Uvrstimo li redom, primjerice, 0, 5 i 10 vidimo da je f' pozitivna na prvom i trećem intervalu, a negativna između, dakle funkcija f raste pa pada pa raste, odnosno x_2 je točka lokalnog maksimuma, a x_1 točka lokalnog minimuma funkcije f .

Kritične točke od f' dijele domenu na tri intervala: lijevo od x_1 , između x_1 i x_3 te desno od x_3 . Za provjeru predznaka sad bismo mogli s f'' postupiti kao maločas s f' , no u ovom slučaju provjera predznaka je jednostavnija ako pogledamo formulu od f'' . Naime, nazivnik od f'' ne može biti negativan pa je predznak od $f''(x)$ isti kao predznak od $10x - 72$. To je rastuća afina funkcija pa je pozitivna desno od svoje nultočke x_3 , a negativna lijevo. Dakle, f'' je pozitivna za $x > x_3$, a negativna svuda (osim u x_1) za $x < x_1$. Dakle, f'' ne mijenja predznak u x_1 , ali mijenja u x_3 te je x_3 točka infleksije funkcije f .

Ovaj postupak praktično je sažeti u tablicu temeljem koje je lako skicirati i graf funkcije f :

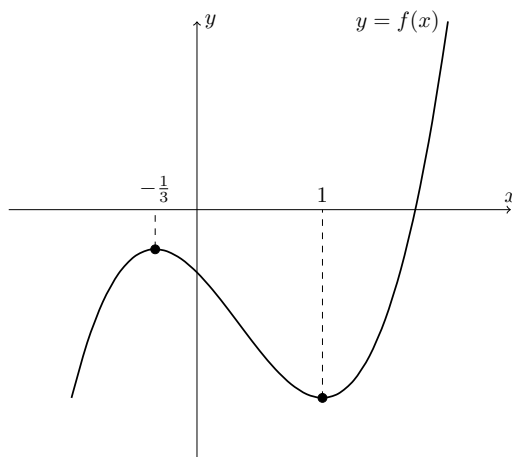
x	x_2			x_1		x_3	
$f(x)$	—	0	+	+	+	+	+
$f(x)$	$\nearrow$	lok.maks.	$\searrow$	lok.min.	$\nearrow$	$\nearrow$	$\nearrow$
$f(x)$	konk.	konk.	konk.	konk.	konk.	t.i.	konv.
$f'(x)$	+	0	—	*	+	+	+
$f''(x)$	—	—	—	*	—	0	+

Primjer 121 Neka je $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x \exp(x)$. Tada je $f'(x) = (x + 1) \exp(x)$ te f nema stacionarnih točaka (-1 nije u domeni). Stoga je jedina kritična točka funkcije f točka $c = 0$. Je li 0 točka lokalnog ekstrema? Pogledajmo predznak $f'(x)$ na $\langle 0, 5 \rangle$. Za $0 < x < 5$ je $x + 1 > 0$ i $\exp(x) > 0$, dakle $f'(x) > 0$, tj. f raste desno od 0, a lijevo nije definirana. Stoga je 0 točka lokalnog minimuma od f . Slično se vidi i da je f konveksna na cijeloj domeni.

Zadatak 60 Odredite lokalne ekstreme i točke infleksije funkcije zadane po dijelovima s

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{20}(x^3 - x^2), & -2 < x < 1, \\ \log(3x + 2 - x^2), & 1 \leq x < 2, \\ \frac{1}{x^2 + 1}, & x \geq 3 \end{cases}.$$

Za mnoge rutinske situacije u kojima tražimo samo točke lokalnih ekstrema dvaput derivabilnih funkcija postupak se može pojednostaviti. Naime, kako je vidljivo primjerice sa slike 3.13, u točki lokalnog maksimuma dvaput derivabilne funkcije prva derivacija je nula (tangenta je horizontalna), a druga negativna (funkcija je konkavna). Slično, u točki lokalnog minimuma dvaput derivabilne funkcije prva derivacija je nula (tangenta je horizontalna), a druga pozitivna (funkcija je konveksna). To nam daje sljedeći teorem:



Slika 3.15: Ilustracija uz primjer 122.

Teorem 5 *Neka je c element domene realne funkcije f jedne varijable koja je dvaput derivabilna na nekom intervalu oko c . Ako je $f'(c) = 0$ i $f''(c) > 0$, onda je c točka lokalnog minimuma funkcije f . Ako je $f'(c) = 0$ i $f''(c) < 0$, onda je c točka lokalnog maksimuma funkcije f .*

Primjer 122 *Primjenom gornjeg pravila odredimo lokalne ekstreme funkcije $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 - x^2 - x - \frac{1}{2}$.*

Budući da se radi o polinomu na njegovoj prirodnoj domeni, funkcija je dvaput derivabilna svuda i jedini kandidati za točke lokalnih ekstrema su njezine stacionarne točke. Budući da je $f'(x) = 3x^2 - 2x - 1$, stacionarne točke su $x_1 = 1$ i $x_2 = -\frac{1}{3}$. Druga derivacija te funkcije je $f''(x) = 6x - 2$. Uvrstimo x_1 i x_2 u f'' : $f''(1) = 4 > 0$ i $f''(-1/3) = -4 < 0$. Stoga je 1 točka lokalnog minimuma, a $-\frac{1}{3}$ točka lokalnog maksimuma.

Dakle, $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 - x^2 - x - \frac{1}{2}$ ima lokalni minimum $f(1) = -\frac{3}{2}$ i lokalni maksimum $f(-\frac{1}{3}) = -\frac{53}{54}$. Odgovarajući graf prikazan je slikom 3.15.

U prethodnom primjeru, lokalni minimum je bio (očekivano) manji od lokalnog maksimuma, no to ne mora uvijek vrijediti.

Primjer 123 *Neka je $f(x) = \frac{x^2}{x-1}$. Jedine kritične točke te funkcije su njezine stacionarne točke $x_1 = 0$ i $x_2 = 2$ (sami provjerite). Lako se provjeri da je $f''(x_1) < 0$ i $f''(x_2) > 0$, dakle je x_1 točka lokalnog maksimuma, a x_2 točka lokalnog minimuma. No, $f(x_1) = 0 < 4 = f(x_2)$.*

Vidimo da je postupak određivanja lokalnih ekstrema na temelju teorema 5 lako zapamtiti, a u pravilu je i efikasno provediv. No, podsjećamo da taj postupak

nije primjenjiv ako je c kritična točka funkcije f koja je ujedno kritična točka od f' (tj. kad $f'(c)$ ne postoji), a ne daje odluku ako je $f'(c) = f''(c) = 0$.

Za kraj ovog odjeljka, riješimo dva primijenjena primjera, koji će nam ujedno poslužiti kao uvod u temu globalnih ekstrema.

Primjer 124 *U statističkoj termodinamici i kinetičkoj teoriji plinova se vjerojatnost da se čestica kreće brzinom iznosa $v \geq 0$ opisuje formulom Maxwell-Boltzmannove funkcije gustoće vjerojatnosti.*

$$f_{\text{MB}}(v) = 4\pi \left(\frac{m}{2\pi k T} \right)^{3/2} v^2 \exp \left(-\frac{m v^2}{2k T} \right).$$

Tu je m masa razmatrane čestice, T je temperatura, a $k > 0$ je Boltzmannova konstanta.

Često se u zadacima postavlja pitanje poput sljedećeg: Koja je najvjerojatnija brzina dušikove molekule pri temperaturi 20°C ? Takva formulacija pitanja nije matematički korektna. Naime, kad se opisuje vjerojatnost da neko opažanje poprimi određenu vrijednost koja može biti bilo koja unutar nekog intervala realnih brojeva, onda je vjerojatnost opažanja bilo kojeg konkretnog pojedinačnog iznosa uvijek jednaka 0. Također, iznos funkcije gustoće vjerojatnosti u pojedinoj točki nije vjerojatnost događaja: $f_{\text{MB}}(v)$ nije vjerojatnost da se čestica kreće brzinom v . U ovakvim slučajevima se vjerojatnosti računaju integriranjem funkcije gustoće (vidi odjeljak 3.6).

Ono što osoba koja je postavila pitanje tipa „Koja je najvjerojatnija brzina određene čestice pri određenoj temperaturi“ zapravo želi pitati je: Koja je točka maksimuma v^* funkcije f_{MB} za zadani m i T ?

Označimo $A = 4\pi \left(\frac{m}{2\pi k T} \right)^{3/2}$, $B = \frac{m}{2k T}$. Sad naša funkcija ima pregledniji oblik

$$f_{\text{MB}}(v) = A v^2 \exp(-B v^2), \quad v \geq 0$$

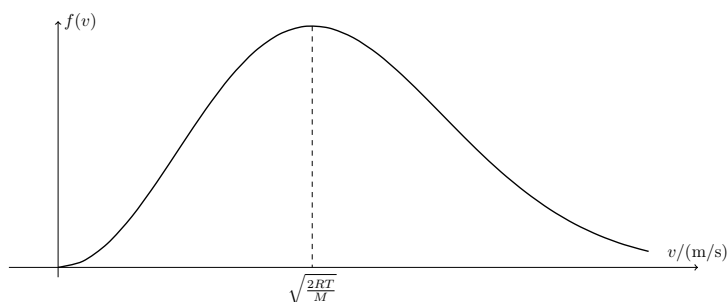
te je

$$f'_{\text{MB}}(v) = 2A v \exp(-B v^2)(1 - B v^2), \quad v > 0.$$

Kritične točke su 0 (zatvoreni rub domene) i stacionarna točka $v_1 = +\sqrt{\frac{1}{B}}$. Za v između 0 i v_1 je $f'_{\text{MB}}(v) > 0$, a za $v > v_1$ je $f'_{\text{MB}}(v) < 0$ pa je $v^* = v_1 = \sqrt{\frac{2RT}{M}}$ točka lokalnog maksimuma od f_{MB} . No, ona je ujedno i točka globalnog maksimuma jer je f_{MB} definirana na jednom intervalu i svuda lijevo od nje raste, a desno pada. Graf funkcije f_{MB} možete vidjeti na slici 3.16.

Primjer 125 *Lennard-Jonesov potencijal opisuje ovisnost potencijalne energije V dviju nenabijenih čestica o njihovoj udaljenosti $r > 0$:*

$$\frac{V}{\varepsilon} = \left(\frac{r_{\min}}{r} \right)^{12} - 2 \left(\frac{r_{\min}}{r} \right)^6, .$$



Slika 3.16: Graf Maxwell-Boltzmannove funkcije gustoće vjerojatnosti.

Uz supstituciju

$$y = \frac{V}{\varepsilon}, \quad x = \frac{r}{r_{\min}}$$

formula Lennard-Jonesovog potencijala svodi se na

$$y = \frac{1}{x^{12}} - \frac{2}{x^6}.$$

Tu formulu ne gledamo na njenoj prirodnoj domeni $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, nego samo na za ovaj primjer prikladnoj domeni $\langle 0, \infty \rangle$. Derivirajmo y :

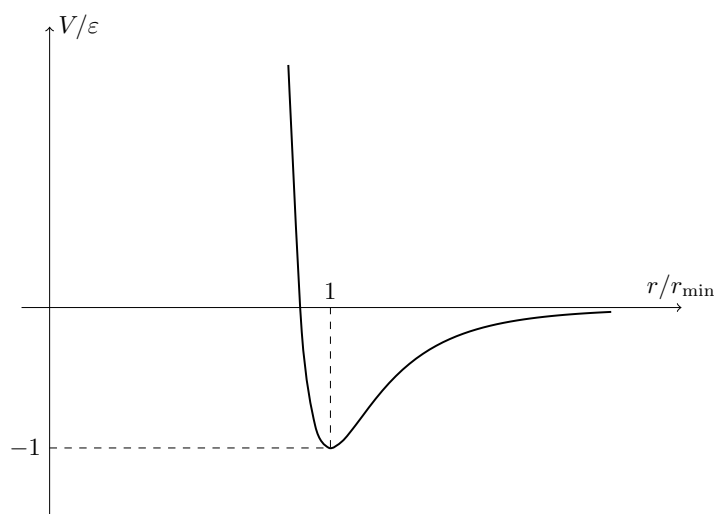
$$y' = -\frac{12}{x^{13}} + \frac{12}{x^7} = 12 \cdot \frac{x^6 - 1}{x^{13}}.$$

Vidimo da je y' definirana svuda gdje i y , dakle su jedine kritične točke stacionarne točke. Jedina stacionarna točka je $x_0 = 1$ (što odgovara iznosu $r = r_{\min}$). Iz formule za y' odmah vidimo da je $y' > 0$ za $x > x_0$, a $y' < 0$ za $0 < x < x_0$, dakle je točka 1 točka lokalnog minimuma.

No, saznali smo i više: Funkcija na cijeloj domeni koja se sastoji od samo jednog intervala lijevo od 1 pada, a desno raste, pa zaključujemo da se ujedno radi o točki s najmanjom mogućom vrijednosti funkcije na čitavoj domeni, a ne samo lokalno. Budući da je $y(1) = -1$, vidimo da je za $r = r_{\min}$ iznos Lennard-Jonesovog potencijala $V = -\varepsilon$, dakle je ε suprotna vrijednost dubine tzv. potencijalnog bunara (vidi sliku 3.17).

3.3.3 Globalni ekstremi

U primjeru 125 imali smo situaciju da je lokalni minimum bio manji od svih ostalih vrijednosti funkcije, na cijeloj njezinoj domeni. Slično je u primjeru 124 postojao samo jedan lokalni maksimum i on je bio veći od svih ostalih vrijednosti funkcije. U takvim situacijama govorimo o globalnom (ili apsolutnom) minimumu funkcije. Preciznije:



Slika 3.17: Graf Lennard-Jonesovog potencijala.

Definicija 14 (Globalni ekstremi) *Točka globalnog maksimuma (odnosno minimuma) realne funkcije f jedne varijable je element c iz njene domene D takav da je $f(c) \geq f(x)$ (odnosno $f(c) \leq f(x)$) za sve $x \in D$. Iznos $f(c)$ se u tom slučaju zove globalni maksimum (odnosno minimum) funkcije f .*

Globalni ekstremi, kao uostalom ni lokalni, ne moraju postojati.

Primjer 126 *Funkcija čiji je graf prikazan na slici 3.13 ima dvije točke lokalnog minimuma, od kojih je jedna ujedno točka globalnog minimuma. Ta funkcija ne postiže globalni maksimum iako ima jednu točku lokalnog maksimuma.*

Geometrijski, točka globalnog maksimuma (odnosno minimuma) je apscisa najviše (odnosno najniže) točke na čitavom grafu. Funkcija može imati više točaka globalnih maksimuma (ili minimuma), no svi globalni maksimumi (odnosno minimumi) moraju imati isti iznos. Dakle, globalni maksimum odnosno globalni minimum funkcije je (ako postoji) jedinstven, ali točka globalnog maksimuma odnosno globalnog minimuma ne mora biti jedinstvena.

Primjer 127 *Svi brojevi $c = 2k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$) su točke globalnog maksimuma funkcije kosinus. U svima njima kosinus postiže globalni maksimum $\cos(2k\pi) = 1$.*

Prva što bismo mogli pomisliti je da globalni maksimum (ili minimum) možemo odrediti tako da među točkama lokalnih maksimuma (minimuma) odaberemo onu u kojoj funkcija postiže najveću (najmanju) vrijednost. No, čak i kad postoje lokalni ekstremi, ne znači da je neki od njih globalan. Također, mnogi će pomisliti da ako imamo samo jednu točku lokalnog ekstrema da se radi o točki globalnog ekstrema. Oba takva zaključivanja nisu ispravna.

Primjer 128 Funkciji čiji graf je prikazan slikom 3.15 u primjeru 122 smo odredili točke lokalnih ekstrema, no sa slike je vidljivo da jedini lokalni maksimum nije globalni maksimum jer funkcija poprima proizvoljno velike vrijednosti za velike vrijednosti varijable x . Isto tako, jedini lokalni minimum nije globalni minimum jer funkcija poprima proizvoljno male vrijednosti za male vrijednosti varijable x .

Primjer 129 U fizici i fizikalnoj kemiji se u svrhu određivanja ravnotežnog stanja često trebaju odrediti (globalni) minimumi funkcija koje predstavljaju različite vrste energije. Primjerice, odredimo kada će Gibbsova energija G smjese dvaju enantiomera biti najmanja, ako je poznato da joj je ovisnost o množinskoj koncentraciji c jednog od njih opisana formulom

$$G = G^\circ + RTc \ln \frac{c}{\text{mol/L}} + \frac{RT(c_0 - c)}{\text{mol/L}} \ln \left(\frac{c_0 - c}{\text{mol/L}} \right)$$

pri sve oznake osim G i c predstavljaju pozitivne konstante.

Stavimo $x = \frac{c}{\text{mol/L}}$, $x_0 = \frac{c_0}{\text{mol/L}}$ i $g(x) = \frac{G}{J}$ pa funkcija poprima oblik

$$g(x) = a + bx \ln x + b(x_0 - x) \ln(x_0 - x),$$

s konstantnim $a, b > 0$. Prirodna domena te funkcije je $\langle 0, x_0 \rangle$ i ona je ujedno i domena u danom kontekstu (očito je $0 < c < c_0$ u formuli od G). Deriviranjem dobijemo

$$g'(x) = b \ln \frac{x}{x_0 - x}.$$

Ta je derivacija definirana svuda gdje i g , pa su jedine kritične točke funkcije g njezine stacionarne točke. Derivacija $g'(x)$ je 0 kad je $\frac{x}{x_0 - x} = 1$, dakle je jedina stacionarna točka $x^* = \frac{x_0}{2}$. Za $x < x^*$ je $g'(x) < 0$, a za $x > x^*$ je $g'(x) > 0$, dakle g je definirana na intervalu i pada za $x < x^*$, a raste za $x > x^*$. Zaključujemo da je x^* točka globalnog minimuma funkcije g , odnosno Gibbsova energija G je minimalna kad je $c = \frac{c_0}{2}$ i iznosi $G(x^*) = G^\circ + RTc_0 \ln \frac{c_0}{2c}$.²³

Općenito, za određivanje globalnih ekstrema potrebno je ispitati cijeli tok funkcije, posebno intervale rasta i pada te asimptote.

Jednu situaciju kad nije teško odrediti globalne ekstreme je situacija kao u primjeru 125: Ako je domena funkcije f samo jedan interval i ako funkcija unutar tog intervala u samo jednoj kritičnoj točki mijenja rast u pad ili pad u rast (ima samo jednu točku lokalnog ekstrema), radi se o točki globalnog ekstrema.

Osim takvog slučaja postoji još jedan, u primjenama vrlo čest, slučaj za koji postoji „šablonski” postupak za određivanje globalnih ekstrema. Taj postupak se oslanja na sljedeći teorem:

²³Smisao konstante c_0 je da je to zbroj koncentracija spomenutih enantiomera, dakle se minimum postiže kad jedan od njih ima pola ukupne koncentracije što znači da toliko ima i drugi, tj. G je minimalna ako su koncentracije oba enantiomera jednake.

Teorem 6 (Bolzano-Weierstraß) *Ako je $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ neprekidna²⁴, onda f postiže i globalni minimum m i globalni maksimum M i sve međuvrijednosti između njih, tj. slika joj je segment $[m, M]$.*

Budući da smo zbog Bolzano-Weierstraßovog teorema sigurni da neprekidna funkcija na segmentu postiže oba globalna ekstrema, a očito je svaki globalni ekstrem ujedno i lokalni, zaključujemo: Za određivanje globalnih ekstrema neprekidne funkcije $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ dovoljno je odrediti sve njene kritične točke u segmentu $[a, b]$ i usporediti vrijednosti funkcije f u njima. Sve elementarne funkcije zadane na segmentu su neprekidne pa je navedeni postupak specijalno primjenjiv na njih.

Primjer 130 *Neka je $f : [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ zadana s $f(x) = x^3 - x^2 - x - \frac{1}{2}$. Tada je $f'(x) = 3x^2 - 2x - 1$ te su stacionarne točke rješenja jednadžbe $3x^2 - 2x - 1 = 0$ koja se nalaze u intervalu $\langle 0, 2 \rangle$. Rješavanjem te jednadžbe dobijemo $x_1 = 1 \in \langle 0, 2 \rangle$ i $x_2 = -\frac{1}{3} \notin \langle 0, 2 \rangle$. Stoga je jedina stacionarna točka ove funkcije $x_1 = 1$.*

Nadalje, funkcija je polinom 3. stupnja. Stoga nema točaka u kojima nije derivabilna unutar intervala $\langle 0, 2 \rangle$. No, kako smo vidjeli na str. 91, f nije derivabilna u 0 i 2. Dakle, kritične točke od f su 0, 1 i 2. Funkcija je elementarna, pa se na nju može primijeniti Bolzano-Weierstraßov teorem. Zaključujemo da je bar jedna od njenih kritičnih točaka točka globalnog minimuma i bar jedna je točka globalnog maksimuma. Uvrstimo sve kritične točke u f :

$$f(0) = 0,5, \quad f(1) = -1,5, \quad f(2) = 1,5.$$

Vidimo da najmanju vrijednost $-1,5$ funkcija postiže u 1 te joj je 1 točka globalnog minimuma, a najveća je vrijednost $1,5$ u 2 te joj je to točka globalnog maksimuma. Odgovarajući graf vidljiv je na slici 3.18.

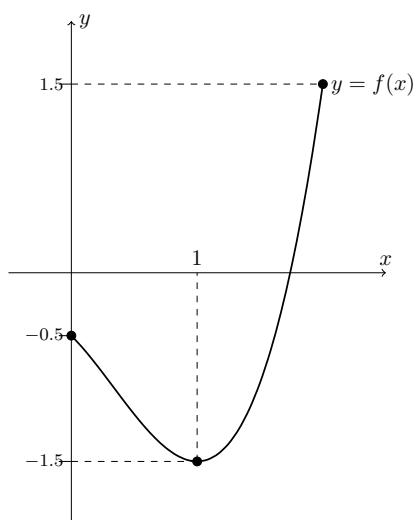
Zadatak 61 *Odredite lokalne i globalne ekstreme funkcije iz prethodnog primjera, ali na njezinoj prirodnoj domeni.*

Primijetimo da nam i ovaj primjer ponovno pokazuje da nam funkciju ne čini samo pravilo, već i njena domena (i kodomena) — za dvije različite domene uz isto pravilo jednom smo imali funkciju bez globalnih ekstrema, a drugi put s globalnim ekstremima.

Zadatak 62 *U ovisnosti o $a > 0$ odredite globalne ekstreme funkcije $f : [0, a] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = (x + 5)^2 * \exp(-1/(x - 5)^2)$.*

U većini primjena od interesa su prvenstveno globalni ekstremi. Primjerice, sad smo konačno u stanju odgovoriti na predzadnje još otvoreno pitanje iz našeg motivacijskog primjera 48.

²⁴Precizno ćemo to definirati u odjeljku 3.4.2, zasad uzimamo: Ako je funkcija zadana na segmentu ili općenitije samo jednom intervalu, ona je neprekidna ako joj se graf može nacrtati u jednom potezu, bez podizanja olovke s papira.



Slika 3.18: Ilustracija uz primjer 130.

Primjer 131 U primjeru 67 vidjeli smo da je za primjer 48 funkcija brzine dana s

$$v(t) = -0,100 \frac{\text{m}}{\text{s}^4} t^3 + 3,00 \frac{\text{m}}{\text{s}^3} t^2 + 35 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Pritom je traženo da se odredi maksimalna brzina rakete tijekom prvih 30 sekundi, dakle globalni maksimum funkcije $v = v(t)$ na domeni $[0, 30 \text{ s}]$. Supstituiramo li $x = \frac{t}{\text{s}}$ i $y = \frac{v}{\text{m/s}}$ u gornju formulu dobit ćemo isti zadatak u preglednijem obliku: Treba odrediti maksimum funkcije $y = -\frac{1}{10}x^3 + 3x^2 + 35$ na $[0, 30]$. Radi se o polinomu, dakle neprekidnoj funkciji pa je primjenjiv opisani postupak. Kritične točke su 0 i 30 jer tu funkcija nije derivabilna, te stacionarne točke unutar intervala $\langle 0, 30 \rangle$: $y' = -\frac{3}{10}x^2 + 6x$ je 0 za $x = 0$ (nije stacionarna točka jer tamo derivacija ne postoji) i $x = 20$. Dakle, imamo tri kritične točke: 0, 20 i 30. U njima y redom poprima vrijednosti 35, 435 i 35. Dakle, maksimalna brzina je postignuta u 20. sekundi i iznosi 435 m/s.

Primjer 132 U termodinamici se može razmatrati tzv. dvofazna reverzibilna adijabatska kompresija idealnog plina. Poznato je da je tada iznos pV^γ konstantan, gdje je $\gamma \in \langle 0, 1 \rangle$ konstanta. Rad pri takvom procesu opisan je formulom

$$W = nRT \frac{\gamma}{\gamma - 1} \left(\left(\frac{p}{p_1} \right)^{(\gamma-1)/\gamma} + \left(\frac{p_2}{p} \right)^{(\gamma-1)/\gamma} - 2 \right).$$

Pritom su p_1 i p_2 početni odnosno konačni tlak (budući da se radi o kompresiji je $p_2 < p_1$), a n , R i T su pozitivne konstante. Pri kojem je tlaku rad minimalan?

Uz $a = nRT > 0$, $g = \frac{\gamma-1}{\gamma} < 0$ formula poprima pregledniji oblik

$$W(p) = \frac{a}{g} \left(\frac{p^g}{p_1^g} + p_2^g p^{-g} - 2 \right).$$

Domena funkcije W je interval $[p_2, p_1]$. Deriviranjem dobijemo

$$\frac{dW}{dp} = \frac{a}{g} \left(g \frac{p^{g-1}}{p_1^g} - g p_2^g p^{-g-1} \right).$$

Jedina stacionarna točka funkcije W je geometrijska sredina²⁵ početnog i konačnog tlaka

$$p^* = +\sqrt{p_1 p_2}.$$

Uz to, kritične točke su i rubovi domene, dakle p_1 i p_2 . Iako bismo sad mogli vrstiti p_1 , p_2 i p^* u W , zaključivanje gdje je W najmanji bi u ovom slučaju bilo relativno komplicirano jer su iznosi svih konstanti neodređeni. Stoga je ovdje jednostavnije primijeniti već ranije opisanu mogućnost zaključivanja o globalnim ekstremima za elementarne funkcije kojima je domena interval: Za $p < p^*$ je $\frac{dW}{dp}$ negativan, a za $p > p^*$ pozitivan, pa je p^* točka globalnog minimuma od W .

3.3.4 Asimptote grafova

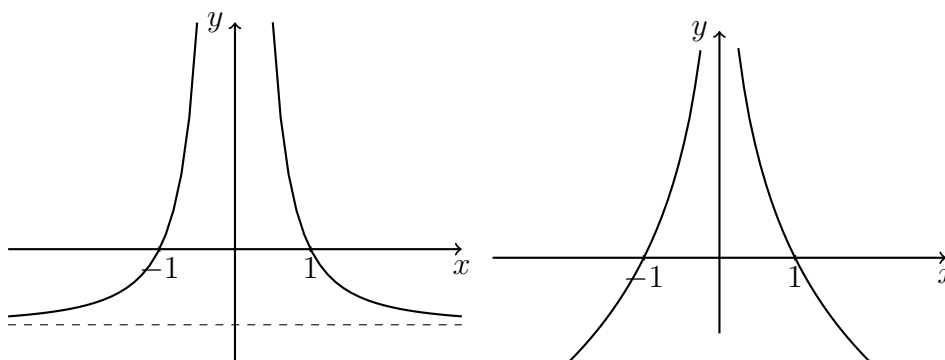
Da bismo mogli kvalitetno skicirati graf realne funkcije jedne varijable $y = f(x)$, već smo vidjeli neke osnovne korake:

1. Određivanje prirodne domene funkcije, ako domena nije eksplicitno zadana i određivanje sjecišta grafa s koordinatnim osima (uvrštavanje 0 u funkciju ako je 0 u domeni za sjecište s osi ordinata i rješavanje jednadžbe $f(x) = 0$, ako je ista rješiva elementarnim metodama, za sjecišta grafa s osi apscisa), vidi str. 59;
2. Ispitivanje rasta, pada i lokalnih ekstrema te konveksnosti, konkavnosti i točaka infleksije (odjeljci 3.3.1 i 3.3.2).

No, gornje dvije točke nisu dovoljne za određivanje svih bitnih karakteristika grafa funkcije.

Primjer 133 Usporedimo funkcije $f(x) = \frac{1}{x^2} - 1$ i $g(x) = -\ln(x^2)$. Objema je prirodna domena $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, objema su sjecišta s osi apscisa ± 1 , obje imaju prvu derivaciju pozitivnu za negativne brojeve i obrnuto, tj. obje rastu za $x < 0$ i padaju za $x > 0$ te nemaju lokalnih ekstrema, obje na cijeloj domeni imaju pozitivnu drugu derivaciju, dakle su svud konveksne te nemaju točaka infleksije. No, njihovi grafovi su bitno različiti, kako je vidljivo na slici 3.19: Dok funkcija f nigdje ne poprima vrijednost -1 niti manju, funkcija g poprima sve negativne vrijednosti.

²⁵Aritmetička sredina dva broja definira se kao pola njihovog zbroja, a geometrijska (ako postoji) kao drugi korijen njihova umnoška.



Slika 3.19: Grafovi funkcija $f(x) = \frac{1}{x^2} - 1$ i $g(x) = -\ln(x^2)$.

Iz prethodnog primjera je vidljivo da za potpuno određivanje toka funkcije treba odrediti i asimptote. Horizontalne i vertikalne asimptote već smo opisali u odjeljku o racionalnim funkcijama, a sad ćemo uvesti i pojam **kose asimptote**: Za funkciju $y = f(x)$ kažemo da je pravac $y = kx + \ell$ (s $k \neq 0$) njezina kosa asimptota ako što je x veći (ili manji), to je $f(x) - kx$ bliži iznosu ℓ , tj. ako je $y = \ell$ horizontalna asimptota funkcije $g(x) = f(x) - kx$. Primjerice, racionalne funkcije kojima je stupanj brojnika za 1 veći od stupnja brojnika imaju (obostrane) kose asimptote.

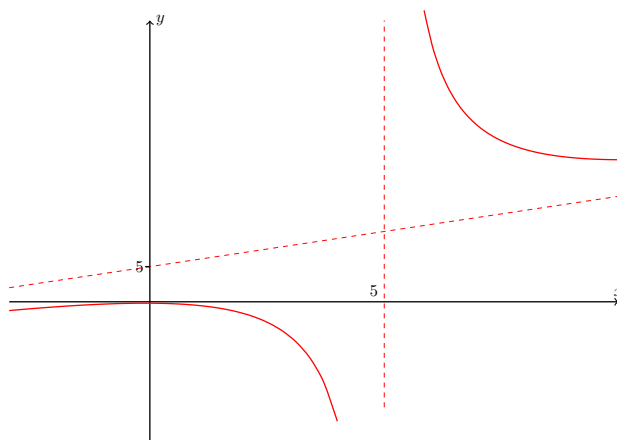
Primjer 134 Promotrimo funkciju $f(x) = \frac{x^2+1}{x-5} = 5 + x + \frac{26}{x-5}$. Ako je x jako velik ili mali, onda je $\frac{26}{x-5} \approx 0$ pa je $f(x) - x \approx 5$, tj. ova funkcija ima pravac $y = x + 5$ kao kosu asimptotu, što je ilustrirano slikom 3.20.

Općenito, zbog jednoznačnosti pridruživanja u funkcijama, realne funkcije jedne varijable imaju najviše dvije kose ili horizontalne asimptote, jednu lijevo, drugu desno. Također, ako na jednoj strani imaj horizontalnu asimptotu, na toj strani ne mogu imati kosu i obrnuto.

Kako je vidljivo iz opisa smisla horizontalnih, vertikalnih i kosih asimptota, u svim slučajevima imamo opise koji po dvaput sadrže izraze tipa

što je varijabla (nezavisna ili zavisna) bliža nekom $\heartsuit$,

pri čemu je $\heartsuit$ nekad realan broj, a nekad $-\infty$ ili $+\infty$. Pritom, varijabla postaje sve bliža $+\infty$ znači da postaje proizvoljno velika, a varijabla postaje sve bliža $-\infty$ znači da postaje proizvoljno mala: Ma kako velik ili mali broj zamislili, varijabla će poprimiti i vrijednosti veće odnosno manje od njega. Također, varijabla postaje sve bliža broju c znači da mu prilazi proizvoljno blizu, tj. ma koliko malu udaljenost od c zamislili ima vrijednosti te varijable koje su na manjoj udaljenosti od c , pri čemu se sama vrijednost c ne mora postići. Takve rečenice zapisujemo simbolički koristeći simbol $\rightarrow \heartsuit$ koji se čita „teži u $\heartsuit$ “.



Slika 3.20: Primjer funkcije ($f(x) = \frac{x^2+1}{x-5}$) s kosom asimptotom ($y = x + 5$).

Primjer 135 Oznaka $x \rightarrow 5$ čita se „ x teži u 5“, a znači da x prilazi proizvoljno blizu 5, tj. da poprima sve vrijednosti iz nekog otvorenog intervala I takvog da je $5 \in I$, osim eventualno iznosa točno 5.

Oznaka $y \rightarrow -\infty$ čita se „ y teži u minus beskonačno“, a znači da iznosi y postaju proizvoljno mali.

Pritom, kad $x \rightarrow c \in \mathbb{R}$ možemo se ograničiti da x teži u c samo s jedne strane: samo po brojevima većim (x teži zdesna u c , simbolički $x \rightarrow c+$) ili samo po brojevima manjim od c (x teži slijeva u c , simbolički $x \rightarrow c-$).

Sad možemo kraće zapisati definicije triju vrsta asimptota:

- Pravac $x = c$ je vertikalna asimptota funkcije f ako $f(x) \rightarrow +\infty$ ili $f(x) \rightarrow -\infty$ kad $x \rightarrow c$ s bar jedne strane.
- Pravac $y = L$ je horizontalna asimptota funkcije f ako $f(x) \rightarrow L$ kad $x \rightarrow +\infty$ ili kad $x \rightarrow -\infty$.
- Pravac $y = kx + \ell$ je kosa asimptota ako $k \neq 0$ i $f(x) - kx \rightarrow \ell$ kad $x \rightarrow +\infty$ ili kad $x \rightarrow -\infty$.

Vidimo dakle da za ispitivanje asimptota funkcije moramo biti u stanju provjeriti kako se ponašaju iznosi $f(x)$ kad $x \rightarrow c \in \mathbb{R}$ i $x \rightarrow \pm\infty$. To se radi pomoću **limesa funkcija**.

Pritom, **limesi funkcija u beskonačnosti** su oni koji se tiču situacija kad $x \rightarrow +\infty$ i(li) $x \rightarrow -\infty$ i želim opisati kako se tada ponašaju vrijednosti $f(x)$. Takvi limesi označavaju se s

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \quad \text{odnosno} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x).$$

Pritom, takav limes je jednak nekom realnom broju L ako kad $x \rightarrow +\infty$ (odnosno $x \rightarrow -\infty$) vrijedi da $f(x) \rightarrow L$. Tada kažemo da limes od $f(x)$ kad x teži u plus odnosno minus beskonačnost postoji i pišemo:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L \quad \text{odnosno} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L.$$

Uočimo da budući da želimo $f(x) \approx L$, to znači da ćemo poziciju tog L vidjeti na osi ordinata. Primijetimo da prvi od gornja dva limesa ima smisla tražiti samo ako domena od f sadrži proizvoljno velike x , a drugi samo ako domena sadrži proizvoljno male x .

Primjer 136 *Nema smisla računati $\lim_{x \rightarrow -\infty} \ln x$ ni $\lim_{x \rightarrow +\infty} \arcsin x$.*

Dakle, funkcije koje nisu definirane do $+\infty$ nemaju ni desnu horizontalnu ni desnu kosu asimptotu, a funkcije koje nisu definirane do $-\infty$ nemaju ni lijevu horizontalnu ni desnu lijevu asimptotu. Ako ispitivanje horizontalnih i kosih asimptota dane funkcije ima smisla na obje strane, treba ga obaviti odvojeno jer nije nužno da asimptota na lijevoj strani bude jednaka onoj na desnoj strani, štoviše moguće je da funkcija — primjerice eksponencijalna — na jednoj strani ima, a na drugoj nema horizontalnu ili kosu asimptotu.

Dakle, iz perspektive toka funkcije limesi u beskonačnosti su nam potrebni za ispitivanje horizontalnih i kosih asimptota. Budući da smo pojam kose asimptote sveli na pojam horizontalne, dovoljno je reći kakav treba biti limes u beskonačnosti funkcije za postojanje horizontalne asimptote:

Propozicija 7 *Pravac $y = L$ je horizontalna asimptota (lijevo ili desno) funkcije f ako i samo ako je $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L$ ili $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L$.*

Primjer 137 *Funkcija $y = \frac{1}{x}$ ima obostranu horizontalnu asimptotu $y = 0$, tj. vrijedi $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{x} = 0$. Slično, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \exp(-x) = 0$, ali $\lim_{x \rightarrow -\infty} \exp(-x)$ nije realan broj (ne postoji).*

Primjer 138 *Za funkciju f iz primjera 133 vrijedi $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = -1$, dok za funkciju g ta dva limesa ne postoje.*

Primjer 139 *Izračunajmo limes $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\sin x}{x}$. Znamo da iznosi $\sin x$ variraju između -1 i 1 . Kad ih dijelimo sa sve većim ili sve manjim brojevima dobivat ćemo iznose sve bliže 0 . Dakle,*

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\sin x}{x} = 0,$$

što ujedno znači da graf funkcije $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ ima x -os kao obostranu horizontalnu asimptotu.

Ako za funkciju utvrdimo da lijevo ili desno nema horizontalnu asimptotu, a postoji mogućnost kose, u sljedećem koraku bismo trebali provjeriti da je limes od $f(x) - kx$ jednak nekom realnom broju ℓ . No, problem je što ne znamo iznos $k \neq 0$ pa prvo treba odrediti k . Budući da želimo da kad $x \rightarrow +\infty$ (ili kad $x \rightarrow -\infty$) vrijedi $f(x) - kx \rightarrow \ell$, dijeljenjem s x koji ovdje očito nije 0, vidimo da zapravo želimo da

$$\frac{f(x)}{x} - k - \frac{\ell}{x} \rightarrow 0.$$

Za $x \rightarrow \pm\infty$ očito $\frac{\ell}{x} \rightarrow 0$, neovisno o konkretnom iznosu $\ell \in \mathbb{R}$, dakle dobivamo uvjet

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = k \in \mathbb{R}$$

za koeficijent smjera desne kose asimptote i analogno za lijevu. Zaključujemo:

Propozicija 8 *Graf funkcije f ima desnu odnosno lijevu kosu asimptotu $y = kx + \ell$ točno ako vrijedi*

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = k \neq 0, k \in \mathbb{R}, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - kx = \ell \in \mathbb{R}$$

odnosno

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = k \neq 0, k \in \mathbb{R}, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) - kx = \ell \in \mathbb{R}.$$

Za računanje limesa u beskonačnosti korisno je uočiti da vrijedi:²⁶

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \pm\infty} C &= C, & \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{x^a} &= 0 \quad (a > 0), \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} a^x &= 0 \quad (0 < a < 1), & \lim_{x \rightarrow -\infty} a^x &= 0 \quad (a > 1). \end{aligned}$$

Limesom funkcije u beskonačnosti definira se i broj e :

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e.$$

Više o tehnici računanja limesa u beskonačnosti reći ćemo u sljedećem odjeljku, a ovdje samo dajmo jedan jednostavni primjer na kojem se jasno vidi postupak ispitivanja horizontalnih i kosih asimptota, iako se prešutno podrazumijevaju neka svojstva limesa koja ćemo tek precizirati. U njemu ćemo, bez dokaza, koristiti sljedeće pravilo: Za polinomijalne izraze njihovo ponašanje u beskonačnosti, dakle za $x \rightarrow \pm\infty$, određuje njihov vodeći član. Iz toga slijedi i pravilo da limese u beskonačnosti od racionalnih funkcija možemo računati tako da brojnik i nazivnik dijelimo s najvećom potencijom varijable koja se pojavljuje u toj racionalnoj funkciji.

²⁶Prvi od nabrojanih limesa znači da je konstatna funkcija sama sebi horizontalna asimptota.

Primjer 140 Ispitajmo postojanje desnih horizontalnih ili kosih asimptota na jednom primjeru. Zadana je funkcija

$$f(x) = \sqrt{x^2 + x - 2}.$$

Njena prirodna domena je $\langle -\infty, -2] \cup [1, +\infty)$. Dakle, ima smisla ispitivati postojanje njene horizontalne ili kose asimptote i lijevo i desno. Proveru za lijevu stranu ostavljamo čitatelju za vježbu.

Prvo provjerimo postojanje desne horizontalne asimptote. Uočimo da kad $x \rightarrow +\infty$ iz svojstava elementarnih funkcija znamo da i $x^2 + x - 2$ postaje proizvoljno velik (ponaša se kao vodeći član x^2), pa onda sigurno takav postoji i drugi korijen te kvadratne funkcije. Dakle, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ ne postoji te graf te funkcije nema horizontalnu asimptotu.

S druge strane, za provjeru postojanja kose asimptote prvo moramo razmotriti funkciju $\frac{f(x)}{x} = \sqrt{1 + \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2}}$. Znamo da $\frac{1}{x}$ i $-\frac{2}{x^2}$ imaju x -os kao horizontalnu asimptotu, dakle kad $x \rightarrow +\infty$ izraz $1 + \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2}$ postaje sve bliži 1 pa to vrijedi i za njegov drugi korijen: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$ pa ako kosa asimptota postoji, onda je $k = 1$. Sad računamo $\ell = \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - 1 \cdot x)$, koji je razlika dva broja koji postaju proizvoljno veliki pa nije očigledan konačan iznos tog limesa (u prvom koraku radimo racionalizaciju, u drugom dijelimo brojnik i nazivnik s x):

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{x^2 + x - 2} - x \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x - 2}{\sqrt{x^2 + x - 2} + x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - \frac{2}{x}}{\sqrt{1 + \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2}} + 1},$$

dakle brojnik za $x \rightarrow +\infty$ postaje sve bliži 1, a nazivnik sve bliži $1 + 1 = 2$, odnosno dobili smo $\ell = \frac{1}{2}$ i desna kosa asimptota je $y = x + \frac{1}{2}$.

S druge strane, **limes funkcije u točki** je limes kojim opisujemo kakve su vrijednosti $f(x)$ kad $x \rightarrow c$ (ili $x \rightarrow c+$ ili $x \rightarrow c-$), gdje je $c \in \mathbb{R}$. Takav limes označava se s

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x)$$

i iz perspektive asimptota potreban je za ispitivanje vertikalnih asimptota. Pritom, vertikalne asimptote funkcije f (elementarne ili zadane po dijelovima) u točki $c \in \mathbb{R}$ ima smisla ispitivati samo na sljedećim pozicijama (jer elementarne funkcije ne mogu imati vertikalne asimptote unutar otvorenih intervala koji su podskupovi njihove domene):

- Funkcija f je zadana po dijelovima i u c joj se mijenja pravilo,
- c je otvoreni rub nekog od disjunktih intervala koji u uniji daju domenu od f .

Primjer 141 Funkcija je zadana s

$$f(x) = \begin{cases} \exp(x), & -5 < x \leq -1 \\ \ln(x+1) & -1 < x \leq 0 \\ \frac{1}{x^2}, & x > 0 \end{cases}$$

Domena ove funkcije je $\langle -5, +\infty$, a pravilo se mijenja u -1 i u 0 . Stoga su potencijalne vertikalne asimptote grafa od f pravci $x = -5$, $x = -1$ i $x = 0$. Graf ove funkcije lako je skicirati i iz njega vidimo da pravci $x = 0$ i $x = -1$ jesu vertikalne asimptote ove funkcije, a $x = 5$ nije. Pritom, obje te vertikalne asimptote su to samo zdesna (kad $x \rightarrow 0+$ odnosno kad $x \rightarrow -1+$). Ovdje ujedno imamo primjer funkcije koja posjeduje vertikalne asimptote u točkama unutar svoje domene.

S obzirom na to da nam općenito za računanje limesa u točki i provjeravanje imamo li u njoj vertikalnu asimptotu treba pojam beskonačnog limesa, opće pravilo odgađamo za sljedeći odjeljak. Ovaj odjeljak i time opis postupka za ispitivanje toka funkcije zaključujemo ponavljanjem pravila za vertikalne asimptote racionalnih funkcija: Ako je $y = f(x)$ racionalna funkcija i c nultočka njenog nazivnika, pravac $y = c$ je vertikalna asimptota grafa od f točno ako ili c nije nultočka brojnika od $f(x)$ ili je u brojniku c također nultočka, ali manje kratnosti nego u nazivniku.

Zadatak 63 Skicirajte graf racionalne funkcije zadane s

$$f(x) = \frac{(2x-2)(x-2)(x+1)^2}{(x-1)^2(x-2)(x-6)}.$$

Zadatak 64 Ispitajte tok Maxwell-Boltzmannove funkcije gustoće vjerojatnosti (formula je dana u primjeru 124) i uvjerite se da je njen graf uvijek oblika prikazanog na slici 3.16.

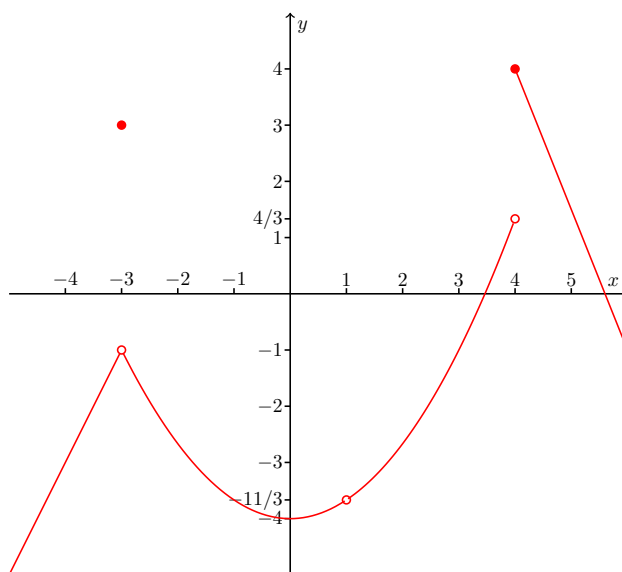
3.4 Limesi, neprekidnost, derivabilnost i integrabilnost

3.4.1 Limesi funkcija

U prethodnom odjeljku stekli smo osnovne ideje o limesima, a u ovome ćemo ih malo, ne sasvim, precizirati. Kao što smo vidjeli, osnovne dvije vrste limesa funkcija su limesi funkcija u točki, dakle limesi od $f(x)$ kad $x \rightarrow c$ (ili $x \rightarrow c+$ ili $x \rightarrow c-$) kad je c realan broj, te limesi funkcija u beskonačnosti, dakle limesi od $f(x)$ kad $x \rightarrow +\infty$ ili $x \rightarrow -\infty$. Pritom simbolika limesa ima opću strukturu oblika

$$\lim_{x \rightarrow \heartsuit} f(x) = \diamond. \quad (3.3)$$

Gornju formulu čitamo: Limes funkcije f kad x teži u $\heartsuit$ je $\diamond$.



Slika 3.21: Ilustracija uz primjer 142.

Primjer 142 Promotrimo sliku 3.21. Za funkciju čiji graf je prikazan na toj slici vrijedi: Kad su x -evi blizu -3 , vidljivo je da su $f(x)$ -evi blizu -1 , iako je $f(-3) = 3$. S druge strane, kad su x -evi blizu 0 , $f(x)$ -evi su blizu $-4 = f(0)$.

Nadalje, vidljivo je da 1 nije u domeni funkcije jer ta apscisa nema pridružene točke na grafu, ali ipak možemo identificirati ordinatu negdje između -4 i -3 ($-\frac{11}{3}$) kao onu za koju vrijedi da kad je x blizu 1 , $f(x)$ -evi su blizu nje. Pišemo:

$$\lim_{x \rightarrow -3} f(x) = -1, \quad \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -4, \quad \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = -\frac{11}{3}.$$

Primjer 143 Činjenicu da što je množina n neke tvari bliža 1 mol, to je njena masa m bliža njenoj molarnoj masi M možemo matematički zapisati formulom

$$\lim_{\frac{n}{\text{mol}} \rightarrow 1} m = M.$$

Primjer 144 Tijekom kemijske reakcije množinska koncentracija c bilo kojeg njezinog produkta neće neograničeno rasti, nego će se s vremenom sve više približavati nekoj ravnotežnoj vrijednosti c_∞ :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} c = c_\infty.$$

Da bi limes $\lim_{x \rightarrow \heartsuit} f(x)$ imao smisla, f mora biti definirana blizu $\heartsuit$. Preciznije: Takav limes za $\heartsuit = c \in \mathbb{R}$ ima smisla samo ako je f definirana na nekom otvorenom

intervalu oko c , osim eventualno u c , a za $\heartsuit = \pm\infty$ samo ako je f definirana za neograničeno male odnosno velike brojeve. Smisleni limes može i ne mora imati određenu vrijednost $\diamond$, tj. može i ne mora postojati. Pod limesom koji postoji podrazumijevamo samo smisleni limes kojemu na mjestu $\diamond$ možemo napisati realan broj L , dakle kod kojeg možemo reći da kad $x \rightarrow \heartsuit$, iznos $f(x)$ (ordinata) je sve bliži broju L .²⁷ Stoga za $c \in \mathbb{R}$ iznos limesa $\lim_{x \rightarrow c} f(x)$ grafički određujemo tako da nađemo ordinatu L (ako se takva može naći) sa svojstvom da sve točke grafa od f za x blizu c (osim eventualno točke s apscisom c) imaju ordinate blizu L . **Limes funkcije f u točki c slijeva** je (ako takav postoji) broj L takav da $f(x) \rightarrow L$ kad $x \rightarrow c$ i pritom je $x < c$. Tada pišemo $\lim_{x \rightarrow c-} f(x) = L$. Analogno, **limes funkcije f u točki c zdesna** je (ako takav postoji) broj L takav da $f(x) \rightarrow L$ kad $x \rightarrow c$ i pritom je $x > c$. Tada pišemo $\lim_{x \rightarrow c+} f(x) = L$. Ukratko, definicija jednostranih limesa funkcije f u točki c je jednaka definiciji limesa u točki c , uz dodatak $x < c$ odnosno $x > c$.

Za $\heartsuit = \pm\infty$ iznos $\lim_{x \rightarrow \heartsuit} f(x)$ grafički određujemo tako da vidimo ima li graf od f lijevu odnosno desnu horizontalnu asimptotu $y = L$, tj. limes od $f(x)$ kad $x \rightarrow +\infty$ odnosno $x \rightarrow -\infty$ je L ako je $f(x)$ sve bliže L kako x postaje veći odnosno manji, usporedite prethodni odjeljak.²⁸

Limesi, kad postoje, su jedinstveni — ne može se desiti da za jedan $\heartsuit$ i jednu f dobijemo dva različita iznosa limesa od $f(x)$ kad $x \rightarrow c$. S druge strane, dvije funkcije mogu u nekoj točki c imati različite vrijednosti, a ipak isti limes.

Primjer 145 Pogledajmo sliku 3.22 koja prikazuje grafove funkcija zadanih formulama $f(x) = x^2 + 1$ (crveno) i

$$g(x) = \begin{cases} 2x + 1, & x \neq 0 \\ 2, & x = 0 \end{cases}$$

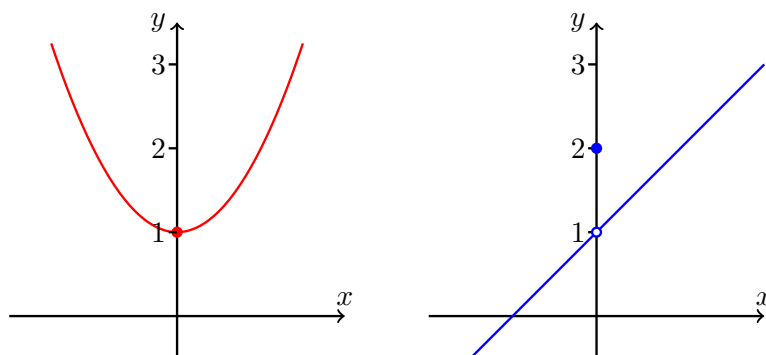
(plavo). Sa slike je vidljivo da obje te funkcije imaju limes 1 u točki 0 iako je $f(0) = 1$, a $g(0) = 2$.

Dva korisna limesa funkcija u točki su

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\exp(x) - 1}{x} = 1.$$

²⁷Precizna matematička definicija limesa funkcije f u točki $c \in \mathbb{R}$ glasi: Neka je f definirana na nekom otvorenom intervalu I oko c , osim eventualno u c . Kažemo da je broj L limes funkcije f u točki c ako za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $\delta > 0$ takav da kad je $x \in I$ i $0 < |x - c| < \delta$ vrijedi $|f(x) - L| < \varepsilon$. U tom slučaju pišemo $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = L$.

²⁸Precizna definicija limesa u beskonačnosti glasi: Neka je f definirana na nekom intervalu $\langle -\infty, b \rangle$ odnosno $\langle a, +\infty \rangle$. Kažemo da je broj L limes funkcije f kad x teži u $-\infty$ odnosno u $+\infty$ ako za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $M > 0$ takav da kad god je $x < b$ i $x < -M$ odnosno kad je $x > a$ i $x > M$ vrijedi $|f(x) - L| < \varepsilon$. U tom slučaju pišemo $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L$ odnosno $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L$.



Slika 3.22: Primjer dviju funkcija s istim limesom, ali različitim vrijednostima u $c = 0$.

Oni iskazuju da za $x \approx 0$ vrijedi $\sin x \approx x$ i $\exp(x) \approx 1 + x$, tj. oni samo na drugačiji način, bez eksplicitnog spomena derivacije, iskazuju da je $y = x$ tangenta sinusoide u 0 i $y = x + 1$ tangenta na funkciju $\exp$ u 0.

Primjer 146 Izračunajmo $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 \frac{x}{2}}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \left(\sin \frac{x}{2}\right)}{4 \left(\frac{x}{2}\right)^2} = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2 = \frac{1}{2} \cdot 1^2 = \frac{1}{2}.$$

Zadatak 65 Izračunajte $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x}$.

Za izračunavanje limesa u beskonačnosti često je korisno znati sljedeće pravilo:

Propozicija 9 *Rastuća eksponencijalna funkcija raste brže od svake potencije varijable, tj.*

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^b}{a^x} = 0$$

za sve $b \in \mathbb{R}$ i sve $a > 1$.

Specijalno, iz prethodne propozicije možemo zaključiti da je limes kvocijenta polinoma i rastuće eksponencijalne funkcije kad nezavisna varijabla teži u $+\infty$ jednak 0.

Primjer 147

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = \{t = \ln x\} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{t}{\exp(t)} = 0.$$

3.4. LIMESI, NEPREKIDNOST, DERIVABILNOST I INTEGRABILNOST 133

Zadatak 66 Dokažite da padajuća eksponencijalna funkcija pada brže od svake potencije varijable, tj.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{a^x}{x^b} = 0$$

za sve $b \in \mathbb{R}$ i sve $0 < a < 1$.

U primjerima u prethodnom odjeljku već smo koristili jedno svojstvo limesa koje je intuitivno jasno. Naime, limese koji postoje možemo zbrajati, oduzimati i množiti, a i dijeliti osim ako bi se radilo o dijeljenju s nulom:

Teorem 7 Neka postoje $\lim_{x \rightarrow c} f(x)$ i $\lim_{x \rightarrow c} g(x)$, gdje je $c \in \mathbb{R}$, $c = +\infty$ ili $c = -\infty$. Tada postoje i limesi $\lim_{x \rightarrow c} (f(x) \pm g(x))$ i $\lim_{x \rightarrow c} (f(x) \cdot g(x))$ te vrijedi:

$$\lim_{x \rightarrow c} (f(x) \pm g(x)) = \lim_{x \rightarrow c} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow c} g(x),$$

$$\lim_{x \rightarrow c} (f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x \rightarrow c} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow c} g(x).$$

Ako dodatno vrijedi i $\lim_{x \rightarrow c} g(x) \neq 0$, onda postoji i $\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)}{g(x)}$ i jednak je $\frac{\lim_{x \rightarrow c} f(x)}{\lim_{x \rightarrow c} g(x)}$. Gornje tvrdnje za $c \in \mathbb{R}$ vrijede i u slučaju da $x \rightarrow c+$ ili $x \rightarrow c-$.

Primjer 148 Treba izračunati $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + x^2 \exp(x)}{\cos x}$. Kad je x blizu 0, kosinus mu je blizu 1 te je limes nazivnika 1 (kad x teži u nulu). Kad je x blizu nule, onda su x i x^2 blizu nule, a e^x je blizu 1 te je brojnik blizu $0 + 0 \cdot 1$ odnosno limes brojnika je 0 (kad x teži u nulu). Stoga je

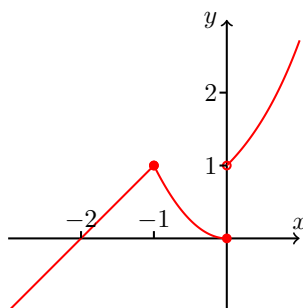
$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + x^2 e^x}{\cos x} = \frac{0 + 0 \cdot 1}{1} = 0.$$

Primjer 149

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{x-1}{x+1} \right)^x = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{1 - \frac{1}{x}}{1 + \frac{1}{x}} \right)^x = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\left(1 - \frac{1}{x}\right)^{(-x) \cdot (-1)}}{\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x} = \frac{e^{-1}}{e} = \frac{1}{e^2}.$$

Pomoću teorema 7 mogu se izračunati mnogi limesi, no problemi nastaju ako pravila ne primjenjujemo u skladu s uvjetima, tj. ne pazimo na uvjet o postojanju pojedinih „podlimesa“.

Primjer 150 Neka je $f(x) = \sin x$ i $g(x) = \frac{1}{\sin x}$. Za $x \rightarrow \pm\infty$ ne postoji niti limes $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x)$ niti $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} g(x)$, ali postoji $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x)g(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} 1 = 1$. Dakle, moguće je da postoji limes umnoška funkcija iako pojedinačni limesi ne postoje (jedan ili oba).



Slika 3.23: Ilustracija uz primjer 151.

Jedan od mogućih razloga nepostojanja limesa u točki vidimo na slici 3.21. Za x -eve koji su blizu 4 a koji su malo manji od 4 ($x \rightarrow 4-$), ordinate točaka grafa su blizu $\frac{4}{3}$, dok su za x -eve blizu 4 a koji su malo veći od 4 ($x \rightarrow 4+$) ordinate točaka grafa blizu 4. Dakle, limes $\lim_{x \rightarrow 4} f(x)$ za funkciju čiji graf je prikazan na slici 3.21 ne postoji, no postoje jednostrani limesi u 4: Za funkciju čiji graf je prikazan na slici 3.21 pišemo

$$\lim_{x \rightarrow 4-} f(x) = \frac{4}{3}, \quad \lim_{x \rightarrow 4+} f(x) = 4.$$

Korisno je znati, a intuitivno je jasno da vrijedi:

Teorem 8 *Limes $\lim_{x \rightarrow c} f(x)$ postoji ako i samo ako postoje oba jednostrana limesa $\lim_{x \rightarrow c-} f(x)$ i $\lim_{x \rightarrow c+} f(x)$ i jednaki su. U tom slučaju vrijedi*

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = \lim_{x \rightarrow c-} f(x) = \lim_{x \rightarrow c+} f(x).$$

Primjer 151 *Neka je*

$$f(x) = \begin{cases} e^x, & x > 0 \\ x^2, & -1 < x \leq 0 \\ x + 2, & x \leq -1 \end{cases}$$

Odredimo jednostrane limese u $c = 0$ i $c = -1$. Imamo:

$$\lim_{x \rightarrow 0-} f(x) = (\text{pravilo za } x < 0 \text{ je } x^2) = \lim_{x \rightarrow 0} x^2 = (\text{za } x \approx 0 \text{ je } x^2 \approx 0) = 0;$$

$$\lim_{x \rightarrow 0+} f(x) = (\text{pravilo za } x > 0 \text{ je } e^x) = \lim_{x \rightarrow 0} e^x = (\text{za } x \approx 0 \text{ je } e^x \approx 1) = 1.$$

Dakle, ne postoji limes $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ jer se jednostrani limesi u nuli razlikuju. S druge strane,

$$\lim_{x \rightarrow -1-} f(x) = (\text{pravilo za } x < -1 \text{ je } x+2) = \lim_{x \rightarrow -1} (x+2) = (\text{za } x \approx -1 \text{ je } x+2 \approx 1) = 1;$$

3.4. LIMESI, NEPREKIDNOST, DERIVABILNOST I INTEGRABILNOST 135

$$\lim_{x \rightarrow -1+} f(x) = (\text{pravilo za } x > -1 \text{ je } x^2) = \lim_{x \rightarrow -1} x^2 = (\text{za } x \approx -1 \text{ je } x^2 \approx 1) = 1.$$

Dakle, postoji limes $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$ i jednak je 1 jer su jednostrani limesi u -1 jednaki. Odgovarajući graf prikazan je na slici 3.23.

Osim slučaja kad se lijevi i desni limes u točki c razlikuju (ali postoje), česta je još situacija kad limes funkcije u točki ne postoji, a to je kad se u promatranoj točki pojavljuje vertikalna asimptota. Ako kad $x \rightarrow c+$ i(li) kad $x \rightarrow c-$ iznosi $f(x)$ postaju neograničeno veliki odnosno mali, $\lim_{x \rightarrow c} f(x)$ ne postoji. No, kao i u simbolici $x \rightarrow \pm\infty$ i ovdje se koristi simbolika $f(x) \rightarrow \pm\infty$, odnosno iako limes ne postoji piše se nešto od sljedećeg:

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow c+} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow c-} f(x) = +\infty$$

(ako iznosi $f(x)$ postaju neograničeno veliki), odnosno

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow c+} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow c-} f(x) = -\infty$$

(ako iznosi $f(x)$ postaju neograničeno mali). U ovim slučajevima govorimo o **beskonačnim limesima**.²⁹ Simbolika se intuitivno lako proširuje i na limese u beskonačnosti.

Primjer 152

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} &= +\infty, & \lim_{x \rightarrow 0-} \frac{1}{x} &= -\infty, & \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{1}{x} &= +\infty, \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} \log(-x) &= +\infty, & \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (1 - x^2) &= -\infty. \end{aligned}$$

Uzrok nepostojanja limesa nisu samo razlika limesa slijeva i zdesna u točki ili beskonačni limesi.

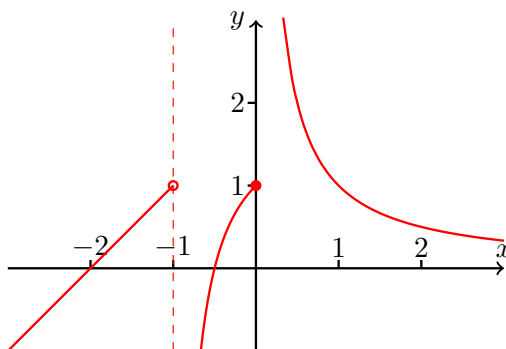
Primjer 153 Limes $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \sin x$ ne postoji u užem smislu riječi. On očito nije beskonačan jer sinus poprma samo vrijednosti između -1 i 1 , a ne postoje zbog periodičnosti (kojem god se broj $\sin x$ približi, od njega se i udalji). Stoga ne postoji ni $\lim_{x \rightarrow 0} \sin \frac{1}{x}$, jer kad $x \rightarrow 0\pm$, onda $\frac{1}{x} \rightarrow \pm\infty$.

Podsjećamo da beskonačni limesi u točki znače egzistenciju vertikalne asimptote:

Propozicija 10 Pravac $x = c$ je vertikalna asimptota za funkciju $y = f(x)$ ako je bar jedan od jednostranih limesa $\lim_{x \rightarrow c-} f(x)$ i $\lim_{x \rightarrow c+} f(x)$ jednak $+\infty$ ili $-\infty$.

Primjer 154 Za funkciju f čiji graf je prikazan slikom 3.24 imamo

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -1-} f(x) &= 1, & \lim_{x \rightarrow -1+} f(x) &= -\infty, \\ \lim_{x \rightarrow 0-} f(x) &= 1, & \lim_{x \rightarrow 0+} f(x) &= +\infty. \end{aligned}$$



Slika 3.24: Ilustracija uz primjer 154.

Primijetimo da iz primjera 154 vidimo dvije bitne stvari: Prvo, moguće je da funkcija posjeduje vertikalnu asimptotu $x = c$ čak i ako je c element domene od f (u primjeru 154 $c = 0$ je u domeni, a imamo vertikalnu asimptotu $x = 0$). Drugo, moguće je da pravac $x = c$ bude vertikalna asimptota za funkciju samo s jedne strane (u primjeru 154 to vrijedi i za $x = 0$ i za $x = 1$).

U primjerima s limesima u prethodnom odjeljku već smo, bez eksplicitnog spominjanja, *de facto* koristili sljedeće dvije propozicije:

Propozicija 11 ($\frac{a}{0} = \infty$ za $a \neq 0$) Ako je $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = a \neq 0$ i $\lim_{x \rightarrow c} g(x) = 0$, onda je $\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)}{g(x)} = \pm\infty$.

Propozicija 12 ($\frac{a}{\infty} = 0$ za $a \neq \infty$) Ako je $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = a \neq \pm\infty$ i $\lim_{x \rightarrow c} g(x) = \pm\infty$, onda je $\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$.

Ovo naravno ne znači da je sad dozvoljeno dijeljenje s nulom niti da je ∞ broj s kojim možemo dijeliti, već oznaka $\frac{a}{0}$ znači da se broj blizu a dijeli brojem koji je blizu 0, ali *nije* jednak 0, a oznaka $\frac{a}{\infty}$ znači da broj blizu a dijelimo s jako velikim ili jako malim brojem.

Primjer 155

$$\lim_{x \rightarrow 1+} \frac{5x}{\ln(x-1)} = \left\{ \frac{5}{-\infty} \right\} = 0.$$

Računanje limesa racionalne funkcije u nultočki njenog nazivnika te u beskonačnosti već smo vidjeli u prethodnom odjeljku, ali u sljedeća dva primjera dajemo dodatna objašnjenja valjanosti postupka.

²⁹Precizna definicija beskonačnih limesa u točki glasi: Kažemo da je $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = \pm\infty$ ako vrijedi: za svaki $M > 0$ postoji $\delta > 0$ takav da kad god je $0 < |x - c| < \delta$ vrijedi $f(x) > M$ odnosno $f(x) < -M$.

Primjer 156 *Izračunajmo*

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(x-1)(x+2)^2}{x^2(x+5)}.$$

Zajednički faktor brojnika i nazivnika je x , a on pri izračunavanju limesa u točki 0 nije jednak nuli (podsjećamo da $x \rightarrow 0$ znači $x \approx 0$, ali $x \neq 0$) Stoga nakon skraćivanja dobivamo da je taj limes jednak

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x-1)(x+2)^2}{x(x+5)}.$$

Brojnik tog izraza za $x \approx 0$ je približno jednak $(0-1)(0+2)^2 = -4$, a nazivnik $x(x+5)$ postaje sve bliži nuli što je x bliži nuli. Stoga imamo

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x-1)(x+2)^2}{x(x+5)} = \left\{ \text{limes tipa } \frac{-4}{0} \right\} = \infty.$$

Pritom, rezultat će biti $+\infty$ za limes slijeva (ako je $x < 0$ i blizu 0 je $x(x+5)$ negativno, a i brojnik je negativan jer je blizu -4), a $-\infty$ za limes zdesna (za mali $x > 0$ je $x(x+5)$ pozitivno, a brojnik je i dalje negativan jer je blizu -4):

$$\lim_{x \rightarrow 0^\mp} \frac{x(x-1)(x+2)^2}{x^2(x+5)} = \pm\infty.$$

Uočimo važan detalj u prethodnom primjeru: Skraćivanje faktora $(x-c)$ iz brojnika i nazivnika pod limesom kad $x \rightarrow c$ je dozvoljeno jer u limesu $\lim_{x \rightarrow c} f(x)$ podrazumijevamo da je x blizu c , ali $x \neq c$ te stoga $x-c \neq 0$.³⁰

Primjer 157 *Izračunajmo*

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2 + x + 1}{x^3 + x^2 + x + 1}.$$

Ovo je limes racionalne funkcije i kad $x \rightarrow \pm\infty$ x sigurno nije 0. U ovom slučaju brojnik i nazivnik dijelimo najvećom potencijom od x koja se u njima pojavljuje:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2 + x + 1}{x^3 + x^2 + x + 1} \cdot \frac{x^3}{x^3} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3}}{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3}}$$

Zadatak 67 Koristeći postupak iz prethodnog primjera argumentirajte ranije opisano pravilo o horizontalnim asimptotama kod racionalnih funkcija (str. 35).

³⁰Skraćivanje razlomka je dijeljenje brojnika i nazivnika istim brojem, dakle možemo skratiti samo one faktore za koje smo sigurni da nisu jednaki nula.

Primijetimo da u primjerima 156 i 157 nismo mogli direktno primijeniti pozicije 11 ni 12. Naime, u primjeru 156 i brojnik i nazivnik su imali limes jednak 0, a u primjeru 157 i brojnik i nazivnik teže u ∞ . Općenito, ako je $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = \pm\infty$ i $\lim_{x \rightarrow c} g(x) = \pm\infty$, onda je $\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)}{g(x)}$ limes tipa $\frac{\infty}{\infty}$. Analogno, ako je $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = \lim_{x \rightarrow c} g(x) = 0$, onda je $\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)}{g(x)}$ limes tipa $\frac{0}{0}$. Takvi limesi spadaju u tzv. **neodređene izraze**, jer im konačni iznos ovisi o konkretnim funkcijama.

Primjer 158 Limesi $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + x}{x}$ i $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - 1}{x^2 - 1}$ su oba tipa $\frac{0}{0}$. Za prvi imamo

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} (x + 1) = 1$$

(jer je $x + 1$ blizu 1 kad je x blizu 0), a za drugi

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - 1}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x + 1} = \frac{1}{2}$$

(jer je $\frac{1}{x+1}$ blizu $\frac{1}{2}$ kad je x blizu 1). Vidimo dakle da limesi tipa $\frac{0}{0}$ mogu davati različite konačne rezultate.

Uz limese tipa $\frac{0}{0}$ i $\frac{\infty}{\infty}$, u neodređene izraze kod limesa spadaju još i $+\infty - \infty$ (limes razlike funkcija koje obje teže u $+\infty$), $0 \cdot \infty$ (limes produkta funkcija od kojih jedna teži u 0, a druga u $\pm\infty$) te 0^0 , 1^∞ , 0^∞ (limesi potencija kojima baza teži u 0 odnosno 1, a eksponent u 0 odnosno $\pm\infty$).

Kod limesa tipa $\frac{0}{0}$ i $\frac{\infty}{\infty}$ često je od pomoći **L'Hôpitalovo pravilo** pravila:³¹

Teorem 9 (L'Hôpitalovo pravilo) Neka su oba limesa $\lim_{x \rightarrow c} f(x)$ i $\lim_{x \rightarrow c} g(x)$ jednaka 0 ili su pak oba beskonačna (pri čemu je $c \in \mathbb{R}$ ili $c = \pm\infty$). Ako postoji limes $\lim_{x \rightarrow c} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ ili ako je jednak $\pm\infty$, te ako $g'(x) \neq 0$ za x -eve iz nekog intervala oko c ,³² onda vrijedi

$$\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow c} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Primjer 159 Limes $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2 \ln x}{x - 1}$ je tipa $\frac{0}{0}$. Primjena L'Hôpitalova pravila daje:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2 \ln x}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{2}{x}}{1} = 2.$$

³¹Pravilo je nazvano po francuskom matematičaru Guillaume François Antoine Marquis de l'Hôpitalu (1661.–1704.), autoru prvog udžbenika diferencijalnog računa, u kojem se nalazi i ovo pravilo. Pravilo otkrio je zapravo otkrio švicarski matematičar Johann Bernoulli (1667.–1748.). Prezime l'Hôpital se često piše i l'Hospital, kako se pisalo u 17. i 18. stoljeću, te se pravilo nalazi i pod nazivom l'Hospitalovo pravilo.

³²Dakle, ako funkcija g nije konstantna na nekom intervalu oko c .

3.4. LIMESI, NEPREKIDNOST, DERIVABILNOST I INTEGRABILNOST 139

U teoremu je naravno bitan uvjet „ako postoji”. Postoje situacije kad limes $\lim_{x \rightarrow c} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ ne postoji, ali ipak postoji limes $\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)}{g(x)}$.

Primjer 160 Pokušaj izračunavanja limesa

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x + \sin x}{x}$$

(koji je tipa $\frac{\infty}{\infty}$) l'Hôpitalovim pravilom daje:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x + \sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (1 + \cos x).$$

Posljednji limes ne postoji iako postoji $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x + \sin x}{x}$ i jednak je 1 (jer za jako velike x dodavanje sinusa - koji je broj između -1 i 1 - nema bitan utjecaj na limes pa vrijedi $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x + \sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x}{x} = 1$).

Također, treba paziti na to da se l'Hôpitalovo pravilo smije primjenjivati samo na limese kvocijenata funkcija koji su tipa $\frac{0}{0}$ ili $\frac{\infty}{\infty}$.

Primjer 161 Imamo $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2}{x - 5} = -\frac{1}{4}$ jer je 1 u prirodnoj domeni funkcije kojoj računamo limes. Da smo išli primijeniti l'Hôpitalovo pravilo bez provjere uvjeta da se radi o limesu tipa $\frac{0}{0}$ ili $\frac{\infty}{\infty}$ (a ovdje to nije slučaj) dobili bismo krivi rezultat $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2}{x - 5} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x}{1} = 2$.

Zadatak 68 Koristeći L'Hôpitalovo pravilo dokažite propoziciju 9.

Primjer 162 Molarni toplinski kapacitet dvoatomnog idealnog plina konstantnog volumena može se opisati formulom

$$C_{V,m} = \frac{5}{2}R + \left(\frac{h\nu}{kT}\right)^2 \frac{e^{h\nu/(kT)}}{(e^{h\nu/(kT)} - 1)^2}.$$

Pritom su R , h , k i ν pozitivne konstante. Kakav je molarni toplinski kapacitet pri vrlo niskim temperaturama?

U tu svrhu treba izračunati $\lim_{\frac{T}{K} \rightarrow 0+} C_{V,m}$ tj.

$$\lim_{\frac{T}{K} \rightarrow 0+} \left(\frac{5}{2}R + \left(\frac{h\nu}{kT}\right)^2 \frac{e^{h\nu/(kT)}}{(e^{h\nu/(kT)} - 1)^2} \right) = \frac{5}{2}R + \lim_{\frac{T}{K} \rightarrow 0+} \left(\left(\frac{h\nu}{kT}\right)^2 \frac{e^{h\nu/(kT)}}{(e^{h\nu/(kT)} - 1)^2} \right) = \spadesuit.$$

Radi lakšeg računanja supstituirajmo $x = \frac{h\nu}{kT}$. Ako $\frac{T}{K} \rightarrow 0+$, onda $x \rightarrow +\infty$. Stoga je

$$\spadesuit = \frac{5}{2}R + \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 e^x}{(e^x - 1)^2} = (L'Hôpital) = \frac{5}{2}R + \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(2x + x^2)e^x}{2e^x(e^x - 1)} =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{5}{2}R + \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x + x^2}{2e^x - 2} = (L'Hôpital) = \frac{5}{2}R + \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 + 2x}{2e^x} = \\
&= (L'Hôpital) = \frac{5}{2}R + \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{2e^x} = \frac{5}{2}R + 0 = \frac{5}{2}R.
\end{aligned}$$

Dakle, pri vrlo niskim temperaturama molarni toplinski kapacitet dvoatomnog idealnog plina konstantnog volumena iznosi približno $\frac{5}{2}R$. Ispitajte kakav je molarni toplinski kapacitet dvoatomnog idealnog plina konstantnog volumena za jako visoke temperature!

Zadatak 69 Ovisnost veličine c o veličini t dana je formulom

$$c(t) = ab \frac{1 - \exp((b-a)kt)}{a - b \exp((b-a)kt)}.$$

Pritom su a , b i k pozitivne konstante i vrijedi $a \leq b$. Odredite ravnotežni iznos c_∞ veličine c , tj. limes od c kad $t \rightarrow +\infty$.

3.4.2 Neprekidnost funkcija

U prethodnom odjeljku, gledajući sliku 3.21, vidjeli smo da kad tražimo $\lim_{x \rightarrow c} f(x)$ za c iz domene funkcije f , taj limes u c može i ne mora biti jednak vrijednosti funkcije u c . Tako smo sa slike 3.21 utvrdili da je $\lim_{x \rightarrow -3} f(x) = -1 \neq 3 = f(-3)$ te da $\lim_{x \rightarrow 4} f(x)$ ne postoji iako je $f(4) = 4$. S druge strane, na istoj slici je $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -4 = f(0)$. Posljednja situacija je češća, a i „prirodnija“ — sa slike vidimo da pri crtanju grafa prolaskom kroz točku s apscisom 0 ne moramo podići ruku s papira odnosno da graf „prirodno“ prolazi kroz odgovarajuću točku. To svojstvo zove se neprekidnost u točki:

Definicija 15 (Neprekidnost) Funkcija f je neprekidna u točki c svoje domene ako vrijedi

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = f(c). \quad (3.4)$$

Funkciju koja je neprekidna u svakoj točki svoje domene zovemo neprekidnom funkcijom. Ako je c u domeni od f , ali $\lim_{x \rightarrow c} f(x) \neq f(c)$, onda kažemo da f ima prekid u c (c je točka prekida funkcije f).

Ako je funkcija f definirana na uniji disjunktnih intervala, od kojih su neki zatvoreni ili poluotvoreni, gornja definicija neprekidnosti u točki se u zatvorenim rubovima intervala primjenjuje samo s jednostranim limesom.³³

³³Razlog je u tome što se neprekidnost funkcije na segmentu definira preko postojanja neprekidnog proširenja na neki veći otvoreni interval.

Primjer 163 Neka je $f(x) = \sqrt{x-2}$. Prirodna domena te funkcije je $[2, +\infty)$. Ovdje nema smisla govoriti o $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ jer funkcija nije definirana lijevo od 2. No,

$$\lim_{x \rightarrow 2+} f(x) = \sqrt{2-2} = 0 = f(2),$$

pa je funkcija f neprekidna u točki 2.

Primijetimo da se pitanje (ne)prekidnosti, kao i (ne)derivabilnosti, funkcije odnosi samo na elemente domene. Primjerice, funkcija sa slike 3.21 nema prekid u točki 1 jer tamo nije definirana.

Primjer 164 Funkcija $f(x) = \frac{1}{x}$ nema prekid u 0 iako pri crtanju grafa kod apscise 0 moramo podići olovku s papira. Naime, 0 nije u domeni pa je besmisleno pitanje ima li ili nema f prekid u 0.

S obzirom na definiciju, postoje dva moguća uzroka prekida funkcije f u nekoj točki c iz domene:

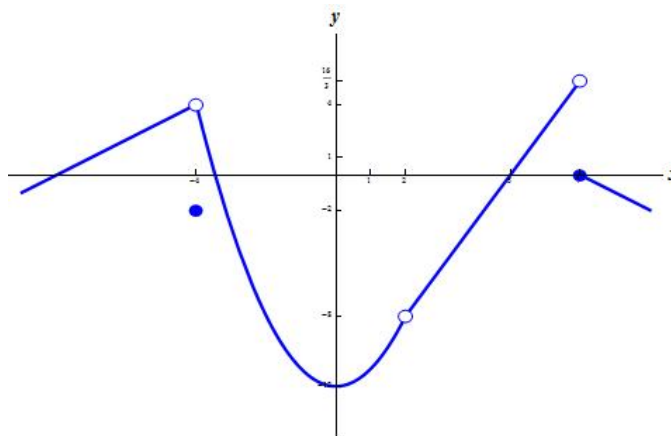
- Ne postoji limes $\lim_{x \rightarrow c} f(x)$ pa ne može biti jednak $f(c)$. Primjer takvog prekida je u točki $c = 4$ za funkciju čiji graf je prikazan slikom 3.21. Ako pritom postoje³⁴ jednostrani limesi $\lim_{x \rightarrow c+} f(x)$ i $\lim_{x \rightarrow c-} f(x)$, onda govorimo o **prekidu prve vrste (skoku)**, a ako bar jedan od ta dva jednostrana limesa ne postoji, govorimo o **prekidu druge vrste (bitnom prekidu)**.
- Limes $\lim_{x \rightarrow c} f(x)$ postoji, ali je različit od $f(c)$. Primjer takvog prekida imamo u točki $c = -4$ za funkciju čiji graf je prikazan slikom 3.25 (uočite da ta funkcija nema prekid u $c = 2$ jer 2 nije u njenoj domeni). U ovakvom slučaju govorimo o **uklonjivom prekidu** (jer bismo promjenom definicije $f(c)$ iz trenutne vrijednosti u vrijednost $\lim_{x \rightarrow c} f(x)$ dobili funkciju neprekidnu u c).

Velika većina funkcija koje se pojavljuju u primjenama matematike u kemiji i fizici su neprekidne. Ipak, postoje i neke iznimke, primjerice na granicama faza pri faznoj tranziciji. Tada se najčešće radi o skokovima, jer se obično radi o nagloj promjeni vrijednosti neke fizikalne ili kemijske veličine.

Primjer 165 Promotrimo ovisnost gustoće ρ neke čiste tvari o temperaturi T (pri konstantnom tlaku). Tada ρ ima dvije točke prekida (skoka), i to pri ledištu i vrelištu (T_f i T_b). Skok (pad gustoće) pri T_f (razlika lijevog i desnog limesa od ρ u T_f) je u pravilu manji od onog pri T_b . Unutar pojedine faze se gustoća mijenja neprekidno u ovisnosti o T .

Napomenimo ovdje da zbog mogućnosti supostojanja dviju faza ovdje zapravo nemamo funkciju — temperaturama T_b i T_f pridružene su dvije gustoće koje odgovaraju dvjema supostojećima fazama promatrane tvari pri toj temperaturi.

³⁴Podsjećamo, to znači da su im iznosi realni brojevi.



Slika 3.25: Primjer funkcije s jednim skokom i jednim uklonjivim prekidom.

Najvažniji teorem o neprekidnim funkcijama je **Bolzano-Weierstraßov teorem** 6, koji nam je bio temelj postupka za određivanje globalnih ekstrema za neprekidne funkcije zadane na segmentu.

Vezano za računanje limesa, znanje da je neka funkcija neprekidna olakšava računanje limesa kompozicijâ funkcija:

Propozicija 13 *Ako su f i g funkcije takve da je definirana kompozicija $g \circ f$, i ako je g neprekidna u točki $d = \lim_{x \rightarrow c} f(x) \in \mathbb{R}$ (gdje je c realan broj), onda vrijedi*

$$\lim_{x \rightarrow c} g(f(x)) = g(d).$$

Primjer 166 *Zbog neprekidnosti drugog korijena, logaritma i polinoma u svim točkama njihovih domena te teorema 7 vrijedi*

$$\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{\frac{\ln(x+1)}{x^2+1}} = \sqrt{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x+1)}{x^2+1}} = \sqrt{\frac{\ln(\lim_{x \rightarrow 0}(x+1))}{\lim_{x \rightarrow 0}(x^2+1)}} = \sqrt{\frac{\ln 1}{1}} = 0.$$

Posljedica svojstava limesa je:

Teorem 10 *Ako su funkcije f i g neprekidne u točki c , onda su i njihov zbroj, razlika i produkt funkcije neprekidne u c . Ako je uz to i $g(c) \neq 0$, onda je i kvocijent f/g funkcija neprekidna u točki c . Ako je funkcija f neprekidna u točki c i funkcija g neprekidna u točki $f(c)$, onda je i kompozicija $g \circ f$ neprekidna u c .*

Primjer 167 *Funkcija zadana s $f(x) = x \exp(x) + \ln |\sin(x) - 1|$ je neprekidna u svim točkama svoje prirodne domene (odredite ju!).*

Važno i korisno je zapamtiti:

3.4. LIMESI, NEPREKIDNOST, DERIVABILNOST I INTEGRABILNOST¹⁴³

Teorem 11 Sve elementarne funkcije su neprekidne u svim točkama svojih prirodnih domena.

To znači da funkcije koje su zadane po dijelovima mogu imati prekide samo u točkama domene u kojima se mijenja pravilo. Naravno, do prekida tamo ne mora doći, primjerice funkcija apsolutne vrijednosti je neprekidna u 0.

Primjer 168 Funkcija iz primjera 47 ima prekid samo u 0, kako je vidljivo i na slici 2.41. Naime, za $x < 0$ njeno pravilo je elementarna funkcija, a tako i za $x > 0$, dakle je jedina moguća točka prekida 0. Iznos te funkcije u 0 je $f(0) = e^0 = 1$. Izračunajmo lijevi i desni limes u 0:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} e^x = 1,$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 0$$

(za $x < 0$ pravilo je $f(x) = e^x$ pa kad računamo limes slijeva gledamo limes od e^x , dok je za $x > 0$ pravilo $f(x) = x^2$ pa za limes zdesna gledamo limes od x^2). Vidimo da se lijevi i desni limes u 0 razlikuju, a 0 je u domeni, pa funkcija ima prekid (skok) u 0.

U primjenama nećemo susresti funkcije koje bi imale beskonačno mnogo točaka prekida,³⁵ a i ako neka funkcija u primjeni ima točke prekida, onda se ne radi o bitnim prekidima. Dakle, funkcije koje susrećemo u primjenama su po dijelovima neprekidne:

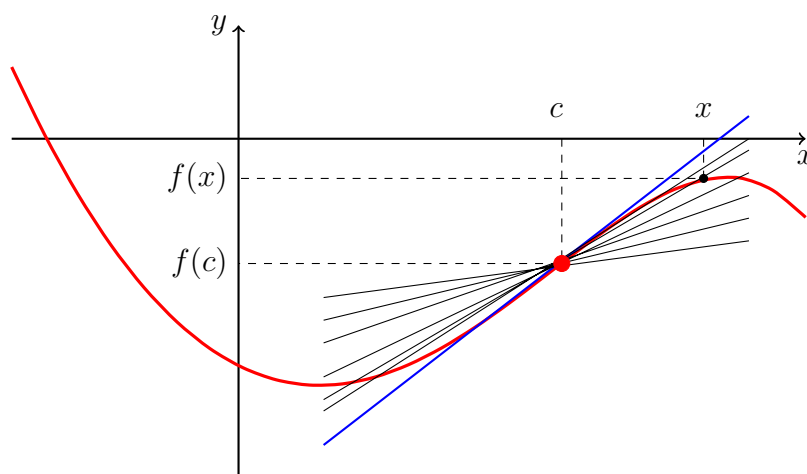
Definicija 16 (Po dijelovima neprekidne funkcije) Realna funkcija jedne varijable naziva se po dijelovima neprekidnom ako nema nijednu ili ima konačno mnogo točaka prekida, od kojih nijedna nije točka bitnog prekida.

Primjer 169 Funkcija zadana s

$$f(x) = \begin{cases} x, & x \leq 0 \\ \ln x, & x > 0 \end{cases}$$

je zadana po dijelovima, ali nije po dijelovima neprekidna. Naime, u 0 ona ima bitni prekid: $0 = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$ (podsjećamo da su beskonačni limesi podvrsta nepostojećih limesa).

³⁵Najjednostavnija takva funkcija je Dirichletova funkcija, definirana na segmentu $[0, 1]$, koja postiže vrijednost 1 u racionalnim, a vrijednost 0 u iracionalnim brojevima.



Slika 3.26: Tangenta kao granični slučaj sekante.

3.4.3 Derivabilnost i integrabilnost funkcija

U odjeljku 3.1 dali smo tri interpretacije smisla derivacije $f'(c)$ funkcije f u nekoj točki c njezine domene. Jedan od njih bio je da je $f'(c)$ koeficijent smjera tangente na graf $y = f(x)$ u točki $(c, f(c))$ ako je taj graf prikazan u pravokutnom koordinatnom sustavu. Vidjeli smo i kako izračunati $f'(c)$ za razne elementarne funkcije (odjeljci 3.1 i 3.2.1). No, kako se dolazi do tih postupaka (formula)? Odnosno, kako bismo riješili **problem tangente**: Ako ne znamo derivirati, kako odrediti koeficijent smjera navedene tangente?

Pogledajmo sliku 3.26. Na njoj je crveno prikazan jedan graf $y = f(x)$ i plavo tangenta u jednoj njegovoj točki $(c, f(c))$. Pogledajmo i nekoliko sekanti kroz tu točku, tj. pravaca koji prolaze danom točkom krivulje i još jednom njenom točkom (crno na slici 3.26). Dakle, gledamo pravce koji prolaze točkom $(c, f(c))$ i točkom $(x, f(x))$ za varijabilni $x \neq c$. Jedna takva točka $(x, f(x))$ je istaknuta na slici 3.26, ali treba imati na umu da se ona zapravo kreće po grafu. Primijetimo da što je ta točka bliža točki $(c, f(c))$, to će sekanta biti bliža položaju tangente. Stoga će što je $(x, f(x))$ bliža $(c, f(c))$, dakle kad $x \rightarrow c$, koeficijent smjera sekante biti bliži koeficijentu smjera tangente, čime dolazimo do formalne, prave definicije derivacije:

Definicija 17 (Derivacija) *Ako je c točka domene funkcije f i postoji limes*

$$\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}, \quad (3.5)$$

onda se taj limes zove derivacijom funkcije f u točki c i označava s $f'(c)$ ili $\frac{df}{dx}(c)$ i kažemo da je f derivabilna u c . Funkcija koja je derivabilna u svakoj točki svoje domene zove se derivabilnom (ili diferencijabilnom) funkcijom.

3.4. LIMESI, NEPREKIDNOST, DERIVABILNOST I INTEGRABILNOST 145

Pomoću ove definicije dokazuju se sva svojstva derivacija, a i izvodi tablica derivacija.

Primjer 170 Dokažimo da za $f(x) = x^2$ vrijedi $f'(c) = 2c$ za svaki c :

$$f'(c) = \lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} = \lim_{x \rightarrow c} \frac{x^2 - c^2}{x - c} = \lim_{x \rightarrow c} (x + c) = 2c.$$

Primjer 171 Dokažimo svojstvo aditivnosti deriviranja. Neka su f i g derivabilne u c te neka je $h = f + g$ tj. za sve x je $h(x) = f(x) + g(x)$. Tada imamo:

$$\begin{aligned} h'(c) &= \lim_{x \rightarrow c} \frac{h(x) - h(c)}{x - c} = \lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x) + g(x) - f(c) - g(c)}{x - c} = \\ &= \lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} + \lim_{x \rightarrow c} \frac{g(x) - g(c)}{x - c} = f'(c) + g'(c), \end{aligned}$$

tj. pokazali smo da je $(f + g)'(c) = f'(c) + g'(c)$.

Zadatak 70 Dokažite svojstvo homogenosti deriviranja.

Uočimo da nazivnik pod limesom u definiciji derivacije funkcije uvijek teži u 0. Ako je c točka prekida funkcije f , onda $\lim_{x \rightarrow c} f(x) - f(c) \neq 0$, pa u definiciji derivacije brojnik ne teži u 0, dakle limes iz definicije derivacije u tom slučaju ne postoji: Nikoja funkcija nije derivabilna u svojim točkama prekida. Formalno iskazano:

Teorem 12 Ako funkcija posjeduje derivaciju u nekoj točki svoje domene, onda je ona i neprekidna u toj točki.

Obrat ne mora vrijediti, tj. postoje neprekidne funkcije koje nemaju derivaciju u nekoj točki. Najjednostavniji takav primjer je funkcija apsolutne vrijednosti.

Primjer 172 Neka je $f(x) = |x|$ i $c = 0$. Imamo:

$$\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x|}{x}.$$

Za negativne x je posljednji kvocijent jednak -1 , a za pozitivne 1 pa gornji limes slijeva iznosi -1 , a zdesna 1 , odnosno limes ne postoji pa f nije derivabilna u 0 .

Kao u prethodnom primjeru, tako će se i u svakoj drugoj „špici“ grafa desiti da limes iz definicije derivacije ne postoji jer

$$\lim_{x \rightarrow c-} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \neq \lim_{x \rightarrow c+} \frac{f(x) - f(c)}{x - c},$$

pri čemu oba ta jednostrana limesa postoje. Dakle, ako je c apscisa neke „špice“ na grafu, $f'(c)$ ne postoji. Ako je c zatvoreni rub nekog od intervala koji sačinjavaju domenu od f , onda samo jedan od gornja dva jednostrana limesa ima smisla, pa opet ne postoji $f'(c)$ jer nam za to treba obostrani limes.

Primjer 173 Pokušajmo izračunati $f'(0)$ za $f(x) = \sqrt[3]{x}$ po definiciji:

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}.$$

Posljednji limes ne postoji (beskonačan je) pa $f'(0)$ ne postoji.

Kao u prethodnom primjeru, u slučaju vertikalne tangente u točki $(c, f(c))$ će limes iz definicije derivacije biti beskonačan, dakle opet neće postojati. Time smo konačno opravdali sve četiri situacije nepostojanja derivacije u nekoj točki opisane na str. 92.

Za funkcije zadane po dijelovima je računanje derivacije najjednostavnije ilustrirati primjerom.

Primjer 174 Funkcija $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ zadana s

$$f(x) = \begin{cases} e^x & x < 0, \\ x + 1, & 0 \leq x \leq 1, \\ 2 - (x - 1)^2, & x > 1. \end{cases}$$

Ona je neprekidna (provjerite to i po definiciji, kao u primjeru 168, i skiciranjem grafa). Za $x < 0$ je $f'(x) = e^x$, za $0 < x < 1$ je $f'(x) = 1$ i za $x > 1$ je $f'(x) = 2 - 2x$ — dok je riječ o elementarnim funkcijama na otvorenim intervalima, derivacije računamo na standardan način. Dakle, upitne su derivacije u točkama $c = 0$ i za $c = 1$ u kojima se mijenja pravilo. Zbog promjene pravila limes iz definicije derivacije u takvim c se mora računati odvojeno kao lijevi i desni pa ako postoje i podudaraju se, onda po teoremu 8 postoji i limes iz definicije derivacije.

Za $c = 0$ računamo:

$$\lim_{x \rightarrow 0-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0-} \frac{e^x - 1}{x} = 1,$$

$$\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{(x + 1) - 1}{x} = 1,$$

dakle je $f'(0) = 1$.

Za $c = 1$ imamo:

$$\lim_{x \rightarrow 1-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1-} \frac{x + 1 - 2}{x - 1} = 1,$$

$$\lim_{x \rightarrow 1+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1+} \frac{2 - (x - 1)^2 - 2}{x - 1} = -\lim_{x \rightarrow 1+} (x - 1) = 0,$$

dakle je $f'(1)$ ne postoji (graf u $(1, f(1))$ ima „špicu“ jer limesi postoje i različiti su, a funkcija je neprekidna).

Dok je definicija neodređenog integrala dana u odjeljku 3.1 egzaktna, preostalo nam je korektno definirati određeni integral. Ideja je slična kao u definiciji derivacije: Svesti definiciju, odnosno rješenje problema površine, na prikladnu graničnu vrijednost. Prava definicija određenog integrala temelji se na Arhimedovoj³⁶ ideji određivanja površina likova zakrivljenog ruba rastavljanjem na sve više manjih likova jednostavnijeg oblika.

Osnovni uvjet da bi se određeni integral funkcije $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ mogao definirati je da je ona ograničena, tj. da postoje realni brojevi $m < M$ takvi da je

$$m \leq F(x) \leq M$$

za sve $x \in [a, b]$. Interpretirano grafički to znači da se cijeli graf funkcije F nalazi unutar nekog pravokutnika. Sve neprekidne funkcije i po dijelovima neprekidne funkcije su zbog Bolzano-Weierstraßovog teorema 6 sigurno ograničene.

Površinu omeđenu s grafom ograničene funkcije F , vertikalama $t = a$ i $t = b$ te s osi apscisa, uz dogovor da se dijelovi površine ispod osi apscisa uzimaju s negativnim predznakom, rastavljamo na što više što užih pravokutnika. Pritom, ti pravokutnici imaju po dvije stranice okomite na os apscisa i jednu stranicu na osi apscisa. Dakle, rastav na (neke) pravokutnike bit će određen subdivizijom σ segmenta $[a, b]$ na neki broj n dijelova:

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_i < x_{i+1} < \dots < x_{n-1} < x_n = b.$$

Na slici 3.27 to je ilustrirano za tzv. ekvidistantnu subdiviziju, tj. subdiviziju sa svojstvom da je $x_{i+1} - x_i$ jednako za sve i (pa se taj iznos označi s Δx).

Označimo s m_i „najmanju“ vrijednost od F na S_i , a s M_i „najveću“³⁷ vrijednost $F(x)$ za $x \in [x_i, x_{i+1}]$. Uz te oznake je m_i „visina“ i -tog donjeg pravokutnika, a M_i je „visina“ i -tog gornjeg pravokutnika. Stoga i -ti donji pravokutni ima „površinu“ $p_i = m_i (x_{i+1} - x_i)$, a gornji $P_i = M_i (x_{i+1} - x_i)$. Definiramo gornju i donju integralnu sumu³⁸ funkcije F za danu subdiviziju σ (usp. slike 3.28 i 3.29):

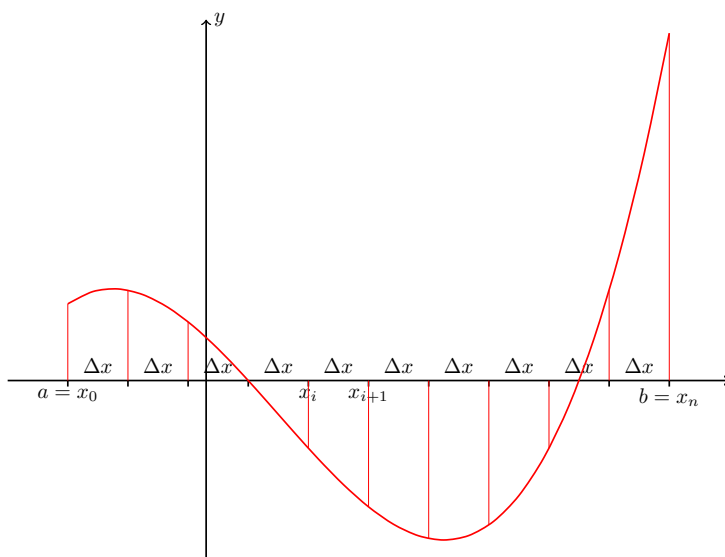
$$s_\sigma = \sum_{i=0}^{n-1} p_i, \quad S_\sigma = \sum_{i=0}^{n-1} P_i.$$

Uočimo da ako je funkcija na ikojem podintervalu negativna, odgovarajući m_i , a možda i M_i će biti negativna, dakle u tom slučaju će u integralnim sumama ćemo umjesto površine donjeg, a možda i gornjeg, pravokutnika imati njegovu suprotnu vrijednost: Dijelovi površine ispod x -osi pribrajat će se s negativnim predznakom. Primijetimo da to nije kompliciranje, nego olakšanje, jer bismo inače

³⁶Arhimed iz Sirakuze, starogrčki matematičar i fizičar, 3. st. pr. Kr.

³⁷Strogo matematički, m_i je tzv. infimum (najveća donja međa), a M_i supremum (najmanja gornja međa) od F na podintervalu $[x_i, x_{i+1}]$. Oni za ograničene funkcije sigurno postoje, dok najmanja i najveća vrijednost ne moraju postojati za svaku ograničenu funkciju.

³⁸Strogo matematički one se nazivaju Darbouxove sume.



Slika 3.27: Prvi korak definicije određenog integrala.

morali još uključivati podatke o predznacima funkcije na svim podintervalima za sve subdivizije. Uočimo da za svaku subdiviziju σ vrijedi

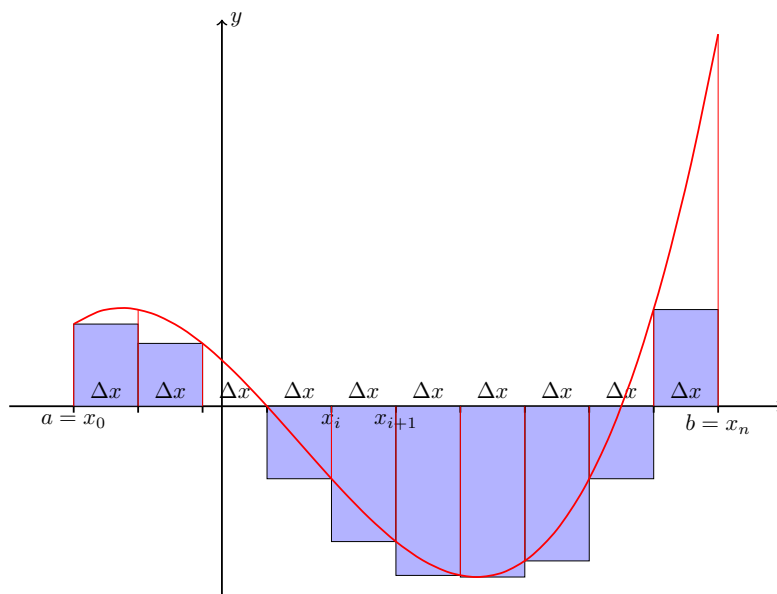
$$m(b-a) \leq s_\sigma \leq S_\sigma = M(b-a).$$

Posljednji korak u definiciji određenog integrala je da radimo subdivizije sa sve više što užih pravokutnika (dakle, pustimo da $n \rightarrow +\infty$ i istovremeno $d_\sigma \rightarrow 0$, gdje je d_σ najveći od iznosa $x_{i+1} - x_i$, tj. najveća širina pravokutnika u subdiviziji σ). Uz opisane uvjete postojat će limesi³⁹ $\underline{I}$ svih donjih i $\bar{I}$ svih gornjih integralnih suma i vrijedit će $\underline{I} \leq \bar{I}$. Time dolazimo do definicije:

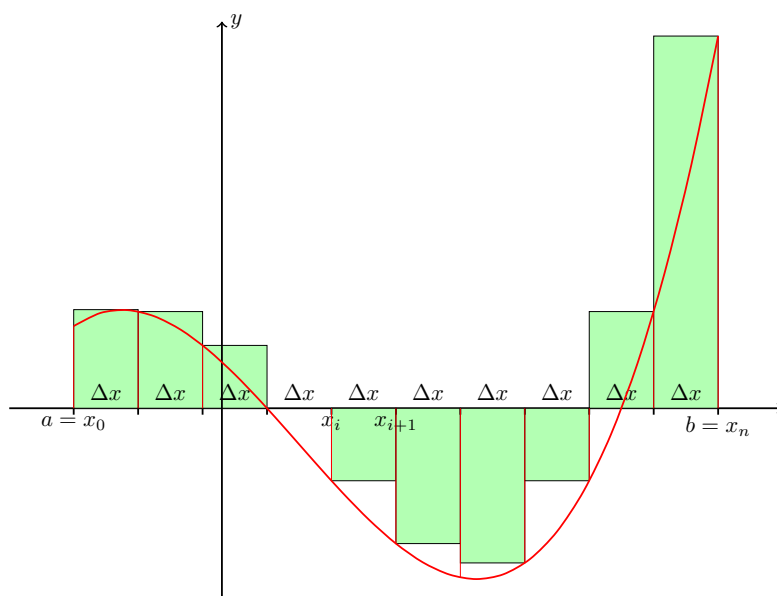
Definicija 18 (Određeni (Riemannov) integral) *Ako je $\bar{I} = \underline{I}$, onda se njihov zajednički iznos zove određenim (ili Riemannovim) integralom funkcije $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ i označava s $\int_a^b F(x) dx$. Tada kažemo da je podintegralna funkcija F (Riemann-)integrabilna na segmentu $[a, b]$.*

Za neprekidne funkcije dokazuje se da im se donji i gornji integral uvijek poklapaju, pa je svaka funkcija koja je neprekidna na $[a, b]$ ujedno i integrabilna na $[a, b]$. Štoviše, svaka monotona (dakle, rastuća ili padajuća) funkcija na $[a, b]$ je integrabilna. S druge strane, znamo da ako je funkcija derivabilna na nekom otvorenom intervalu, onda je na njemu i neprekidna, odnosno derivabilnost povlači neprekidnost, a neprekidnost integrabilnost. Preciznije:

³⁹Zapravo, infimum gornjih i supremum donjih integralnih suma.



Slika 3.28: Donja integralna suma.



Slika 3.29: Gornja integralna suma.

Propozicija 14 *Neka je $F : I \rightarrow \mathbb{R}$ funkcija zadana na otvorenom intervalu I . Ako je ona na tom intervalu derivabilna, onda je na njemu neprekidna i integrabilna na svakom $[a, b] \subset I$. Ako je F neprekidna na segmentu $[a, b]$, onda je ona i integrabilna na tom segmentu.*

Obrnuto, već smo vidjeli da postoje funkcije koje su neprekidne, a nisu derivabilne, a i da postoje funkcije koje su integrabilne, a nisu neprekidne. Zapravo su sve po dijelovima neprekidne funkcije na svakom podsegmentu svoje domene integrabilne i teško je naći primjer ograničene funkcije (dakle, funkcije za koju definicija određenog integrala ima smisla), a koja nije integrabilna. Najpoznatiji je takav primjer Dirichletova funkcija, spomenuta na stranici 35.

Sad konačno ima smisla i osnovni teorem infinitezimalnog računa (Newton-Leibnizova formula) koji iskazuje međusobnu inverznost deriviranja i integriranja i povezuje određene s neodređenim integralima za neprekidne funkcije.

Teorem 13 (Osnovni teorem infinitezimalnog računa) *Neka je realna funkcija F neprekidna na segmentu $[a, b]$. Tada je formulom*

$$f(x) = \int_a^x F(t) dt, \quad x \in [a, b]$$

definirana funkcija $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ i ona je antiderivacija funkcije F na $[a, b]$. Nadalje, za svaku antiderivaciju f od F vrijedi

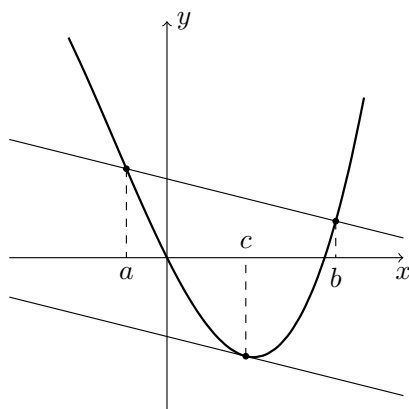
$$\int_a^b F(x) dx = f(x) \Big|_a^b = f(b) - f(a).$$

Zadatak 71 *Koristeći Newton-Leibnizovu formulu dokažite svojstvo linearnosti za određene integrale neprekidnih funkcija.*

3.5 Teoremi srednje vrijednosti

Dva su značajna teorema srednje vrijednosti u matematičkoj analizi: Lagrangeov teorem srednje vrijednosti, koji se odnosi na derivacije, te teorem srednje vrijednosti za integrale. Oni su, naravno, međusobno povezani.

Geometrijski smisao Lagrangeovog teorema srednje vrijednosti je sljedeći. Ako imamo graf derivabilne funkcije i njegovu proizvoljnu sekantu, uvijek se može naći bar jedna točka na grafu (između točaka koje određuju sekantu) takva da je tangenta u toj točki paralelna toj sekanti (slika 3.30). Fizikalno gledamo, teorem kaže da za svaku vremenski ovisnu veličinu postoji trenutak u kojem je trenutna brzina promjene te veličine jednaka prosječnoj brzini tokom cijelog promatranog vremenskog intervala. Formalno, teorem glasi:



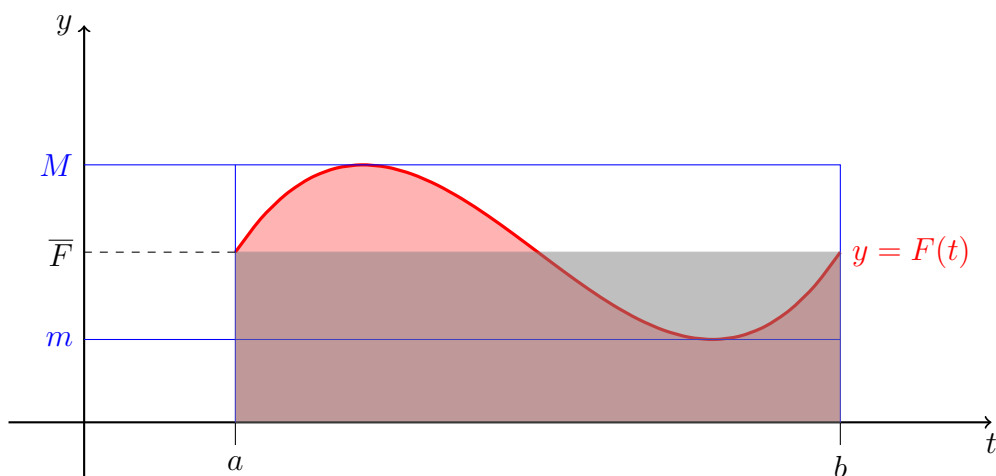
Slika 3.30: Lagrangeov teorem srednje vrijednosti.

Teorem 14 (Lagrangeov teorem srednje vrijednosti) *Ako je realna funkcija jedne varijable f derivabilna na otvorenom intervalu I , onda za svaka dva broja $a, b \in I$ (pri čemu je $a < b$) postoji broj $c \in \langle a, b \rangle$ takav da je*

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Zadatak 72 *Recimo da znate da za neku funkciju $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ vrijedi $f(2) = 1$ i $f'(x) \leq 5$ za sve $x \in \mathbb{R}$. Pokažite da je $f(5) \leq 16$ i $f(-1) \geq -14$.*

Teorem srednje vrijednosti za integrale odnosi se na prosječne vrijednosti neprekidnih funkcija na segmentu, no može se primijeniti na po dijelovima neprekidne funkcije. Po Bolzano-Weierstrašovom teoremu 6 znamo da neprekidne funkcije na segmentu postižu svoju minimalnu i maksimalnu vrijednost m i M . Prosječna vrijednost se, logično, mora nalaziti negdje između minimalne i maksimalne vrijednost, ali gdje? Uzmimo za ilustraciju situaciju pozitivne neprekidne funkcije, iako se zaključivanje na isti način može proširiti i na sve po dijelovima neprekidne funkcije na segmentu. Znamo da je za takve funkcije F integral $\int_a^b F(t) dt$ isto što i (crvena) površina omeđena grafom, vertikalama $t = a$ i $t = b$ te s osi apscisa (crvenkasta površina na slici 3.31). Ta površina je u biti isto što i „ukupna“ vrijednost funkcije F na tom intervalu (jer je određeni integral poopćenje sumiranja na infinitezimalne razmake). Također, ona je sigurno između površina pravokutnika koji su jednako široki kao i ta površina, ali su im visine m odnosno M . Očigledno postoji pravokutnik iste širine koji ima točno površinu $\int_a^b F(x) dx$ (sivo na slici 3.31). Njegova visina $\bar{F}$ je prosječna vrijednost F na intervalu $[a, b]$. Za taj pravokutnik vrijedi da je dio crvene površine iznad njega jednak manjcima crvene površine ispod njega. Ova razmatranja formaliziraju se kao:



Slika 3.31: Teorem srednje vrijednosti za integrale.

Teorem 15 (Teorem srednje vrijednosti za integrale) *Ako je F (po dijelovima) neprekidna na $[a, b]$ i m je njena minimalna, a M maksimalna vrijednost na tom intervalu, onda je*

$$(b - a) m \leq \int_a^b F(t) \, dt \leq (b - a) M,$$

odnosno postoji ordinata $\bar{F} \in [m, M]$ takva da je

$$\int_a^b F(t) \, dt = \bar{F} \cdot (b - a).$$

Dakle, prosječna (srednja) vrijednost neprekidne funkcije F na intervalu $[a, b]$, se računa kao

$$\bar{F} = \frac{1}{b - a} \int_a^b F(t) \, dt.$$

Uočimo da je formula za računanje prosječne vrijednosti konzistentna u smislu fizikalnih dimenzija: Znamo da je mjerna jedinica integrala $\int_a^b F(t) \, dt$ jednaka umnošku jedinica od $F(t)$ i t , a to se dijeli s razlikom b i a (koji su nezavisne varijable, dakle imaju jedinicu od t) te rezultat, prosječna vrijednost od F , ima jedinicu kao i $F(t)$.

Sad lako vidimo i poveznicu s Lagrangeovim teoremom srednje vrijednosti. Ako je f antiderivacija od F i F neprekidna, po Newton-Leibnizovoj formuli je $\bar{F} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ te je srednja vrijednost $\bar{F}$ funkcije F po Lagrangeovom teoremu srednje vrijednosti jednaka $f'(c) = F(c)$ za neki c između a i b .

Primjer 175 Kolika je prosječna temperatura patke iz primjera 89 tijekom pečenja? Vidjeli smo: U svakom trenutku t tijekom pečenja temperatura patke je

$$\vartheta(t) = 200^\circ\text{C} - 198^\circ\text{C}e^{-kt \text{ min}^{-1}},$$

gdje je $k = \left(-\frac{1}{30} \ln \frac{92}{99}\right) \text{ min}^{-1} \approx 0,00244438 \text{ min}^{-1}$. Patka je pečena nakon $T = \frac{\text{min}^{-1}}{k} \ln \frac{198}{200-80} \approx 204,868 \text{ min}$. Dakle, tražimo

$$\begin{aligned}\bar{\theta} &= \frac{1}{T-0} \int_0^T \theta(t) dt = \frac{1}{T} \cdot \left(200^\circ\text{C} \cdot T + \frac{1}{k} 198^\circ\text{C} (e^{-kT \text{ min}^{-1}} - 1) \right) = \\ &= 200^\circ\text{C} + \frac{120^\circ\text{C} - 198^\circ\text{C}}{\ln \frac{198}{120}} \approx 44,2^\circ\text{C}.\end{aligned}$$

Primjer 176 Kolika je prosječna gustoća nehomogenog ravnog štapa duljine L kojemu je ovisnost gustoće o udaljenosti od jednog kraja opisana neprekidnom funkcijom $\rho = \rho(x)$ i gdje mu je centar mase? Znamo da je ukupna masa štapa (vidi str. 89) $M = \int_0^L \rho(x) dx$, pa je prosječna gustoća

$$\bar{\rho} = \frac{M}{L} = \frac{1}{L} \int_0^L \rho(x) dx.$$

Poziciju X centra mase dobijemo iz uvjeta

$$M X = \int_0^L x \rho(x) dx.$$

Posljednji je naime integral infinitezimalna verzija sume $\sum m_i x_i$.

Sad konačno možemo završiti i naš motivacijski primjer 48.

Primjer 177 U primjeru 67 vidjeli smo da je za primjer 48 funkcija brzine dana s

$$v(t) = -0,100 \frac{\text{m}}{\text{s}^4} t^3 + 3,00 \frac{\text{m}}{\text{s}^3} t^2 + 35 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

za $0 \leq t \leq 30 \text{ s}$ i trebalo je odrediti prosječnu brzinu. Supstituiramo li $x = \frac{t}{\text{s}}$ i $y = \frac{v}{\text{m/s}}$ u gornju formulu dobit ćemo isti zadatak u preglednijem obliku: Treba odrediti prosjek funkcije $y = -\frac{1}{10}x^3 + 3x^2 + 35$ na $[0, 30]$:

$$\bar{y} = \frac{1}{30-0} \int_0^{30} \left(-\frac{1}{10}x^3 + 3x^2 + 35 \right) dx = 260,$$

dakle je prosječna brzina rakete iz primjera 48 $\bar{v} = 260 \text{ m/s}$.

Zadatak 73 Tokom jednog dana utvrđeno je da je ovisnost temperature θ ($u^\circ\text{C}$) o vremenu t (u satima od podneva: $-12 \text{ h} \leq t \leq 12 \text{ h}$) dobro opisana formulom $\theta(t) = 0,001^\circ\text{C h}^{-4} t^4 - 0,280^\circ\text{C h}^{-2} t^2 + 25^\circ\text{C}$. Koja je prosječna vrijednost temperature tog dana?

3.6 Nepravi integrali

Promotrimo integral

$$\int_1^5 \frac{dt}{(t-2)^2}.$$

Na prvi pogled radi se o običnom određenom integralu za koji bi formalni račun dao $\int_1^5 \frac{dt}{(t-2)^2} = -\frac{1}{t-2} \Big|_1^5 = -\frac{4}{3}$. To rješenje je krivo! Zašto? Ako je to određeni integral, onda bi broj $-\frac{4}{3}$ trebao odgovarati razlici površina iznad i ispod t -osi koje graf podintegralne funkcije $F(x) = \frac{1}{(t-2)^2}$ zatvara s t -osi, između vertikalna $t = 1$ i $x = t$. Posebno, budući da je iznos integrala ispao negativan, to bi značilo da je F između $t = 1$ i $t = 5$ veći dio površine ispod, nego iznad t -osi. No, F je očigledno svuda pozitivna?! Problem je da u gornjem integralu podintegralna funkcija nije ograničena na intervalu na kojem integriramo, a određeni (Riemannov) integral je definiran samo za funkcije ograničene na području integriranja. Stoga gornji integral *nije* određeni integral.

Nepravi integrali su integrali koji podsjećaju na određene integrale jer imaju granice integriranja, ali je funkcija na području integriranja neograničena ili je pak područje integriranja neograničeno. Primjeri nepravih integrala su:

$$\int_0^3 \frac{dt}{t-1}, \int_0^1 \ln x \, dx, \int_{\pi/2}^{\pi} \operatorname{tg} t \, dt,$$

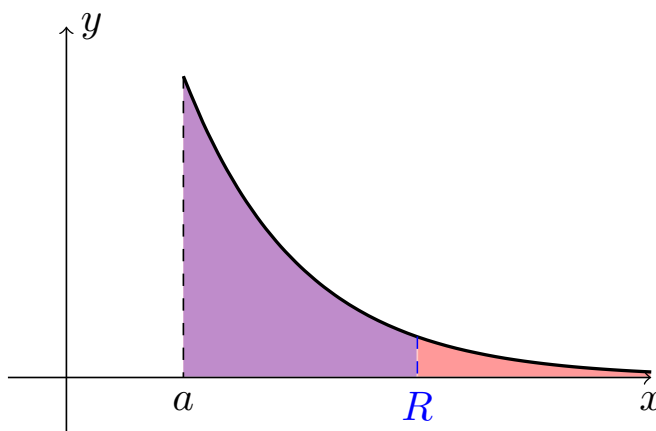
$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}, \int_{-\infty}^5 \frac{dt}{1+t^2}, \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} \, dx.$$

Prva tri imaju ograničena područja integriranja, ali su podintegralne funkcije unutar područja integriranja neograničene (imaju vertikalnu asimptotu), a druga tri imaju neograničena područja integriranja, ali su podintegralne funkcije na tim područjima ograničene (sve tri unutar navedenih intervala poprimaju vrijednosti isključivo između 0 i 1).

Dakle, nepravu integrale možemo podijeliti u dvije vrste: one s neograničenom podintegralnom funkcijom na ograničenom području integriranja i one s ograničenom podintegralnom funkcijom na neograničenom području integriranja. Posljednji tip je čest u primjenama vezanim za vjerojatnost (i stoga za kvantnu teoriju).

3.6.1 Nepravi integrali s neograničenim područjem integracije

Ako je područje integriranja neograničeno, tj. ako je jedna ili obje granice integriranja beskonačna, nepravu integrale dobivamo kao limese određenih s varijabilnom granicom: Beskonačna se granica integrala zamjenjuje konačnom, ali varijabilnom, čime integral postaje određeni, a nakon integriranja s ta nova granica pusti da teži u odgovarajuću beskonačnost. Za integrale kojima je gornja granica beskonačna ta ideja je ilustrirana slikom 3.32.



Slika 3.32: Nepravi integrali s neograničenim područjem integriranja.

Definicija 19 (Nepravi integrali s neograničenim područjem integriranja)

Integrali $\int_a^b F(t) dt$ kod kojih je $a = -\infty$ ili $b = +\infty$ definiraju se ovako:

- $\int_{-\infty}^b F(t) dt = \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{-R}^b F(t) dt.$
- $\int_a^{+\infty} F(t) dt = \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_a^R F(t) dt.$
- $\int_{-\infty}^{+\infty} F(t) dt = \int_{-\infty}^c F(t) dt + \int_c^{+\infty} F(t) dt$ za bilo koji $c \in \mathbb{R}.$

Ako je konačni rezultat izračunavanja potrebnog(ih) limesa realan broj, kažemo da nepravi integral konvergira, a u suprotnom da divergira.

Napomena 5 Integrali s neograničenim područjem integriranja na kojem funkcija nije ograničena, primjerice $\int_0^{\infty} \ln t dt$ ili $\int_{-\infty}^1 x^2$, sigurno ne konvergiraju.

Primjer 178 Promotrimo integrale tipa

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^a},$$

gdje je a realan broj. Primijetimo prvo da oni u slučaju $a < 0$ sigurno divergiraju, jer u tom slučaju podintegralna funkcija nije ograničena na području integriranja (vidi prethodnu napomenu).

Za $a > 0$ podintegralna funkcija ima x -os kao desnu horizontalnu asimptotu pa je ograničena na intervalu $[1, +\infty)$. Po definiciji je

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x^a} = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_1^R \frac{dx}{x^a}.$$

Integrali $\int_1^R \frac{dx}{x^a}$ su određeni integrali. Imamo dva slučaja, ovisno o tome je li $a = 1$ ili nije. Za $a = 1$ dobivamo

$$\int_1^R \frac{dx}{x^a} = \int_1^R \frac{dx}{x} = \ln x \Big|_1^R = \ln R$$

i stoga

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x} = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_1^R \frac{dx}{x} = \lim_{R \rightarrow \infty} \ln R = +\infty.$$

Dakle, za $a = 1$ imamo divergentan nepravu integral. Za pozitivan $a \neq 1$ imamo

$$\int_1^R \frac{dx}{x^a} = \frac{x^{1-a}}{1-a} \Big|_1^R = \frac{R^{1-a}}{1-a} - \frac{1}{1-a}.$$

Ako je $a > 1$, onda je $1 - a < 0$ pa je $\lim_{R \rightarrow \infty} R^{1-a} = 0$ pa je stoga

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x^a} = \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{R^{1-a}}{1-a} - \frac{1}{1-a} = \frac{1}{a-1}.$$

Ako je pak $a < 1$, onda je $1 - a > 0$ pa je $\lim_{R \rightarrow \infty} R^{1-a} = +\infty$ i stoga je

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x^a} = \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{R^{1-a}}{1-a} - \frac{1}{1-a} = +\infty.$$

Naposlijetku, za $a = 0$ imamo $\int_1^{+\infty} dx = \lim_{R \rightarrow +\infty} (R - 1) = +\infty$.

Zaključujemo: Integrali $\int_1^\infty \frac{dx}{x^a}$ su za $a \leq 1$ divergentni nepravu i za $a > 1$ konvergentni nepravu integrali.

Zadatak 74 Izračunajte $\int_0^{+\infty} \exp(-t) dt$.

Za slučaj integrala tipa $\int_{-\infty}^{+\infty}$, po definiciji treba ih „razbiti“ u nekoj točki c , a najčešće se bira $c = 0$. Ukoliko je funkcija f parna (ili neparna) i ako nepravu integral $\int_0^{+\infty} F(t) dt$ konvergira, možemo primijeniti pravila za takve funkcije iz određenih integrala, tj. za parnu funkciju je tada $\int_{-\infty}^{+\infty} F(t) dt = 2 \int_0^{+\infty} F(t) dt$, a za neparnu $\int_{-\infty}^{+\infty} F(t) dt = 0$.

Primjer 179 Odredimo $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$. Po definiciji on je jednak $\int_{-\infty}^0 \frac{dx}{1+x^2} + \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$. Podintegralna funkcija je parna. Odredimo $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$. Imamo:

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_0^R \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{R \rightarrow +\infty} \arctg(R) = \frac{\pi}{2}.$$

Stoga je

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = 2 \cdot \frac{\pi}{2} = \pi.$$

Uočimo korisnu činjenicu: Integrali tipa $\int_a^\infty F(t) dt$ sigurno divergiraju ako je F neograničena na $[a, +\infty)$, nego i kad ima desnu horizontalnu asimptotu različitu od osi apscisa. U posljednjem je slučaju naime u površinu koja je opisana takvim integralom uključen pravokutnik beskonačne širine i fiksne visine, a ta površina ne može biti konačna. Analogno, integrali tipa $\int_{-\infty}^b F(t) dt$ sigurno divergiraju čim F nema os apscisa za lijevu horizontalnu asimptotu.

Pomoću nepravih integrala s neograničenim područjem integriranja definiraju se neke tzv. specijalne funkcije, među kojima je najpoznatija **gama-funkcija** Γ . Njen smisao je poopćenje faktoriijela⁴⁰ na realne brojeve:

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt.$$

Gama-funkcija kao prirodnu domenu ima $\mathbb{R} \setminus (-\mathbb{N})$. Za prirodne brojeve n je $\Gamma(n+1) = n!$, pa uvrštavajući $x = n+1$ u definiciju gama-funkcije dobivamo jednu formulu koja olakšava izračunavanje nekih integrala koji se pojavljuju u kvantnoj teoriji:

$$\int_0^{+\infty} x^n \exp(-ax) dx = \frac{n!}{a^{n+1}} \quad (a > 0). \quad (3.6)$$

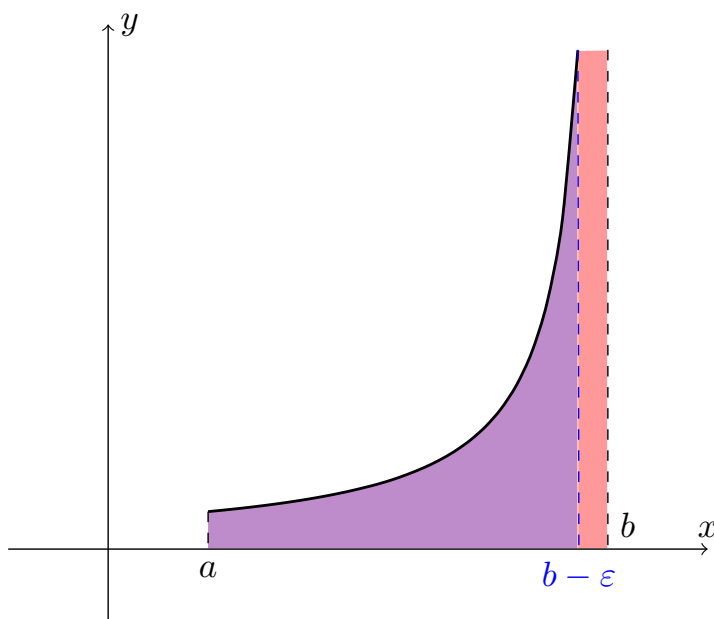
S druge strane, neki nepravi integrali se ne mogu izračunati preko definicije jer nije određiva formula antiderivacije, no mogu se izračunati drugim matematičkim metodama. Među njima je korisno znati jedan, koji se često pojavljuje u računima vezanim za vjerojatnost:

$$\int_0^{+\infty} \exp(-ax^2) dx = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{a}} \quad (a > 0). \quad (3.7)$$

3.6.2 Nepravi integrali neograničenih funkcija

Za neprave integrale s neograničenom podintegralnom funkcijom na ograničenom području integriranja ideja definicije je slična: malo (za $\varepsilon > 0$) se odmaknemo prema unutrašnjosti područja integriranja od točke u kojoj imamo vertikalnu asimptotu (primjerice, ako je ona u desnom rubu pomaknemo se ulijevo, vidi sliku 3.33), računamo određeni integral s tako pomaknutom granicom i zatim pomalo smanjujemo odmak ε prema 0.

⁴⁰Za prirodan broj n , n faktoriijela je broj $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n$. Po definiciji je $0! = 1$.



Slika 3.33: Nepravi integral neograničene funkcije.

Definicija 20 (Nepravi integrali neograničenih funkcija) Integral $\int_a^b F(x) dx$ za F koja unutar $[a, b]$ ima vertikalnu asimptotu se definira na sljedeći način:

- Ako je $x = a$ vertikalna asimptota za F ,

$$\int_a^b F(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{a+\varepsilon}^b F(x) dx.$$

- Ako je $x = b$ vertikalna asimptota za F ,

$$\int_a^b F(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_a^{b-\varepsilon} F(x) dx.$$

- Ako je za neki $c \in (a, b)$ pravac $x = c$ VA za f :

$$\int_a^b F(x) dx = \int_a^c F(x) dx + \int_c^b F(x) dx.$$

Ako je rezultat računanja nepravog integrala realan broj, kažemo da integral konvergira, u suprotnom da divergira.

Primjer 180 Promotrimo integrale tipa

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^a},$$

gdje je a realan broj. Primijetimo prvo da su to u slučaju $a \leq 0$ ($-a \geq 0$) određeni, a ne nepravi integrali:

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^a} = \int_0^1 x^{-a} dx = \frac{1}{1-a}, \quad a \leq 0.$$

Za $a > 0$ podintegralna funkcija ima vertikalnu asimptotu u lijevom rubu područja integriranja. Stoga je po definiciji $\int_0^1 \frac{dx}{x^a} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \int_{\varepsilon}^1 \frac{dx}{x^a}$. Integrali $\int_{\varepsilon}^1 \frac{dx}{x^a}$ sad su određeni integrali neprekidnih funkcija pa možemo koristiti Newton-Leibnizovu formulu. Imamo dva slučaja, ovisno o tome je li $a = 1$ ili nije. Za $a = 1$ dobivamo $\int_{\varepsilon}^1 \frac{dx}{x} = -\ln(\varepsilon)$, a za pozitivan $a \neq 1$ je $\int_{\varepsilon}^1 \frac{dx}{x^a} = \frac{1}{1-a} \cdot (1 - \varepsilon^{1-a})$. Zaključujemo:

$$\int_0^1 \frac{dx}{x} = \begin{cases} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \frac{1}{1-a} (1 - \varepsilon^{1-a}) = \{jer\ 1-a > 0\} = \frac{1}{1-a}, & 0 < a < 1 \\ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} (-\ln(\varepsilon)) = +\infty, & a = 1 \\ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \frac{1}{1-a} (1 - \varepsilon^{1-a}) = \{jer\ 1-a < 0\} = +\infty, & a > 1 \end{cases}.$$

Dakle, integrali $\int_0^1 \frac{dx}{x^a}$ su za $a \leq 0$ određeni, za $0 < a < 1$ konvergentni nepravi i za $a \geq 1$ divergentni nepravi integrali.

Zadatak 75 Izračunajte $\int_0^1 \log_a t \, dt$.

Nepravi integrali česti su u primjenama vezanim za vjerojatnosni račun, posebice u kvantnoj teoriji. Tu je potrebno računanje raznih vjerojatnosti tzv. kontinuiranih slučajnih varijabli, tj. nepredvidivih numeričkih rezultata pokusa koji mogu popriimiti sve iznose unutar nekog intervala realnih brojeva. Već smo u primjeru 124 spomenuli da tada intuicija koju imamo iz znanja računanja vjerojatnosti događaja za pokuse koji imaju samo konačno mnogo mogućih ishoda ne vrijedi. Ovdje ćemo se osvrnuti samo na osnovne ideje i principe vjerojatnosnog računa za kontinuirane slučajne varijable.

U vjerojatnosti razmatramo **slučajne pokuse**, tj. aktivnosti za koje su poznati mogući ishodi, ali nije moguće unaprijed predvidjeti koji će se od njih dogoditi. Za dani slučajni pokus pojedinačni mogući ishodi nazivaju se elementarnim događajima, a skup Ω svih elementarnih događaja zove se **vjerojatnosni prostor**. Podskupovi od Ω nazivaju se **(slučajnim) događajima**. U pravilu je zgodno elementarne događaje poistovjetiti s realnim brojevima. To činimo tako da slučajni pokus, tj. funkcijom $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ koja elementarnim događajima pridružujemo realne brojeve. Slučajne varijable kojima je slika interval zovu se **kontinuirane slučajne varijable**.

Primjer 181 Funkcija X koja slučajno (nasumično) odabranom studentu pridružuje njegovu visinu je kontinuirana slučajna varijabla.

Vjerojatnost je realna funkcija p koja slučajnim događajima $A \subseteq \Omega$ pridružuje njihove vjerojatnosti $p(A)$, pri čemu mora vrijediti:

1. Vjerojatnost nikog dogadaja ne može biti negativna: $p(A) \geq 0$ za sve A .
2. Sigurno će se desiti neki ishod iz vjerojatnosnog prostora: $p(\Omega) = 1$.
3. Vjerojatnost da se dogodi neki od događaja koji se međusobno isključuju (ne se mogu istovremeno dogoditi) jednaka je zbroju njihovih vjerojatnosti: $p(A_1 \cup A_2 \cup \dots) = p(A_1) + p(A_2) + \dots$ ako je $A_i \cap A_j = \emptyset$ za sve parove indeksa i, j .

Iz navedenih svojstava lako se pokaže da su vjerojatnosti događaja uvijek brojevi između 0 i 1:

$$0 \leq p(A) \leq 1$$

za sve $A \subseteq \Omega$. Primijetimo i da se za svaki događaj A („dogodio se A ”) on i njegov suprotni događaj $A^c = \Omega \setminus A$ („nije se dogodio A ”) međusobno isključuju, a u uniji daju čitav Ω . Stoga je $p(A) + p(A^c) = p(\Omega) = 1$, te vrijedi sljedeća formula za **vjerojatnost suprotnog događaja**:

$$p(A^c) = 1 - p(A).$$

U slučaju kontinuiranih slučajnih varijabli u pravilu postoji **funkcija gustoće vjerojatnosti** $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ takva da se vjerojatnost da takva slučajna varijabla poprimi vrijednost najviše (manje od) b (realan broj ili $+\infty$) može izračunati kao

$$p(X \leq b) = p(X < b) = \int_{-\infty}^b \varphi(x) dx.$$

Budući da vjerojatnost ne može nikad biti negativna, vidimo da kao funkcije gustoće u obzir dolaze samo nenegativne funkcije koje i lijevo i desno imaju x -os kao horizontalnu asimptotu. Pritom, uvijek je $\varphi(x) = 0$ ako x nije u slici funkcije X , tj. ako x nije pridružen nikojem elementarnom događaju. Nadalje, iz $p(\Omega) = 1$ slijedi **normiranost funkcije gustoće vjerojatnosti**:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) dx = 1$$

Vjerojatnost da slučajna varijabla poprimi iznos barem a je $p(X \geq a) = 1 - p(X < a)$, dakle:

$$p(X \geq a) = P(X > a) = \int_a^{+\infty} \varphi(x) dx.$$

Također se lako vidi da vrijedi i

$$p(a \leq X \leq b) = \int_a^b \varphi(x) dx.$$

Ukratko: Vjerojatnost da slučajna varijabla X poprimi vrijednosti između a i b (gdje je $a \leq b$ i a je realan broj ili $-\infty$, a b je realan broj ili $+\infty$) jednaka je površini koju s osi x zatvara njena funkcija gustoće φ , unutar područja integriranja. Stoga je za kontinuirane slučajne varijable X vjerojatnost $p(X = a) = p(a \leq X \leq a) = 0$ za sve $a \in \mathbb{R}$: Za kontinuirane slučajne varijable je vjerojatnost da poprima bilo koju pojedinačnu vrijednost uvijek 0. Posebno, iznosi $\varphi(x)$ nisu vjerojatnosti da slučajna varijabla X poprimi vrijednost x .⁴¹

Često je potrebno odrediti i **očekivanje (očekivana ili prosječna vrijednost)** slučajne varijable X . Ono se definira s

$$\langle X \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x \varphi(x) dx.$$

Primjer 182 *Opažanje elektrona unutar na nekoj udaljenosti do jezgre je primjer slučajnog pokusa, svaka konkretna udaljenost je elementarni događaj, a svaki raspon udaljenosti je primjer događaja. Moguće udaljenosti elektrona od jezgre su od 0 naviše. Stoga pokus 'promatranja' udaljenosti elektrona do jezgre poistovjećujemo s kontinuiranom slučajnom varijablom r koja svakoj mogućoj udaljenosti pridružuje njen iznos podijeljena s, npr., pm. Slika varijable r je $[0, +\infty)$.*

U kvantnoj teoriji se elektroni opisuju kompleksnim funkcijama ψ koje zovemo valnim funkcijama odnosno orbitalama koje *indirektno* opisuju vjerojatnost nalaženja elektrona u nekom dijelu prostora. Prema Bornovoj interpretaciji, za valnu funkciju ψ je funkcija⁴² $|\psi|^2 = \psi^* \psi$ funkcija gustoće vjerojatnosti za nalaženje čestice opisane valnom funkcijom ψ unutar prostora u kom se nalazi.

Primjer 183 *Čestica u jednodimenzionalnoj kutiji je čestica koja se može gibati samo unutar segmenta $[0, a]$. Pripadne valne funkcije dane su (za različite kvantne brojeve $n \in \mathbb{N}_0$) formulom*

$$\psi_n(x) = A \sin \frac{n\pi x}{a}, \quad 0 \leq x \leq a.$$

Odgovarajuća funkcija gustoće vjerojatnosti je prema Bornovoj interpretaciji

$$\varphi_n(x) = A^2 \sin^2 \frac{n\pi x}{a} = \frac{A^2}{2} \left(1 - \cos \frac{2n\pi x}{a} \right).$$

Uvjet normiranja se ovdje svodi na

$$\int_0^a \varphi_n(x) dx = 1.$$

Imamo

$$\int_0^a \varphi_n(x) dx = \int_0^a \frac{A^2}{2} \left(1 - \cos \frac{2n\pi x}{a} \right) dx = \frac{A^2}{2} \cdot a,$$

dakle je $A = \sqrt{\frac{2}{a}}$.

⁴¹No, $p(x - 1/2 \leq X \leq x + 1/2) \approx \varphi(x)$.

⁴²Sa * se kod funkcija označava kompleksno konjugiranje.

Zadatak 76 Odredite očekivanu vrijednost $\langle x \rangle$ položaja čestice kvantnog broja n u jednodimenzionalnoj kutiji $[0, a]$ i vjerojatnost P da se čestica nađe u srednjoj trećini kutije.

Za elektrone valna funkcija ovisi o tri prostorne varijable, te bi nam za račune s odgovarajućom funkcijom gustoće vjerojatnosti trebao trostruki integral. No, izračunavanjem odgovarajućeg dvostrukog integrala izvodi se **radijalna gustoća vjerojatnosti**

$$\phi(r) = \begin{cases} 4\pi r^2 |\psi|^2, & r > 0 \\ 0, & r \leq 0 \end{cases},$$

koja opisuje vjerojatnost da elektron bude na nekoj udaljenosti r od jezgre.

Primjer 184 Odredimo prosječni (dakle, očekivani) polumjer vodikove 1s-orbitale $\langle r \rangle$, tj. valne funkcije definirane s $\psi_{1,0,0} = \frac{1}{\sqrt{a_0^3 \pi}} \exp\left(-\frac{r}{a_0}\right)$ za $r > 0$. Pritom je $a_0 = 52,9$ (jer je 52,9 pm tzv. Bohrov radijus). Stoga je radijalna funkcija gustoće

$$\phi_{1,0,0}(r) = 4r^2 \pi |\psi_{1,0,0}(r)|^2 = \frac{4}{a_0^3} r^2 \exp\left(-\frac{2r}{a_0}\right).$$

Stoga koristeći formulu 3.6 dobivamo:

$$\langle r \rangle = \int_0^{+\infty} r \phi(r) dr = \frac{4}{a_0^3} \int_0^{+\infty} r^3 \exp\left(-\frac{2r}{a_0}\right) dr = \frac{4}{a_0^3} \cdot \frac{3!}{(2/a_0)^4} = \frac{3}{2} a_0.$$

Uočite: Prosječna tj. očekivana udaljenost elektrona od jezgre je $\frac{3}{2}$ Bohrova radijusa, dok je udaljenost za koju je $\psi_{1,0,0}^2$ maksimalna (zadatak za Vas: pokažite to) jednaka Bohrovom radijusu. Dakle: Očekivani rezultat ne mora biti isto što i rezultat koji odgovara maksimumu funkcije gustoće. No, kako se radi o kontinuiranoj slučajnoj varijabli, vjerojatnost da 1s elektron nađemo točno na nekoj udaljenosti od jezgre, pa bila to i „najvjerojatnija” udaljenost a_0 ili očekivana $\frac{3}{2}a_0$, jednaka je 0. No, primjerice, vjerojatnost da će naš elektron biti na udaljenosti između a_0 i $\frac{3}{2}a_0$ jednak je površini ispod grafa od $\phi_{1,0,0}$ i između navedenih apscisa (iznosi $\int_{a_0}^{3a_0/2} \phi_{1,0,0}(r) dr = (10e - 17)/(2e^3) \approx 25,3\%$).

Primjer 185 Odredimo konstantu normiranja $N > 0$ 2s-orbitale vodikova atoma, tj. valne funkcija $\psi_{2,0,0}(r) = N \left(2 - \frac{r}{a_0}\right) \exp\left(-\frac{r}{2a_0}\right)$. Odgovarajuća radijalna funkcija gustoće vjerojatnosti je

$$\phi_{2,0,0}(r) = 4N^2 \pi r^2 \left(2 - \frac{r}{a_0}\right)^2 \exp\left(-\frac{r}{a_0}\right),$$

a uvjet normiranja za nju je

$$1 = \int_{-\infty}^{+\infty} \phi_{2,0,0}(r) dr = \int_0^{+\infty} \phi_{2,0,0}(r) dr$$

(jer je $\phi_{2,0,0}(r) = 0$ za $r < 0$). Računanje nepravog integrala na desnoj strani gornje jednakosti daje $32N^2a_0^3\pi$, dakle je konstanta normiranja $N = \sqrt{\frac{1}{32\pi a_0^3}} = \frac{1}{4\sqrt{2\pi a_0^3}}$.

Završimo ovo poglavlje kratkim osvrtom na jedan termin koji se često susreće u računima s valnim funkcijama: **ortogonalnost**. Tako se često koriste razne konkretne formulacije rečenice „Valne funkcije jedne čestice koje odgovaraju različitim kvantnim brojevima su ortogonalne“. Radi se o specijalnom slučaju ortogonalnosti dviju funkcija integrabilnih na istom intervalu I . Naime, ako su $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$ integrabilne, pri čemu je I segment ili je pak jedna ili obje granice od I beskonačna i odgovarajući nepravi integrali konvergiraju, onda se njihov **skalarni produkt** definira kao

$$\langle f, g \rangle = \int_I f(t) g(t) dt.$$

Za f i g kažemo da su ortogonalne ako im je skalarni produkt jednak nuli.

Zadatak 77 *Provjerite da su valne funkcije koje odgovaraju različitim kvantnim brojevima za česticu u jednodimenzionalnoj kutiji međusobno ortogonalne.*

Poglavlje 4

Kompleksni brojevi i polarne koordinate

4.1 Kompleksna ravnina

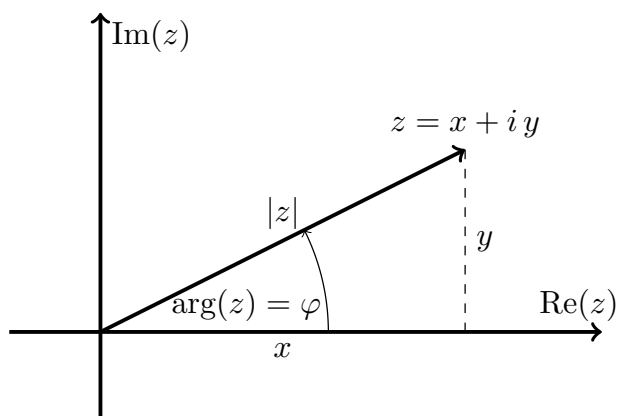
Imaginarni brojevi prvi put su se pojavili u 16. stoljeću, vezano za problem rješavanja kubne jednadžbe. Njihova upotreba raširila se tokom 19. stoljeća, nakon što je otkrivena njihova geometrijska interpretacija, što je omogućilo i prve primjene tih brojeva. Danas su najpoznatije primjene kompleksnih brojeva vezane za teoriju elektriciteta i magnetizma (koju bitno pojednostavljaju) te za kvantnu teoriju. Kao matematička motivacija za uvođenje imaginarnih brojeva obično se uzimaju kvadratne jednadžbe s realnim koeficijentima. Poznato je da kvadratna jednadžba $ax^2 + bx + c = 0$ nema realnih rješenja ako je njezina diskriminanta $D = b^2 - 4ac$ negativna. Najjednostavniji primjer takve jednadžbe je $x^2 + 1 = 0$. Kao što su 1 i -1 rješenja kvadratne jednadžbe $x^2 - 1 = 0$, definira se da su rješenja kvadratne jednadžbe $x^2 + 1 = 0$ brojevi i i $-i$. Broj i zove se imaginarna jedinica,¹ ona je dakle jedan od dva moguća (kompleksna) broja koji kvadrirani daju -1 :

$$i^2 = (-i)^2 = -1.$$

Definicija 21 (Kompleksni brojevi) Kompleksni brojevi su brojevi oblika $z = x + yi$ s $x, y \in \mathbb{R}$. Broj $x = \operatorname{Re} z$ se zove realnim dijelom, a broj $y = \operatorname{Im} z$ imaginarnim dijelom kompleksnog broja z (dakle, x realni i imaginarni dio kompleksnog broja su realni brojevi). Skup svih kompleksnih brojeva označavamo s $\mathbb{C}$.

Skup $\mathbb{R}$ je podskup od $\mathbb{C}$ jer svaki realni broj x možemo shvatiti kao kompleksni broj $x + 0 \cdot i$. Brojeve kojima je realni dio nula zovemo čisto imaginarnima.

¹Oznaka i za imaginarnu jedinicu potječe iz 18. st., kad ju je uveo švicarski matematičar Leonhard Euler.



Slika 4.1: Kompleksna ravnina, apsolutna vrijednost i argument kompleksnog broja.

Svaki kompleksan broj $z = x + yi$ na prirodan način možemo poistovjetiti s točkom (x, y) u pravokutnom, u pravilu Kartezijevom, koordinatnom sustavu u ravnini (i obrnuto: svakoj točki u koordinatnoj ravnini odgovara kompleksan broj). Pritom uzimamo da apscise predstavljaju realne, a ordinate imaginarne dijelove pa se koordinatne osi u ovom slučaju zovu realna i imaginarna os. Na realnoj osi se nalaze svi realni brojevi, a na imaginarnoj svi čisto imaginarni. Interpretaciju točaka koordinatne ravnine kao kompleksnih brojeva na opisan način nazivamo **kompleksna ravnina**. Pritom, ako je $z \in \mathbb{C}$ prikazan u kompleksnoj ravnini, njegova udaljenost do ishodišta naziva se njegovom **apsolutnom vrijednošću** i označava s $|z|$, a kut kojeg spojnica ishodišta s točkom z zatvara s pozitivnim dijelom realne osi naziva se **argumentom** kompleksnog broja z , oznaka $\arg(z)$ (slika 4.1). Pritom, nula nema jednoznačno definiran argument, tj. 0 je kompleksan broj apsolutne vrijednosti 0 i bilo kojeg argumenta. Nadalje, u pravilu se podrazumijeva da se uzima tzv. glavna vrijednost argumenta, tj. $\arg z \in \langle -\pi, \pi \rangle$.

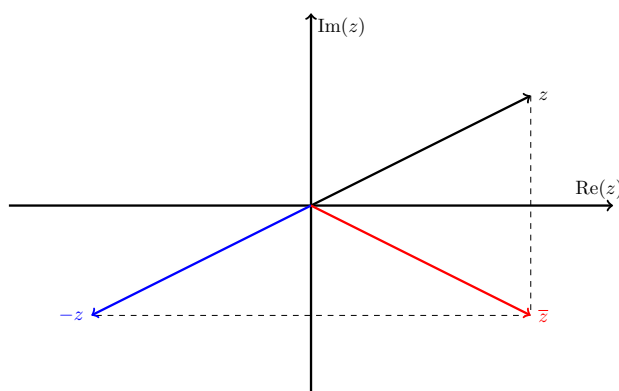
Primjer 186 Govoriti o kompleksnim brojevima argumenta $\frac{\pi}{2}$ je isto što i govoriti o čisto imaginarnim brojevima s nenegativnim imaginarnim dijelom.

Primjer 187 Za svaki kompleksan broj $z \neq 0$ je $\arg |z| = 0$ (ili višekratnik od 2π).

Ako pretpostavimo da su koordinate u kompleksnoj ravnini Kartezijeve, lako je izvesti da za $z = x + yi$ vrijedi

$$|z| = +\sqrt{x^2 + y^2}, \quad \operatorname{tg} \arg(z) = \frac{y}{x}.$$

Primjer 188 Dana je jednadžba $|z - 5 - i| = 2$. Ona opisuje kompleksne brojeve čija udaljenost do kompleksnog broja $5 + i$ iznosi 2, tj. to je kružnica polumjera 2 sa središtem u $5 + i = (5, 1)$.



Slika 4.2: Suprotni i kompleksno konjugirani broj.

Zadatak 78 Kako u kompleksnoj ravnini glasi jednačba jedinične kružnice, tj. kružnice polumjera 1 sa središtem u 0?

Za svaki kompleksan broj $z = x + yi$ definiran je njegov **suprotni broj** $-z = -x - yi$ i njegov **kompleksno konjugirani broj** $\bar{z} = x - yi$. Skiciramo li z , $-z$ i $\bar{z}$ u kompleksnoj ravni (slika 4.2), očavamo: Funkcija definirana s $f(z) = -z$ kao funkcija sa $\mathbb{C}$ u $\mathbb{C}^2$ interpretirana u kompleksnoj ravni je rotacija oko ishodišta za ispruženi kut, a funkcija definirana s $g(z) = \bar{z}$ kao funkcija sa $\mathbb{C}$ u $\mathbb{C}$ interpretirana u kompleksnoj ravni je osna simetrija (zrcaljenje) s obzirom na realnu os. Uočimo da i da je $g(z) = \bar{z}$, tj. $g = \text{id}^*$ (kod kompleksnih funkcija se konjugiranje označava s $*$).

Zadatak 79 Izračunajte $-z$ i $\bar{z}$ za $z = 3i - 2$.

Uočimo da za sve $z \in \mathbb{C}$ vrijedi:

$$-(-z) = z, \quad \overline{\bar{z}} = z.$$

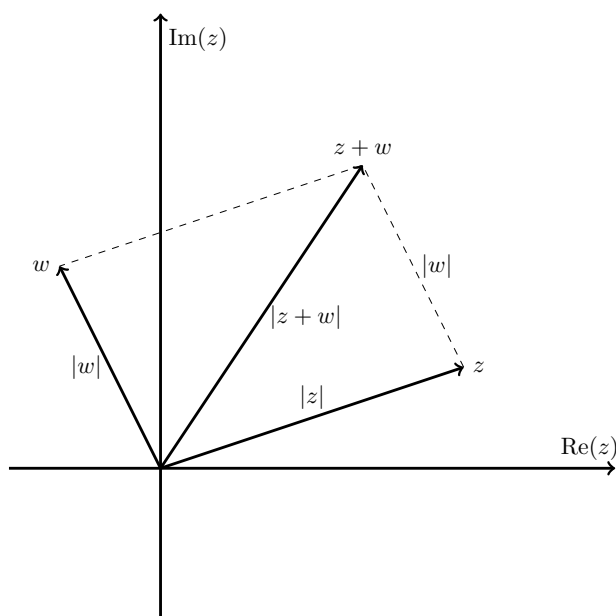
Svaka kvadratna jednačba $ax^2 + bx + c = 0$ je rješiva u kompleksnim brojevima, pri čemu za slučaj realnih koeficijenata a , b i c te za $D < 0$ ona ima dva kompleksno konjugirana rješenja $x_{1,2} = -\frac{b}{2a} \pm i\sqrt{-D}$.

Zadatak 80 Riješite jednačbu $4x^2 + 12x + 25 = 0$ u skupu $\mathbb{C}$ i skicirajte njezina rješenja u kompleksnoj ravni.

Kompleksne brojeve lako je zbrati i oduzimati, samo se zbroje odnosno oduzmu odgovarajući realni i imaginarni dijelovi:

$$(x + yi) \pm (x' + y'i) = (x \pm x') + (y \pm y')i.$$

²Funkcije s kodomenom $\mathbb{C}$ zovu se kompleksne funkcije.



Slika 4.3: Zbrajanje kompleksnih brojeva.

U kompleksnoj ravnini to odgovara zbrajanju odgovarajućih radij-vektora³ dan (slika 4.3). Iz toga slijedi da funkciju $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ oblika

$$f(z) = z + z_0,$$

gdje je z_0 fiksiran kompleksan broj, možemo interpretirati kao translaciju kompleksne ravnine za radij-vektor broja z_0 (slika 4.4).

Zadatak 81 *Dokažite nejednakost trokuta: Za svaka dva kompleksna broja z i w vrijedi $|z + w| \leq |z| + |w|$.*

Dva kompleksna broja množimo po pravilima za množenje binoma. Umjesto formule, ilustriramo to na primjeru.

Primjer 189 *Pomnožimo $2 + i$ s $5 - 2i$:*

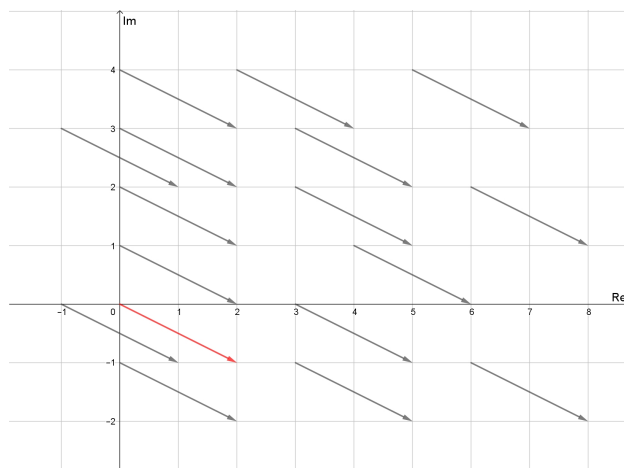
$$(2 + i) \cdot (5 - 2i) = 2 \cdot 5 + i \cdot 5 - 2 \cdot 2i - i \cdot 2i = 10 - 5i - 4i - 2 \cdot (i)^2 = 10 - 9i + 2 = 12 - 9i.$$

Osobito je korisna sljedeća formula:

$$z \cdot \bar{z} = |z|^2. \quad (4.1)$$

Uočite da iz nje slijedi da je umnožak kompleksnog broja sa svojim konjugiranim brojem uvijek nenegativan realan broj.

³Radij-vektor točke T je vektor kojemu je početak u ishodištu, a kraj je T .



Slika 4.4: Pribrajanje kompleksnog broja $z_0 = 2 - i$ kao translacija ravnine (slika izrađena programom Geogebra).

Primjer 190 U kvatnoj teoriji se prema Bornovoj interpretaciji kompleksne valne funkcije ψ , vidi str. 161, funkcija $\psi^* \psi$ koristi kao funkcija gustoće vjerojatnosti za nalaženje elektrona u prostoru. Prema formuli 4.1 ona je jednaka $|\psi|^2$, dakle realna i nenegativna, što i jest jedan od uvjeta na funkciju gustoće vjerojatnosti. Napomenimo ovdje da fizičari i kemičari ovdje često nepravilno govore o kvadratu valne funkcije umjesto o kvadratu njezine apsolutne vrijednosti. No, kvadrat ne-realnog kompleksnog broja nije jednak kvadratu njegove apsolutne vrijednosti:

$$z^2 \neq |z|^2, \quad z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}.$$

Dokažite to!

Zadatak 82 Dokažite formulu 4.1.

Pogledajmo sad jednakost $i^2 = -1$, tj. $i \cdot i = -1$. Podijelimo li ju s $-i$, dobivamo

$$-i = \frac{1}{i}.$$

Stoga je dijeljenje s $-i$ uvijek isto što i množenje s $-i$.

Primjer 191

$$(8i - 7) : i = (8i - 7) \cdot (-i) = -8i^2 + 7i = 8 + 7i.$$

Općenito se dijeljenje kompleksnih brojeva svodi na množenje djeljenika s recipročnom vrijednosti djelitelja, pri čemu koristimo činjenicu:

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{|z|^2} \cdot \bar{z}.$$

Gornja formula dobije se proširenjem lijeve strane sa $\bar{z}$ i korištenjem formule 4.1.

Primjer 192 Podijelimo $2 + i$ s $5 - 2i$:

$$(2+i) : (5-2i) = (2+i) \cdot \frac{1}{5-2i} \cdot \frac{5+2i}{5+2i} = (2+i) \cdot \frac{1}{25+4} \cdot (5+2i) = \frac{1}{29} \cdot (8+9i) = \frac{8}{29} + \frac{9}{29}i.$$

No, dok je standardni, „Kartezijev“, oblik kompleksnog broja (rastav na realni i imaginarni dio) optimalan za zbrajanje i oduzimanje, za množenje i dijeljenje jednostavniji je način korištenje eksponencijalnog (ili trigonometrijskog) oblika, dok je za potenciranje i korjenovanje kompleksnih brojeva samo potonji upotrebljiv.

4.2 Eksponencijalni zapis kompleksnog broja

Iz veze između realnog i imaginarnog dijela kompleksnog broja s njegovom apsolutnom vrijednosti i argumentom očito je da je kompleksni broj moguće umjesto preko realnog i imaginarnog dijela zadati preko njegova argumenta i apsolutne vrijednosti. Pritom, kako se vidi sa slike 4.1, vrijedi $\operatorname{Re} z = x = |z| \cos \arg z$ i $\operatorname{Im} z = y = |z| \sin \arg z$, dakle je (uz oznaku $\varphi = \arg z$)

$$z = x + yi = |z| (\cos \varphi + i \sin \varphi).$$

Ovakav zapis kompleksnog broja poznat je kao **trigonometrijski zapis kompleksnog broja**.

Primjer 193 Kompleksan broj $z = 7i - 2$ u trigonometrijskom zapisu ima oblik $z = \sqrt{53} \cdot (-\cos \arctg \frac{7}{2} + i \sin \arctg \frac{7}{2})$ jer je $|z| = \sqrt{(-2)^2 + 7^2} = \sqrt{53}$, a $\operatorname{tg} \varphi = -\frac{7}{2}$ te uzevši u obzir da je z u drugom kvadrantu kompleksne ravnine zaključujemo da je $\varphi = \pi - \arctg \frac{7}{2}$.

No, u 18. st. švicarski matematičar Leonhard Euler je koristeći redove potencija (vidi poglavlje ??) dokazao da za svaki realan broj t vrijedi **Eulerova formula**

$$\exp(it) = \cos t + i \sin t.$$

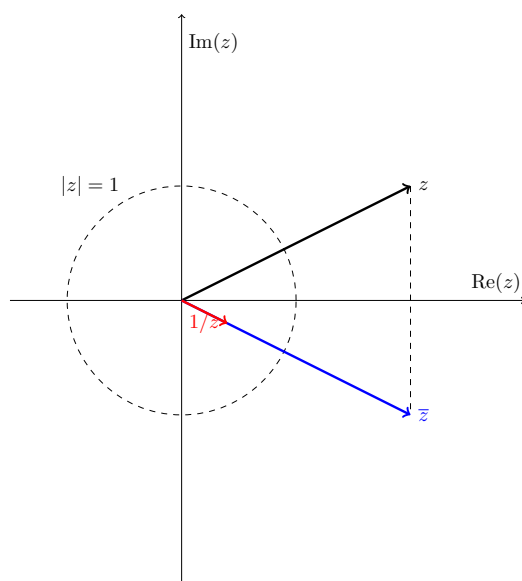
Uvrštavanje Eulerove formule u trigonometrijski zapis kompleksnog broja daje **eksponencijalni oblik kompleksnog broja**:

$$z = |z| \exp(i\varphi).$$

Tako je primjerice

$$\exp\left(i\frac{\pi}{2}\right) = i, \quad \exp(i\pi) = -1, \quad \exp\left(-i\frac{\pi}{2}\right) = -i, \quad \exp(2i\pi) = 1.$$

Zbog Eulerove formule vidimo da je eksponencijalna funkcija na čisto imaginarnim brojevima periodična s temeljnim periodom 2π : $\exp(it + 2\pi) = \exp(it)$. Posebno,



Slika 4.5: Recipročni i konjugirani broj imaju isti argument.

eksponencijalna funkcija s bazom e može se proširiti od realne do kompleksne funkcije $\exp : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$:

$$\exp(z) = \exp(x + iy) := \exp(x) \cdot \exp(iy) = \exp(x) \cdot (\cos y + i \sin y).$$

Posebno, kompleksna eksponencijalna funkcija i dalje ima svojstva $\exp(w + z) = \exp(w) \cdot \exp(z)$ odnosno $\exp(w - z) = \exp(w) / \exp(z)$.

Dok eksponencijalni zapis nije pogodan za zbrajanje i oduzimanje kompleksnih brojeva, pomoću njega se lako provodi konjugiranje, množenje i dijeljenje kompleksnih brojeva. Već smo rekli da je konjugiranje u kompleksnoj ravnini zrcaljenje s obzirom na realnu os, dakle ne mijenja apsolutnu vrijednost kompleksnog broja, a mijenja predznak argumenta (odnosno argument mijenja u 2π minus argument). Dakle, ako je $z = |z| \exp(i\varphi)$, onda je

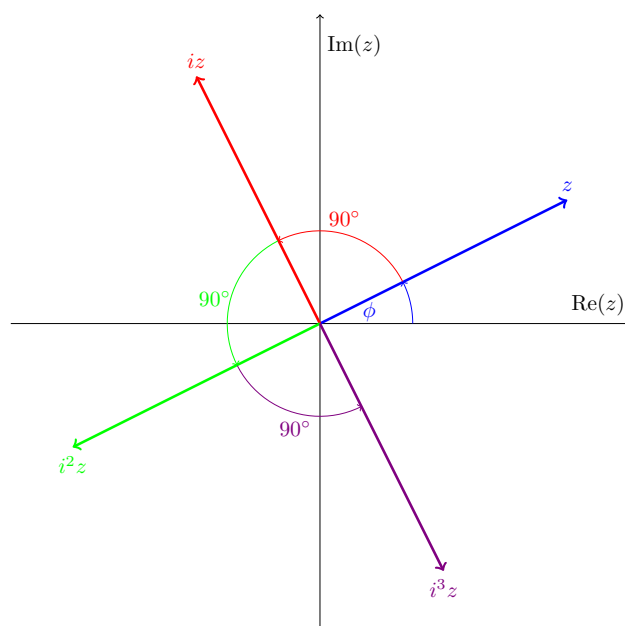
$$\bar{z} = |z| \exp(-i\varphi) = |z| \exp(i(2\pi - \varphi)).$$

Za množenje z s $w = |w| \exp(i\theta)$ imamo $z \cdot w = |z| \exp(i\varphi) \cdot |w| \exp(i\theta) = |z| |w| \exp(i\varphi + i\theta)$, tj.

$$z \cdot w = |z| |w| \exp(i(\varphi + \theta)),$$

dakle se pri množenju kompleksnih brojeva apsolutne vrijednosti množe, a argumenti zbrajaju.

Zadatak 83 *Dokažite to pomoću trigonometrijskog zadatka i objasnite kako navedeno svojstvo sugerira vezu s logaritamskom odnosno eksponencijalnom funkcijom.*



Slika 4.6: Množenje s i je rotacija kompleksne ravnine za 90° u pozitivnom smjeru.

Za dijeljenje dobivamo

$$\frac{z}{w} = \frac{|z|}{|w|} \exp(i(\varphi - \theta)).$$

Specijalno,

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{|z|} \exp(-i\varphi),$$

dakle je $\arg \bar{z} = \arg \frac{1}{z}$ (vidi sliku 4.5).

Specijalno, sad vidimo da je funkcija $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, $f(z) = z_0 \cdot z$ uz $|z_0| = 1$, dakle množenje svih kompleksnih brojeva istim kompleksnim brojem apsolutne vrijednosti 1, u kompleksnoj ravnini rotacija za argument φ_0 od z_0 : $f(z) = |z_0| |z| \exp(i(\varphi + \varphi_0)) = |z| \exp(i(\varphi + \varphi_0))$. Primjerice, množenje s i je rotacija kompleksne ravnine oko ishodišta pravi kut u pozitivnom smjeru (slika 4.6).

Zadatak 84 Za kompleksne brojeve $z = 1 - i$ i $w = 5i - 2$ koristeći eksponencijalni zapis izračunajte $\bar{z}$, $\frac{1}{w}$, $z \cdot w$ i $z : w$. Bez pretvaranja u Kartezijev zapis zaključite u kojim kvadratima kompleksne ravnine se nalaze ta četiri broja.

Primjer 194 Izračunajmo i^i . Imamo $i = \exp(i \frac{\pi}{2}) = \exp(i (\frac{\pi}{2} + 2k\pi))$ za cijele brojeve k pa je

$$i^i = \exp\left(i \left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)\right)^i =$$

(koristimo svojstvo $(e^a)^b = e^{ab}$, koje vrijedi i za kompleksnu eksponencijalnu funkciju)

$$= \exp\left(i \cdot i \left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)\right) = \exp\left(-\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)\right).$$

Vidimo da i^i poprima beskonačno mnogo različitih vrijednosti od kojih je nulta, „osnovna“, $\exp(-\pi/2)$, što je iracionalan broj približnog iznosa 0,20787957635.

Zadatak 85 Kako biste prirodan logaritam proširili do kompleksne funkcije? Oprez, to nije u potpunosti jednostavno, za detalje upućujemo primjerice na web-stranicu *Mathematics LibreTexts: The function $\log z$* (na kojoj je $\ln$ označen s $\log$, kako se često označava u anglosaksonskoj literaturi).

Prije nego se posvetimo potenciranju i korjenovanju kompleksnih brojeva uočimo i da uvrstimo li u Eulerovu formulu $-t$ umjesto t zbog parnosti funkcije kosinus i neparnosti funkcije sinus dobivamo $\exp(-it) = \cos t - i \sin t$. Zbrojimo li to s i oduzmemo od $\exp(it) = \cos t + i \sin t$, dobivamo $\exp(it) + \exp(-it) = 2 \cos t$ i $\exp(it) - \exp(-it) = 2i \sin t$, dakle

$$\cos t = \frac{\exp(it) + \exp(-it)}{2}, \quad \sin t = \frac{\exp(it) - \exp(-it)}{2i},$$

što je još jedan od razloga zašto hiperbolne funkcije nose imena slična trigonometrijskim.

Pogledajmo što se desi ako imaginarnu jedinicu uzastopno množimo samu sa sobom:

$$i^2 = -1, \quad i^3 = -i, \quad i^4 = 1, \quad i^5 = i, \quad i^6 = -1, \dots$$

Dakle, potencije broja i ponavljaju se periodički s periodom 4 i nalaze se u vrhovima ± 1 , $\pm i$ kvadrata u kompleksnoj ravnini. Općenito, nije teško (matematičkom indukcijom) iz formule za množenje kompleksnih brojeva u eksponencijalnom obliku dokazati da za prirodne brojeve n vrijedi **de Moivreova formula**

$$z^n = |z|^n \exp(in\varphi).$$

Budući da je $z^{-1} = |z|^{-1} \exp(-i\varphi)$ de Moivreova formula vrijedi za sve cijele brojeve n .

Zadatak 86 Za z i w iz zadatka 84 izračunajte z^4 i w^{-5} . Argumentirajte zašto su s rastućim $n \in \mathbb{N}$ brojevi z^n sve dalje, a brojevi w^{-n} sve bliže ishodištu.

Preostalo je još vidjeti kako korjenovati kompleksne brojeve. Naravno, definiciju pojma n -tog korijena želimo zadržati: n -ti korijen (ovdje kompleksnog) broja z je (kompleksan) broj w takav da je $w^n = z$. No, zbog periodičnosti eksponencijalne funkcije na čisto imaginarnim brojevima, ovdje nikad nećemo imati jedinstvenost.

Primjer 195 Budući da je $1 = 1^4 = (-1)^4 = i^4 = (-i)^4$, u kompleksnim brojevima broj 1 ima (bar) četiri četvrta korijena: ± 1 i $\pm i$.

Primjer 196 Pogledajmo broj $z = 8 \exp(i\pi/4)$. Uočimo da se on nalazi na kružnici polumjera 8 oko ishodišta, i to u prvom kvadrantu (radij-vektor mu tvori kut 45° s pozitivnim dijelom realne osi). Recimo da želimo naći sve njegove kompleksne treće korijene, dakle sve $w = |w| \exp(i\theta)$ takve da je $w^3 = z$. Po de Moivreovoj formuli je

$$w^3 = |w|^3 \exp(3i\theta),$$

dakle mora vrijediti

$$8 \exp(i\pi/4) = |w|^3 \exp(3i\theta).$$

Zbog jednoznačnosti apsolutne vrijednosti kompleksnog broja i činjenice da je ona uvijek nenegativan realan broj imamo $|z| = |w|^3$, tj. apsolutna vrijednost svakog trećeg korijena od z je $|w| = \sqrt[3]{|z|}$, što je jednoznačno određen nenegativan realan broj, u našem slučaju 2. Dakle, svi treći korijeni od z nalaze se na kružnici k polumjera 2 oko ishodišta.

Što je s argumentima tih korijena? Vidimo da mora vrijediti $\exp(i\pi/4) = \exp(3i\theta)$. No, $\exp(i\pi/2) = \exp(i(\pi/4 + 2k\pi))$. Stoga je $3\theta = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$ za bilo koji cijeli broj k . Na prvi pogled bi to značilo da imamo beskonačno mnogo iznosa θ i stoga beskonačno mnogo trećih korijena od z , no ako bolje pogledamo $\theta = \frac{\pi}{12} + \frac{2\pi}{3} \cdot k$ vidimo da ćemo na k nakon svakog trećeg koraka dobivati istu točku. Dakle, imamo samo tri različita treća korijena od z , to su oni koje dobijemo za $k = 0, 1$ i 2 :

$$w_0 = 2 \exp(i\pi/12), \quad w_1 = 2 \exp(3i\pi/4), \quad w_2 = 2 \exp(17i\pi/12).$$

Uočimo da je kut između radij vektora svaka dva susjedna od njih, w_0 i w_1 odnosno w_1 i w_2 odnosno w_2 i w_0 jednak $2\pi/3$, dakle su w_0, w_1 i w_2 vrhovi jednakostraničnog trokuta.

Kao i u gornjem primjeru, uvijek vrijedi: Svi kompleksni n -ti korijeni broja z nalaze se na kružnici polumjera $\sqrt[n]{|z|} \geq 0$ oko ishodišta, tj. $|\sqrt[n]{z}| = \sqrt[n]{|z|}$. Nadalje, svaki kompleksan broj ima točno n različitih kompleksnih n -tih korijena na toj kružnici, pri čemu je kut između svaka dva susjedna od njih jednak $\frac{2\pi}{n}$ (dakle, oni čine vrhove pravilnog n -terokuta), a nulti od njih ima argument $\frac{\arg z}{n}$. Dakle, de Moivreova formula primijenjena na $\frac{1}{n}$ umjesto n daje samo jednu, nultu, od n potrebnih vrijednosti. Stoga je umjesto njenog zapisivanja u tom obliku bolje kao pravilo za korjenovanje u skupu $\mathbb{C}$ zapamtiti:

Propozicija 15 Ako je $z = |z| \exp(i\varphi)$, onda i $\sqrt[n]{z}$ ima n vrijednosti $\sqrt[n]{|z|} \cdot \exp\left(i\frac{\varphi}{n} + \frac{2\pi}{n} \cdot k\right)$ za $k = 0, 1, \dots, n-1$.

Zadatak 87 U kompleksnoj ravnini, bez eksplicitnog korištenja prethodne propozicije, skicirajte sve šeste korijene od i i sve pete korijene od -100000 .

4.3 Polarne koordinate u ravnini

Dosad smo krivulje opisivali eksplicitnom jednadžbom $y = f(x)$ ili pak parametarskim jednadžbama $x = x(t)$, $y = y(t)$. Pritom su x i y bile standardne pravokutne koordinate u ravnini. No, u ravnini se često koristi i jedan drugačiji tip koordinatnog sustava, a to je polarni. Polarne koordinate točke u ravnini su isto što i apsolutna vrijednost i argument kompleksnog broja kojem ta točka odgovara, samo se drugačije nazivaju.

Polarni koordinatni sustav u ravnini određen je jednom točkom, ishodištem O , te jednim polupravcem o s početkom u O kojeg nazivamo polarna os. Polarna os se obično crta horizontalno s usmjerenjem prema desno i u slučaju preračunavanja koordinata iz Kartezijevog u polarni sustav (ili obrnuto) se poistovjećuje s pozitivnim dijelom osi apscisa.

Za jednoznačan opis pozicije točke T u polarnom koordinatnom sustavu trebaju nam kao i u pravokutnom dvije koordinate — to je posljedica dvodimenzionalnosti ravnine. Pritom kod polarnih koordinata nije definiran standardni redoslijed koja je prva, a koja je druga. Prva polarna koordinata točke je njezina **polarna udaljenost** $r = d(O, T)$,⁴ a druga koordinata je **polarni kut** $\varphi = \angle(o, \overline{OT})$, mjeren u pozitivnom smjeru. Uočimo da ako T interpretiramo kao kompleksan broj z , onda je $r = |z|$ i $\varphi = \arg z$. Očigledno je uvijek $r \geq 0$, dok φ može biti bilo koji realan broj, no u većini slučajeva se gleda samo u rasponu $-\pi \leq \varphi \leq \pi$ ili $0 \leq \varphi \leq 2\pi$. Uočimo da u polarnom koordinatnom sustavu ishodište nema jednoznačno određene koordinate: $(\varphi, r) = (\varphi, 0)$ za svaki φ predstavlja O .

Uočimo da u polarnom koordinatnom sustavu jednadžbe oblika $r = \text{const.}$ predstavljaju kružnice sa središtem O : $r = 2$ je jednadžba koja predstavlja sve točke na udaljenosti 2 od ishodišta, dakle kružnicu polumjera 2 sa središtem O . Slično, jednadžbe $\varphi = \text{const.}$ predstavljaju polupravce s početkom O : $\varphi = 90^\circ$ je polupravac okomit na polarnu os s usmjerenjem prema gore.

U pravokutnom koordinatnom sustavu često se radi lakšeg očitavanja pozicija odnosno ucrtavanja točaka crta mreža pravaca paralelnih s koordinatnim osima, tj. pravaca zadanih jednadžbama oblika $x = \text{const.}$, $y = \text{const.}$ Tome u polarnim koordinatama odgovara mreža kružnica sa središtem O i polupravaca s početkom O , kao na slici 4.7. Želimo li u polarnom sustavu ucrtati npr. točku s koordinatama $(\varphi, r) = (90^\circ, 2)$, naći ćemo kružnicu polumjera 2 oko ishodišta i na njoj točku koja se nalazi na polupravcu koji ima kut 90° prema polarnoj osi.

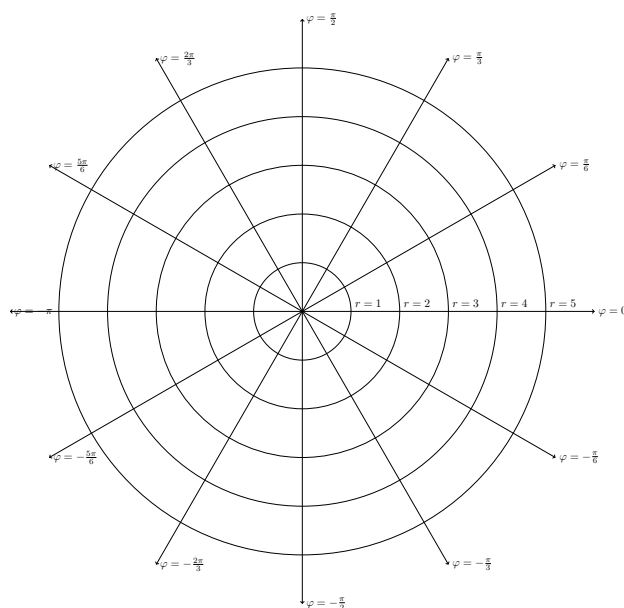
Veza između polarnih i Kartezijevih koordinata u ravnini, uz pretpostavku zajedničkog ishodišta i preklapanja polarne osi s pozitivnim dijelom osi apscisa, dana je formulama:

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi,$$

odnosno

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \text{tg } \varphi = \frac{y}{x}.$$

⁴S $d(A, B)$ se označava udaljenost točaka A i B .



Slika 4.7: Polarni koordinatni sustav u ravnini.

Primijetimo da zbog svojstava funkcije tangens jedan kvocijent $\frac{y}{x}$ određuje dva moguća polarna kuta φ unutar jednog kruga ($\arctg \frac{y}{x}$ i $180^\circ - \arctg \frac{y}{x}$), pa ovisno o predznaku od x odabiremo pravi.

Primjer 197 Točka $(x, y) = (-2, 1)$ ima $r = \sqrt{(-2)^2 + 1^2} = \sqrt{5}$. Pritom je $\tg \varphi = -\frac{1}{2}$ pa je $\varphi = -26,57^\circ$ ili $\varphi = 180^\circ - (-26,57^\circ) = 226,57^\circ$. Uzevši u obzir da je ta točka u drugom kvadrantu pravokutnog koordinatnog sustava, zaključujemo da je ispravna vrijednost polarnog kuta $226,57^\circ$.

Primjer 198 Ako je $r = 1$ i $\varphi = 270^\circ$ imamo točku na jediničnoj kružnici i polupravcu okomitom na polarnu os usmjerenja prema dolje. Dakle, u Kartezijevom koordinatnom sustavu ona ima koordinate $(0, -1)$.

Zadavanje krivulja u polarnim koordinatama je vrlo slično zadavanju krivulja eksplicitnom jednadžbom $y = f(x)$. Zapravo, budući da je pojam grafa funkcije definiran neovisno o tome hoće li se i u kakvom koordinatnom sustavu crtati taj graf, možemo reći da je zadavanje krivulje u polarnom koordinatnom sustavu jednadžbom $r = f(\varphi)$ samo drugačiji način prikaza grafa realne funkcije f jedne varijable. Kao što se u slučaju $y = f(x)$ crta krivulja koja se sastoji od točaka $(x, f(x))$, tako se ovdje crta krivulja koja se sastoji od točaka $(\varphi, f(\varphi))$. Ipak, jedna je bitna razlika od situacije u pravokutnom koordinatnom sustavu: Budući da r ne može biti negativan, ovdje graf crtamo samo za one φ za koje dobijemo $r \geq 0$, tj. u slučaju da raspon φ nije eksplicitno zadan, krivulja sadrži samo one točke koje se

nalaze na polupravcima s početkom O i $\varphi \in \{\varphi \in D_f : f(\varphi) \geq 0\}$.⁵ Uočimo i da kao što graf od f prikazan kao krivulja $y = f(x)$ u pravokutnom koordinatnom sustavu siječe svaku vertikalu najviše jednom, tako graf od f prikazan kao krivulja $r = f(\varphi)$ u polarnom koordinatnom sustavu siječe svaki polupravac s početkom O najviše jednom (zbog jednoznačnosti pridruživanja u funkcijama).

Primjer 199 Zadana je konstantna funkcija koja svim nezavisnim varijablama pridružuje iznos π . U pravokutnom koordinatnom sustavu njezin graf ima jednadžbu $y = \pi$ i radi se o pravcu paralelnom s osi apscisa. U polarnom koordinatnom sustavu graf iste funkcije ima jednadžbu $r = \pi$ i radi se o kružnici polumjera π sa središtem O .

Primjer 200 Zadana je linearna funkcija koja sve nezavisne varijable množi s pozitivnim brojem a . U pravokutnom koordinatnom sustavu njezin graf je pravac $y = ax$ koji prolazi kroz O i prvi i treći kvadrant. U polarnom koordinatnom sustavu odgovarajuća jednadžba grafa poprima oblik $r = a\varphi$. Prvo, zbog $r \geq 0$ i $a > 0$ zaključujemo da točke odgovarajuće krivulje imamo samo za $\varphi \geq 0$, tj. „prirodna“ domena se ovdje „smanjila“ na $[0, +\infty)$. Pritom, $r = a\varphi$ znači da je udaljenost točke od O svuda proporcionalna polarnom kutu, tj. tražena krivulja može se opisati putanja točke koja se od O jednoliko giba po o, ako pritom o jednoliko rotira oko O . Ta krivulja naziva se Arhimedova spirala, po starogrčkom matematičaru i fizičaru Arhimedu iz Sirakuze (3. st. pr. Kr.) koji ju je prvi opisao.⁶

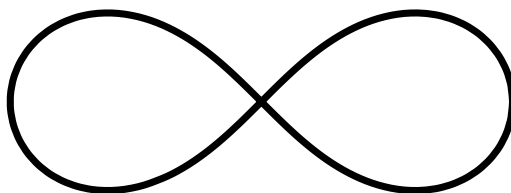
Zadatak 88 Skicirajte nekoliko točaka hiperbolne spirale zadane jednadžbom $r = \frac{1}{\varphi}$. Možete li naslutiti njen oblik?

Želimo li skicirati krivulju jednadžbe $r = f(\varphi)$ u polarnim koordinatama, uz ograničenje na one φ za koje je f nenegativna, korisno je obratiti i pažnju na eventualnu periodičnost, parnost i(li) ograničenost funkcije f . Ako je f periodična s (ne nužno temeljnim) periodom koji je višekratnik od 2π , krivulja $r = f(\varphi)$ je zatvorena. Ako je f periodična s temeljnim periodom $\frac{2\pi}{n}$, gdje je n prirodan broj, onda je krivulja ne samo zatvorena, nego posjeduje o rotacijsku simetriju reda n oko O .⁷ Ako je f parna funkcija, krivulja $r = f(\varphi)$ je simetrična s obzirom na polarnu os. Ako je za sve φ iznos $0 \leq m \leq f(\varphi) \leq M$, onda se krivulja $r = f(\varphi)$ nalazi unutar prstena određenog kružnicama polumjera m i M (sa središtem u ishodištu).

⁵Mnogi grafički programi umjesto toga podrazumijevaju da se za one φ za koje je $f(\varphi) < 0$ ucrtava točka s $r = -f(\varphi)$ s polarnim kutom $\varphi \pm \pi$.

⁶No, Arhimed još nije znao koristiti nikakav koordinatni sustav. Kartezijeve koordinate uveo je René Descartes 1637., a polarne koordinate su sredinom 17. st. konceptualno uveli G. de Saint-Vincent i B. Cavalieri neovisno jedan od drugom, a prvi ih je koristio 1671. sir Isaac Newton.

⁷Rotacijska simetrija reda n je rotacijska simetrija s kutem $\frac{2\pi}{n}$.



Slika 4.8: Bernoullijeva lemniskata.

Primjer 201 Odredimo oblik Bernoullijeve lemniskate

$$r = a \sqrt{\cos(2\varphi)}$$

gdje je $a > 0$. Prvo uočimo da je $f(\varphi) = a \sqrt{\cos(2\varphi)}$ parna, dakle će krivulja posjedovati horizontalnu os simetrije. Nadalje, ta funkcija je periodična s temeljnim periodom $\pi = \frac{2\pi}{2}$. Stoga je krivulja zatvorena i posjeduje rotacijsku simetriju reda 2 oko ishodišta, te je dovoljno analizirati njezin izgled unutar raspona φ širine π , recimo od $-\frac{\pi}{2}$ do $\frac{\pi}{2}$. U kombinaciji s uočenom osnom simetrijom zaključujemo da je dovoljno opisati oblik krivulje za $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$, a ostatak se može nacrtati koristeći navedene simetrije.

Za $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$ je $0 \leq 2\varphi \leq \pi$ pa je $-1 \leq \cos(2\varphi) \leq 1$. Da bismo to mogli korjenovati treba biti $\cos(2\varphi) \geq 0$, dakle od $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$ nam preostaje samo $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4}$. Dalje je po definiciji funkcije drugog korijena i zbog pozitivnosti a iznos r sigurno nenegativan, dakle točke krivulje (unutar „prvog kvadranta“) imamo samo za $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4}$. Za takve φ je r padajuća i pada od $r = f(0) = a$ do $r = f(\pi/4) = 0$, odnosno sve točke lemniskate za $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4}$ nalaze se unutar kruga polumjera a sa središtem 0. Zbog tog što f pada zaključujemo i da kako crtamo točke od $(\varphi, r) = (0, a)$ do $(45^\circ, 0) = O$, svaka sljedeća bit će bliža ishodištu, pa možemo ucrtati još jednu ili dvije, primjerice $(\varphi, r) = (30^\circ, \frac{a}{\sqrt{2}})$. U crtavanjem tih točaka te koristeći spomenute simetrije lemniskate možemo zaključiti da je izgled Bernoullijeve lemniskate takav kako je prikazano slikom 4.8.

Zadatak 89 Skicirajte sljedeće tri krivulje zadanih jednadžbama u polarnim koordinatama:

$$r = 1 + \cos \varphi,$$

$$r = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin \varphi,$$

$$r = \frac{\sqrt{10}}{4} (3 \cos^2 \varphi - 1).$$

Takoder, skicirajte i krivulju $r = |f(\varphi)|$ za bar jednu od njih te graf odgovarajuće funkcije f u pravokutnom koordinatnom sustavu.

Ako deriviramo funkciju $r = f(\varphi)$ po φ , to je obično deriviranje funkcije jedne varijable. Primjerice, za $r = a\varphi$ je $r' = \frac{dr}{d\varphi} = a$. Budući da je pojam koeficijenta smjera pravca vezan isključivo za pravokutni koordinatni sustav, u polarnom koordinatnom sustavu $\frac{dr}{d\varphi}(\varphi_0)$ nema interpretaciju koeficijenta smjera tangente. No, ako kao kod preračunavanja koordinata iz Kartezijevog u polarni koordinatni sustavi u obrnuto pretpostavimo da istovremeno promatramo i Kartezijevi i polarni koordinatni sustav (uz poklapanje polarne osi s pozitivnim dijelom osi apscisa), u točki (φ_0, r_0) krivulje $r = \varphi$ možemo odrediti koeficijent smjera tangente u odgovarajućem Kartezijevom koordinatnom sustavu, koristeći lančano pravilo:

$$k = y'(x_0) = \frac{\frac{dy}{d\varphi}}{\frac{dx}{d\varphi}} = \frac{r'(\varphi_0) \sin(\varphi_0) + r_0 \cos(\varphi_0)}{r'(\varphi_0) \cos(\varphi_0) - r_0 \sin(\varphi_0)} : \frac{\cos(\varphi_0)}{\cos(\varphi_0)} = \frac{r_0 + r'(\varphi_0) \operatorname{tg} \varphi_0}{r'(\varphi_0) - r_0 \operatorname{tg} \varphi_0}.$$

Koristeći vezu polarnih i Kartezijevih koordinata, vidimo da je tada jednadžba tangente na krivulju $r = f(\varphi)$ u točki (r_0, φ_0) dana s

$$y - r_0 \sin \varphi_0 = \frac{r_0 + r'(\varphi_0) \operatorname{tg} \varphi_0}{r'(\varphi_0) - r_0 \operatorname{tg} \varphi_0} \cdot (x - r_0 \cos \varphi_0).$$

Zadatak 90 Odredite jednadžbu tangente na krivulju $r = \varphi \sin \varphi$ u točki $(\varphi_0, r_0) = (\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.

Poglavlje 5

Uvod u linearnu algebru

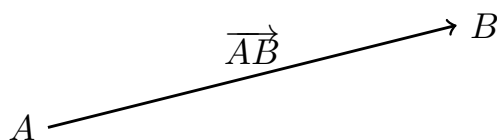
5.1 Geometrijski vektori

Linearna algebra je matematička disciplina koja se bavi vektorima i vektorskim prostorima. Vektori se često definiraju kao matematički objekti koji imaju iznos, smjer i orijentaciju. Takva definicija nije točna¹, no ona opisuje bitna svojstva onih vektora koji se nazivaju geometrijskim (ili euklidskim) vektorima. U kontekstu vektorskih prostora spominju se i skalari, odnosno brojevi s kojima možemo množiti vektore. Ako kao skalare koristimo realne brojeve, govorimo o realnim vektorskim prostorima. Svi vektorski prostori u ovom poglavlju su realni.

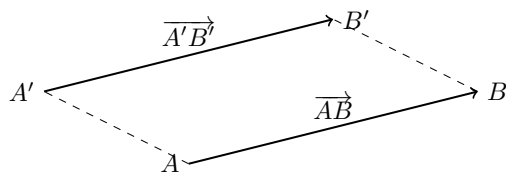
Mnoge fizikalne veličine se (uz odabir mjerne jedinice) mogu jednoznačno opisati brojevima: masa, gustoća, duljina, površina, volumen, energija, rad, ... Takve veličine zovu se **skalarnim veličinama**. **Vektorske veličine** su one fizikalne veličine za koje nije dovoljan samo broj s mjernom jedinicom da ih opiše: brzina, ubrzanje, sila, dipolni moment, ... Kao što su realni brojevi (pomnoženi s mjernim jedinicama) modeli skalarnih fizikalnih veličina, tako su geometrijski vektori modeli vektorskih fizikalnih veličina.

Prvi korak u definiciji **geometrijskih vektora** je definicija orijentirane dužine: **Orijentirana dužina** $\overrightarrow{AB}$ je dužina $\overline{AB}$ za koju je definirano koja od dvije rubne

¹Pravilna definicija glasi: Vektor je element vektorskog prostora. Što je općeniti vektorski prostor saznat ćemo kasnije, u poglavlju 7.1.



Slika 5.1: Orijentirana dužina $\overrightarrow{AB}$.



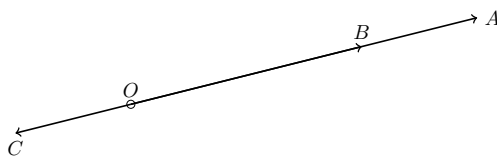
Slika 5.2: Dvije orijentirane dužine koje predstavljaju isti vektor u prostoru V^2 odnosno V^3 .

točke joj je početak (A), a koja kraj (B), vidi sliku 5.1. Ako se fiksira jedna točka O u ravlini ili prostoru (ishodište), orijentirane dužine $\overrightarrow{OT}$ se zovu **radij-vektorima** točaka T u ravlini odnosno prostoru. Skup svih radij-vektora u ravlini odnosno prostoru označava se s $V^2(O)$ odnosno s $V^3(O)$. Ako se pak ne želimo ograničiti samo na radij-vektore, onda sve orijentirane dužine koje se mogu dobiti translacijom jedne te iste orijentirane dužine nazivamo ekvivalentnima u smislu da predstavljaju isti vektor. Pritom $\overrightarrow{A'B'}$ je translirana $\overrightarrow{AB}$ znači da je $ABB'A'$ je paralelogram (vidi sliku 5.2). U ovom slučaju pojedini vektor je klasa ekvivalentnih orijentiranih dužina, a svaka od njih je njegov **reprezentant**. Jednostavnosti radi ćemo i vektor i njegove reprezentante označavati jednako, s $\vec{v}$. Na slici 5.2 su $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{A'B'}$ reprezentanti istog vektora $\vec{v}$ te bilo koju od te dvije orijentirane dužine možemo označiti s $\vec{v}$. Skup svih tako definiranih vektora u ravlini odnosno prostoru označavamo s V^2 odnosno V^3 . Dok u $V^2(O)$ i $V^3(O)$ svaki vektor ima samo jedan reprezentant, u V^2 i V^3 svaki vektor ima beskonačno mnogo reprezentanata. Elementi skupova $V^2(O)$, V^2 , $V^3(O)$ i V^3 nazivaju se geometrijskim vektorima. U svakom od tih skupova istaknut je jedan vektor, **nulvektor**, tj. vektor $\vec{0}$ čijem se reprezentantu početak i kraj podudaraju. Nulvektor se vizualno reprezentira točkom.

Budući da ćemo u ovom poglavlju razmatrati samo geometrijske vektore, u nastavku ovog poglavlja ćemo ih nazivati jednostavno vektorima. Ako vektori predstavljaju fizikalne veličine čija dimenzija nije duljina, primjerice sile, podrazumijeva se da su u prikazima tih veličina kao orijentiranih dužina njihove duljine razmjerne iznosima odgovarajućih fizikalnih veličina.

Primjer 202 *Ako dvije orijentirane dužine prikazuju sile iznosa 1 N i 2 N, orijentirana dužina kojom prikazujemo drugu silu je dvaput dulja od orijentirane dužine kojom prikazujemo prvu.*

Kako ćemo specificirati o kojem točno vektoru govorimo? Kao i za sve drugo, trebamo navesti njegova karakteristična svojstva. Prvo je naravno odabir prikladnog od skupova $V^2(O)$ ili V^2 (ako želimo razmatrati samo vektore u ravlini) ili pak $V^3(O)$ ili V^3 (ako želimo razmatrati vektore u prostoru). Nakon toga trebamo opisati o kojem konkretnom vektoru govorimo. Kao i brojevi, tako i vektori imaju



Slika 5.3: Vektori $\overrightarrow{OA}$ i $\overrightarrow{OB}$ su istog smjera i iste orijentacije, a vektori $\overrightarrow{OA}$ i $\overrightarrow{OC}$ su istog smjera i suprotne orijentacije.

svoje iznose, kojeg često nazivamo i duljinama. Ako je $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$, **iznos vektora** $\vec{v}$, u oznaci $|\vec{v}|$ ili v , je duljina dužine $\overline{AB}$. Nulvektor je jedini vektor iznosa nula:

$$\vec{v} = \vec{0} \Leftrightarrow |\vec{v}| = 0.$$

Za slučaj da $\vec{v}$ predstavlja vektorsku veličinu mjerne jedinice $\diamond$ zbog gore navedene proporcionalnosti podrazumijeva se da se u tom slučaju za dobivanje stvarnog iznosa vektora duljina dužine $\overline{AB}$ skalira s $\diamond/\text{m}$. U matematičko-apstraktnim situacijama podrazumijeva se $\diamond = 1$ pa se kao iznosi vektora navode „čisti“ brojevi. U potonjem slučaju povremeno se koristi izraz **jedinični vektor** za vektor iznosa 1. Uočimo da općenito jediničnim vektorom možemo smatrati bilo koji vektor fiksiranog „jediničnog“ iznosa, primjerice sve vektore koji predstavljaju sile iznosa 1 N čak i ako ih crtamo kao vektore duljine 5 cm.

Dok je kod odabira brojeva bilo dovoljno navesti skup, primjerice $\mathbb{Q}$, u kom se nalaze i konkretan iznos, primjerice $-\frac{1}{17}$, za vektore nije dovoljno navesti samo iznos.

Primjer 203 U $V^2(O)$ vektori duljine 5 cm su svi vektori kojima je početak O , a kraj na jediničnoj kružnici oko O , dakle ih ima beskonačno mnogo.

Da bismo jednoznačno opisali vektor moramo uz skup u kom se nalazi i njegov iznos navesti još dva svojstva: njegov smjer i njegovu orijentaciju. Smjer služi uspoređivanju bilo koja dva vektora, dok orijentacija omogućuje razlikovanje (dvaju) vektora istog smjera. Za vektore čiji reprezentanti leže na paralelnim pravcima kažemo da imaju isti **smjer**, odnosno da su **kolinearni**. Za dva kolinearna vektora s reprezentantima $\overrightarrow{OA}$ i $\overrightarrow{OB}$ s istim početkom O kažemo da imaju istu **orijentaciju** ako su točke A i B s iste strane točke O , a ako je O između A i B kažemo da imaju suprotnu orijentaciju (vidi sliku 5.3).² Za nulvektor se po definiciji uzima da ima sve smjerove i orijentacije, tj. da svaki vektor $\vec{v}$ ima isti smjer i orijentaciju kao $\vec{0}$. Za svaki vektor $\vec{v}$ se s $-\vec{v}$ označava vektor istog iznosa i smjera kao $\vec{v}$, ali suprotne orijentacije (**suprotni vektor** vektora $\vec{v}$).

²Ponekad se u literaturi umjesto izraza smjer i orijentacija koriste izrazi pravac, za ono što ovdje zovemo smjerom, i smjer, za ono što ovdje zovemo orijentacijom.

Odnos dva vektora uključuje i njihov kut: **Kut između dva (nenul)-vektora** se definira kao manji od dva kuta koja zatvaraju njihovi reprezentanti sa zajedničkim početkom. Specijalno, kut između dva vektora poprima iznose u segmentu $[0, \pi] = [0, 180^\circ]$. Uočimo da je kut između dva kolinearna vektora ili 0 (ako su iste orijentacije) ili 180° (ako su suprotne orijentacije). Za nulvektor uzimamo da ima sve kutove prema drugim vektorima, tj. kao $\angle(\vec{0}, \vec{v})$ možemo uzeti bilo koji kut iz navedenog segmenta.

Pomoću geometrijskih vektora se uz mnoge fizikalne probleme mogu rješavati i problemi određivanja razmaka (duljina dužina), kutova dvaju pravaca, površina mnogokuta ili pak volumena poliedara iz poznavanja koordinata točaka koje određuju vrhove promatranog objekta. Pomoću geometrijskih vektora i njihovih koordinata se također opisuju kristalne strukture, a i razne simetrijske operacije. No, što su to kooordinate? Da bismo na to pitanje mogli odgovoriti, trebaju nam dvije algebarske operacije s vektorima uz koje skupovi geometrijskih vektora V^2 , $V^2(O)$, V^3 , $V^3(O)$ postaju vektorski prostori.

5.1.1 Množenje vektora skalarom i zbrajanje vektora

Da bismo govorili o vektorskom prostoru, nije dovoljno opisati njegove elemente: Vektorski prostori su skupovi objekata, vektora, koje možemo zbrajati međusobno te množiti skalarima tako da pritom ostajemo u istom skupu (vidi poglavlje 7.1). U kontekstu geometrijskih vektora, tj. elemenata nekog od skupova V^2 , $V^2(O)$, V^3 , $V^3(O)$, skalari su isključivo realni brojevi.

Definicija 22 (Množenje geometrijskog vektora skalarom) *Neka je $\vec{v}$ geometrijski vektor i x skalar. Umnožak $x\vec{v}$ definira se kao geometrijski vektor kolinearan s $\vec{v}$ koji ima iznos*

$$|x\vec{v}| = |x| |\vec{v}|$$

i kojemu je orijentacija ista kao od $\vec{v}$ ako je $x \geq 0$, a inače suprotna.

Uočimo da iz definicije slijedi da nulvektor pomnožen bilo kojim skalarom i bilo koji vektor pomnožen s nulom daje nulvektor:

$$x\vec{0} = 0\vec{v} = \vec{0},$$

a množenje s 1 ne mijenja vektor:

$$1\vec{v} = \vec{v}.$$

Također, uzastopno množenje s dva skalara može se provesti na dva načina:

$$xy\vec{v} = x(y\vec{v}) = (xy)\vec{v}.$$

Vrijedi i da se isti vektor može izlučivati iz zbroja njegovih umnožaka s dva skalara:

$$x\vec{v} + y\vec{v} = (x + y)\vec{v}.$$

Četiri posljednje formule vrijede za sve skalare x i y i sve vektore $\vec{v}$. Uočimo da bi da u njima nemamo oznake vektora to bile formule koje znamo kao svojstva množenja realnih brojeva: Množenje vektora skalarom ima svojstva analogna množenju brojeva.

Za svaki nenul-vektor množenjem s prikladnim skalarom možemo dobiti jedinični vektor istog smjera i orijentacije: Ako je $\vec{a} \neq \vec{0}$, jedinični vektor istog smjera i orijentacije kao $\vec{a}$ je

$$\vec{a}_1 = \frac{1}{a} \vec{a}.$$

Zadatak 91 Pokažite da je $a_1 = 1$.

Pomnožimo li prethodnu jednakost s proizvoljnim skalarom x možemo zaključiti da vrijedi:

Propozicija 16 Za svaki vektor $\vec{a} \neq \vec{0}$ i svaki realan broj x formulom

$$\vec{v} = \frac{x}{a} \vec{a}. \quad (5.1)$$

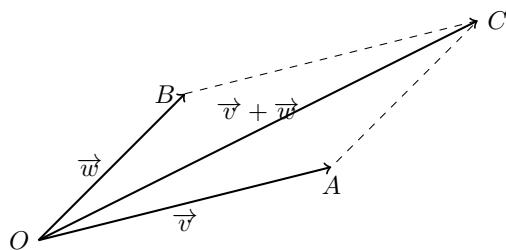
opisan je vektor kolinearan s $\vec{a}$ koji ima iznos $|x|$ i ovisno o predznaku od x istu ili suprotnu orijentaciju od $\vec{a}$.

Zadatak 92 Nacrtajte jednu orijentiranu dužinu $\overrightarrow{AB}$ koja predstavlja brzinu iznosa 3 m/s i na istoj slici orijentiranu dužinu $\overrightarrow{AC}$ koja predstavlja brzinu iznosa 12 m/s koja djeluje u istom smjeru, ali sa suprotnom orijentacijom. Formulom iskažite odnos orijentiranih dužina $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{AC}$.

Propozicija 17 (Algebarska karakterizacija kolinearnosti) Geometrijski vektori $\vec{v}$ i $\vec{w}$ su kolinearni ako i samo ako postoji (jedinstven) skalar x takav da je $\vec{v} = x \vec{w}$.

Dokaz. Ako postoji skalar x kao u iskazu teorema, onda su po definiciji množenja vektora skalarom $\vec{v}$ i $\vec{w}$ sigurno kolinearni. Također, ako je jedan od ta dva vektora nulvektor, onda su oni sigurno kolinearni jer je nulvektor istog smjera kao i svaki drugi vektor (a za x možemo uzeti 0). Dakle, uzmimo da su $\vec{v}, \vec{w} \neq \vec{0}$ kolinearni. Stavimo $x = \pm \frac{v}{w}$ (s + ako su iste, a s – ako su suprotne orijentacije). Tada je prema prethodnoj propoziciji $x \vec{w}$ vektor koji ima isti smjer kao $\vec{w}$ (i $\vec{v}$), ima iznos v (dakle je to ili $\vec{v}$ ili $-\vec{v}$) i orijentaciju istu kao $\vec{v}$ (dakle je to $\vec{v}$). $\square$

Iz ove pak propozicije slijedi da uz fiksiranje jednog nenul-vektora $\vec{a}$ sve s njim kolinearne vektore $\vec{v}$ možemo jednoznačno opisati s po jednim skalarom x (takvim da je $x \vec{a} = \vec{v}$). Kažemo da je x **koordinata** vektora $\vec{v}$ s obzirom na bazu $\{\vec{a}\}$. Dakle, dok smo ograničeni na vektore jednog smjera, za njihov potpun opis dovoljni su (ako fiksiramo jedan od njih koji nije nulvektor) samo realni brojevi. To je

Slika 5.4: Definicija zbroja $\vec{v} + \vec{w}$.

razlog zašto se vektorski prostori $V^1(O)$ odnosno V^1 vektora na jednom pravcu poistovjećuju sa skupom $\mathbb{R}$.

Naravno, u naša četiri skupa V^2 , $V^2(O)$, V^3 i $V^3(O)$ nisu svi vektori kolinearni. Da bismo za njih mogli definirati koordinate potrebna nam je druga od spomenutih algebarskih operacija s vektorima, zbrajanje geometrijskih vektora koje se definira pomoću pravila paralelograma. Popularno rečeno, zbroj vektora predstavlja dijagonalu njima određenog paralelograma. Precizna definicija je sljedeća:

Definicija 23 (Zbrajanje geometrijskih vektora) *Ako su $\vec{v}$ i $\vec{w}$ dva geometrijska vektora i $\overrightarrow{OA}$ i $\overrightarrow{OB}$ njihovi reprezentanti sa zajedničkim početkom, onda se zbroj $\vec{v} + \vec{w}$ definira ovako (vidi sliku 5.4): Dopunimo AOB do paralelograma $AOBC$. Tada je $\overrightarrow{OC}$ reprezentant vektora $\vec{v} + \vec{w}$.*

Uočimo da u slučaju da su $\vec{v}$ i $\vec{w}$ kolinearni u gornjoj definiciji imamo paralelogram koji je degeneriran u dužinu. Ako su $\vec{v} = \overrightarrow{OA}$ i $\vec{w} = \overrightarrow{OB}$ kolinearni i istog smjera, onda je $\vec{v} + \vec{w} = \overrightarrow{OC}$, gdje je duljina dužine $\overrightarrow{OC}$ jednaka $v + w$, a ako su $\vec{v} = \overrightarrow{OA}$ i $\vec{w} = \overrightarrow{OB}$ kolinearni i suprotnog smjera, onda je $\vec{v} + \vec{w} = \overrightarrow{OC}$, gdje je duljina dužine $\overrightarrow{OC}$ jednaka $|v - w|$, a orijentacija je jednaka orijentaciji duljeg od vektora $\vec{v}$ i $\vec{w}$. Zbroj vektora s nulvektorom ga ne mijenja,

$$\vec{v} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{v} = \vec{v},$$

a zbroj vektora s njemu suprotnim je uvijek nulvektor:

$$\vec{v} + (-\vec{v}) = (-\vec{v}) + \vec{v} = \vec{0}.$$

Iz definicije je očito da pri zbrajanju vektora njihov poredak nije bitan,

$$\vec{v} + \vec{w} = \vec{w} + \vec{v},$$

te da pri uzastopnom zbrajanju više vektora njih možemo proizvoljno grupirati,

$$\vec{u} + \vec{v} + \vec{w} = (\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w}).$$

Također, nije teško uvjeriti se da iz zbroja dvaju vektora pomnoženih istih skalarom možemo izlučiti taj skalar:

$$x \vec{v} + x \vec{w} = x (\vec{v} + \vec{w}).$$

Posljednjih pet formula vrijede za sve vektore $\vec{u}$, $\vec{v}$ i $\vec{w}$ i sve skalare x . Uočimo da su do na oznake vektora to ista svojstva koja ima i zbrajanje brojeva, posebno vidimo da nulvektor u algebri vektora ima ulogu broja nule u algebri brojeva. U kombinaciji s već istaknutim svojstvima množenja vektora skalarom možemo zaključiti: Zbrajanje vektora međusobno i množenje vektora skalarima imaju svojstva analogna zbrajanju i množenju brojeva, samo kod množenja razlikujemo ulogu faktora. Kad skupove V^2 , $V^2(O)$, V^3 , $V^3(O)$ gledamo u kombinaciji s ovako definiranim zbrajanjem vektora i množenjem vektora skalarima, kažemo da su oni (realni) vektorski prostori.

Napomena 6 Može se pokazati da se u V^2 i V^3 vektori mogu zbrajati koristeći pravilo trokuta: Zbroj vektora $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, ... se može dobiti tako da odaberemo predstavnika od $\vec{b}$ s početkom u kraju od $\vec{a}$, predstavnika od $\vec{c}$ s početkom u kraju od $\vec{b}$, i t.d. Zbroj $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \dots$ je onda vektor određen orijentiranom dužinom čiji početak se podudara s početkom od $\vec{a}$, a kraj s krajem zadnjeg od zbrajanih vektora.

Oduzimanje geometrijskih vektora je definirano kao pribrajanje suprotnog vektora:

$$\vec{v} - \vec{w} = \vec{v} + (-\vec{w}).$$

Zadatak 93 Na slici 5.4 ucrtajte vektor $\vec{w} - \vec{v}$.

Primjer 204 Jedna od primjena zbrajanja vektora i množenja vektora skalarima je određivanje centra mase sustava od n materijalnih čestica s masama $m_1, \dots, m_n$. Ako su relativne pozicije tih čestica s obzirom na odabrano ishodište opisane radij-vektorima $\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_n$, pozicija centra mase dana je radij-vektorom

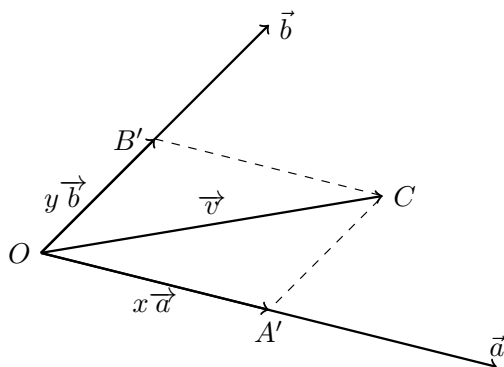
$$\vec{R} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^n m_i \vec{r}_i,$$

gdje je $M = \sum_{i=1}^n m_i$ ukupna masa svih čestica.

Primjer 205 Sustav od n naboja iznosa q_i , $i = 1, \dots, n$ na pozicijama s radij-vektorima $\vec{r}_i$ definira dipolni moment

$$\vec{\mu} = \sum_{i=1}^n q_i \vec{r}_i.$$

Uočimo da dipolni moment (osim u slučaju da je zbroj $Q = \sum_{i=1}^n q_i$ svih naboja 0) ovisi o odabiru ishodišta: Pomaknemo li ishodište za vektor $\vec{R}$, dipolni moment će se promijeniti za $-Q \vec{R}$.

Slika 5.5: $\vec{v} = x\vec{a} + y\vec{b} = [x, y]$.

5.1.2 Baza i koordinate u V^2 , $V^2(O)$, V^3 , $V^3(O)$

Pogledajmo sliku 5.5 na kojoj uzimamo da su vektori $\vec{a}$ i $\vec{b}$ fiksirani (i po potrebi translirani tako da imaju zajednički početak O), a $\vec{v}$ je bilo koji drugi vektor u njihovoj ravnini (dakle varijabilan). Za taj vektor $\vec{v}$ također odabiremo reprezentanta $\overrightarrow{OC}$ s početkom u O . Ako nacrtamo paralelogram $OA'CB'$ kojem je jedna dijagonala dužina $\overrightarrow{OC}$, a stranice $\overrightarrow{OA'}$ i $\overrightarrow{OB'}$ leže na pravcima vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$, dobili smo dva vektora $\overrightarrow{OA'}$ i $\overrightarrow{OB'}$ smjera istog kao $\vec{a}$ odnosno $\vec{b}$. Prema propoziciji 17 postoje jedinstveni skalari x odnosno y takvi da je $\overrightarrow{OA'} = x\vec{a}$ i $\overrightarrow{OB'} = y\vec{b}$. Stoga je $\vec{v} = x\vec{a} + y\vec{b}$. Dakle, uz fiksiranje $\vec{a}$ i $\vec{b}$ svi vektori $\vec{v}$ njihove ravnine mogu se jednoznačno opisati parom skalara x i y .

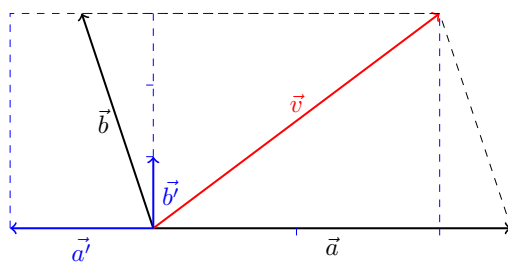
Definicija 24 (Baza i koordinate u V^2 odnosno $V^2(O)$) Ako su $\vec{a}$ i $\vec{b}$ dva fiksirana nekolinearna vektora iz V^2 odnosno $V^2(O)$, uređeni par $(\vec{a}, \vec{b})$ nazivamo bazom vektorskog prostora V^2 odnosno $V^2(O)$. Baza prostora V^2 odnosno $V^2(O)$ zadaje se parametrima a i b (iznosi vektora baze) i $\gamma = \angle(\vec{a}, \vec{b})$ (kut između vektora baze).³

Ako je dana baza $(\vec{a}, \vec{b})$ za V^2 odnosno $V^2(O)$, svi vektori iz V^2 odnosno $V^2(O)$ mogu se jednoznačno opisati uređenim parom dvaju skalara koje nazivamo koordinatama tih vektora: $\vec{v} = [x, y]$ po definiciji znači da je $\vec{v} = x\vec{a} + y\vec{b}$ (usp. sliku 5.5).

Zadatak 94 Zašto u definiciji baze za V^2 odnosno $V^2(O)$ tražimo nekolinearnost vektora baze? Može li nulvektor biti element baze?

Budući da je $\vec{a} = 1\vec{a} + 0\vec{b}$, vektor $\vec{a}$ u bazi $(\vec{a}, \vec{b})$ uvijek ima koordinate $[1, 0]$ i analogno vektor $\vec{b}$ u bazi $(\vec{a}, \vec{b})$ uvijek ima koordinate $[0, 1]$. No, koordinate vektora u ravnini ovise o odabiru baze.

³Uočite: Sigurno je $0 < \gamma < 180^\circ$.



Slika 5.6: Koordinate vektora ovise o odabiru baze.

Primjer 206 Pogledajmo sliku 5.6. Ako vektor $\vec{v}$ (crveno) opisujemo u bazi $(\vec{a}, \vec{b})$ (crno), vidimo $\vec{v} = \vec{a} + \vec{b}$, dakle su mu koordinate $[1, 1]$. Ako pak isti vektor $\vec{v}$ opisujemo u bazi $(\vec{a}', \vec{b}')$ (plavo), vidimo $\vec{v} = -2\vec{a}' + 3\vec{b}'$, dakle su mu u toj bazi koordinate $[-2, 3]$.

U trodimenzionalnom slučaju nam treba pojam (ne)komplanarnosti: Tri vektora u V^3 odnosno $V^3(O)$ nazivamo **komplanarnim** ako su paralelni istoj ravnini, odnosno ako bi uz odabir reprezentanata sa zajedničkim početkom sva tri reprezentanta bila u istoj ravnini.

Definicija 25 (Baza i koordinate u V^3 odnosno $V^3(O)$) Ako su $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ tri fiksirana nekomplanarna vektora u V^3 odnosno $V^3(O)$, kažemo da je uređena trojka $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ baza vektorskog prostora V^3 odnosno $V^3(O)$. Baza prostora V^3 odnosno $V^3(O)$ zadaje se parametrima a, b, c (iznosi vektora baze) i $\alpha = \angle(\vec{b}, \vec{c})$, $\beta = \angle(\vec{a}, \vec{c})$ i $\gamma = \angle(\vec{a}, \vec{b})$ (kutovi između po dva od njih).

Ako je zadana baza $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ prostora V^3 odnosno $V^3(O)$, svi vektori tog prostora mogu se jednoznačno opisati s uređenom trojkom skalara (koordinatama vektora): $\vec{v} = [x, y, z]$ znači da je $\vec{v} = x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c}$.

Zadatak 95 Koji su rasponi mogućih iznosa za α, β i γ ? Zašto?

Zadatak 96 Zašto smo za bazu od V^3 odnosno $V^3(O)$ tražili da ju sačinjavaju nekomplanarni vektori? Mogu li dva od njih biti kolinearni? Koje su koordinate od $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ s obzirom na bazu $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$?

Uočimo: Baza za V^2 odnosno $V^2(O)$ sastoji se od dva, a baza od V^3 odnosno $V^3(O)$ od tri vektora. Kažemo: V^2 i $V^2(O)$ su dvodimenzionalni vektorski prostori, a V^3 i $V^3(O)$ su trodimenzionalni vektorski prostori.

Primijetimo da se u definicijama baza ne traži niti međusobna okomitost njihovih vektora niti da imaju istu ili jediničnu duljinu. Jedini zahtjevi su nekolinearnost (za dvodimenzionalni slučaj) odnosno nekomplanarnost (za trodimenzionalni slučaj). Baze omogućuju opis svih vektora danog vektorskog prostora pomoću njihovih koordinata, no koordinate nisu definirane bez pozivanja na određenu bazu.

Primjer 207 Ako netko govori o vektoru $\vec{v} = [2, -1, 3]$ u prostoru, ali nije specificirao na koju bazu se te koordinate odnose, to može biti bilo koji vektor. Ako znamo da se radi o koordinatnom zapisu obzirom na bazu $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$, onda znamo da je $\vec{v} = 2\vec{a} - \vec{b} + 3\vec{c}$.

Općenite baze posebno su važne u kristalografiji. Pritom se one odabiru tako da se prvo u skladu s određenim konvencijama odabere jedinična ćelija (paralelepiped čije translahirane kopije čine čitavu kristalnu strukturu), te se baza odabire tako da njeni vektori razapinju jediničnu ćeliju i tako odabrana baza, koja služi tome da se s koordinatama s obzirom na nju opisuju pozicije atoma, iona, ... u kristalnoj strukturi, naziva se kristalografska baza. Vrhovi svih kopija jedinične ćelije tada tvore tzv. (primitivnu) kristalnu rešetku. Ovisno o parametrima kristalografske baze (tzv. kristalografski parametri) danu kristalnu strukturu može se svrstati u jedan od sedam kristalnih sustava.

Primjer 208 Triklinski kristalni sustav sastoji se od svih kristala čija se jedinična ćelija može opisati kao paralelepiped s bridovima različitih duljina ($a \neq b \neq c \neq a$) koji tvore međusobno različite kuteve ($\alpha \neq \beta \neq \gamma \neq \alpha$), koji su svi različiti od pravog kuta.

No, za korištenje baze nije bitno je li ona odabrana prema nekim, recimo kristalografskim, konvencijama ili je potpuno proizvoljna. Stoga se, iako kristalografski motivirani, pojmovi jedinične ćelije i rešetke definiraju općenito.

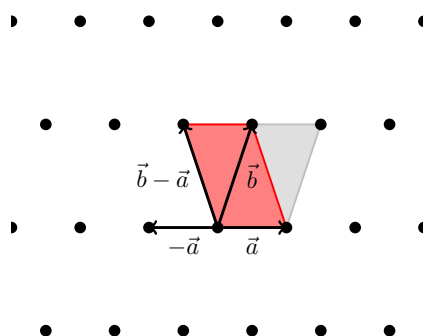
Definicija 26 (Jedinična ćelija) Ako je fiksirana baza prostora $V^2(O)$, V^2 , $V^3(O)$ ili V^3 , paralelogram odnosno paralelepiped kojeg razapinju njeni vektori naziva se *jediničnom ćelijom*.

Također, ako smo odabrali bazu kako bismo koordinatizirali vektore, uz odabir ishodišta O imamo i koordinatni sustav s obzirom na kojeg točke imaju koordinate.

Definicija 27 (Koordinatni sustav i koordinate točaka) Ako je odabrana točka O , ishodište, u ravnini ili prostoru te baza $\mathcal{B}$ za $V^2(O)$ odnosno $V^3(O)$, uređeni par $(O, \mathcal{B})$ naziva se koordinatnim sustavom. Koordinate točke T u koordinatnom sustavu $(O, \mathcal{B})$ definiraju se kao koordinate njezinog radij-vektora s obzirom na bazu $\mathcal{B}$. Koordinate točaka uobičajeno je pisati u okruglim zagradama.

Primjer 209 Uočite da prema prethodnim definicijama točke jedinične ćelije određene nekom bazom od $V^2(O)$ odnosno $V^3(O)$ imaju koordinate između 0 i 1, odnosno jedinična ćelija u koordinatnom sustavu $(O, \mathcal{B})$ je skup $\{(x, y) : 0 \leq x, y \leq 1\}$ odnosno $\{(x, y, z) : 0 \leq x, y, z \leq 1\}$.

Sad možemo definirati općiji pojam rešetke:



Slika 5.7: Primjer rešetke i jediničnih ćelija u ravnini.

Definicija 28 (Rešetka) Za odabrani koordinatni sustav u ravnini ili prostoru, rešetka je skup svih točaka koje u tom koordinatnom sustavu imaju cjelobrojne koordinate.

Primjer 210 Na slici 5.7 crne točke predstavljaju jedan primjer rešetke u ravnini s obzirom na koordinatni sustav određen vektorima $\vec{a}$ i $\vec{b}$ (ishodište je u njihovom zajedničkom početku). Uočite da se ista rešetka dobije ako dulji vektor $\vec{b}$ zamijenimo vektorom $\vec{b} - \vec{a}$. To je razlog zašto je uobičajena konvencija za baze u ravnini da se uzima $90^\circ \leq \gamma < 180^\circ$ i $a \leq b$. Sivo odnosno crveno istaknute su jedinične ćelije s obzirom na baze $(\vec{a}, \vec{b})$ i $(\vec{a}, \vec{b} - \vec{a})$.

Pretpostavimo da je fiksirana baza $(\vec{a}, \vec{b})$ za V^2 ili $V^2(O)$. Tada se zbrajanje i oduzimanje vektora i množenje vektora skalarom može koordinatno zapisati s

$$[x, y] \pm [x', y'] = [x \pm x', y \pm y'],$$

$$\alpha [x, y] = [\alpha x, \alpha y].$$

Analogno, ako je fiksirana baza $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ za V^3 ili $V^3(O)$, zbrajanje i oduzimanje vektora i množenje vektora skalarom može koordinatno zapisati s

$$[x, y, z] \pm [x', y', z'] = [x \pm x', y \pm y', z \pm z'],$$

$$\alpha [x, y, z] = [\alpha x, \alpha y, \alpha z].$$

Zadatak 97 Izvedite gornje formule.

Zadatak 98 Objasnite zašto se kolinearnost dvaju vektora zadanih svojim koordinatama u istoj bazi prepoznaje po proporcionalnosti njihovih koordinata.

Primjer 211 Dane su točke $A = (1, -2, 3)$ i $B = (-1, 6, 0)$ u prostoru, pri čemu se njihove koordinate odnose na isti koordinatni sustav. Po definiciji, njihovi radij-vektori imaju koordinate $\vec{OA} = [1, -2, 3]$ i $\vec{OB} = [-1, 6, 0]$. Prema definiciji zbrajanja vektora slijedi da je $\vec{OA} + \vec{AB} = \vec{OB}$, dakle je $\vec{AB} = \vec{OB} - \vec{OA} = [-2, 8, -3]$.

Kao što smo vidjeli, u definiciji baze ne zahtijevaju se nikakvi posebni iznosi parametara baze. Ako su vektori baze međusobno okomiti (dakle, ako je $\gamma = 90^\circ$ odnosno $\alpha = \beta = \gamma = 90^\circ$), govorimo o **ortogonalnoj bazi**. Ako su vektori ortogonalne baze jedinični, govorimo o **ortonormiranoj bazi**. Vektore ortonormiranih baza obično označavamo s $\vec{i}$, $\vec{j}$ i $\vec{k}$.

Primjer 212 Za kristal kažemo da pripada kubičnom sustavu ako se jedinična ćelija za njegovu strukturu može odabrati kao kocka. U tom slučaju kristalografska baza je očigledno ortogonalna: $\alpha = \beta = \gamma = 90^\circ$. Nadalje, duljine vektora baze su jednake: $a = b = c$. Ta duljina naravno nije 1, nego nešto poput $a = 320,3 \text{ pm}$. No, ako uzmemo da je a jedinična duljina, onda kristalografsku bazu možemo smatrati ortonormiranom, samo bilo koje izračunate duljine moramo množiti s a , površine s a^2 , a volumene s a^3 da bismo dobili točne iznose.

U praksi želimo iz poznatih koordinata vektora saznati koliko su dugi, pod kojim se kutovima nalaze, kakve površine i volumene određuju, tj. želimo algebarski zaključivati o geometrijskim svojstvima i odnosima vektora. Algebarske operacije koje to omogućuju su skalarni, vektorski i mješoviti produkt vektora.

5.2 Klasična algebra vektora

5.2.1 Skalarni produkt geometrijskih vektora

U ovom odjeljku vidjet ćemo kako primjerice riješiti zadatak:

Zadatak 99 Odredite duljinu vektora $\vec{v} = [1, -2, 3]$ i njegov kut s vektorom $\vec{w} = [1, 1, 1]$.

Dakle, vidjet ćemo kako iz koordinata određivati duljine i kutove. Naravno, pritom se pretpostavlja da znamo na koju se bazu odnose koordinate, tj. da su poznati parametri baze. Računska operacija koja nam omogućuje određivanje duljina i kutova je skalarni produkt vektora. On se doduše definira polazeći od pretpostavke da znamo duljine i kut među dvama vektorima, ali se temeljem svojih svojstava u praksi koristi upravo obrnuto, da saznamo duljine i kut.

Definicija 29 (Skalarni produkt) Ako su $\vec{v}$ i $\vec{w}$ dva geometrijska vektora čiji kut je φ , njihov skalarni produkt je broj (skalar)

$$\vec{v} \cdot \vec{w} = vw \cos \varphi.$$

Skalarni produkt ima svojstva analogna svojstvima množenja brojeva međusobno:

$$\begin{aligned}\vec{v} \cdot \vec{v} &\geq 0, & \vec{v} \cdot \vec{v} = 0 &\Leftrightarrow \vec{v} = \vec{0}, \\ \vec{v} \cdot \vec{w} &= \vec{w} \cdot \vec{v}, & (\vec{u} \cdot \vec{v}) \cdot \vec{w} &= \vec{u} \cdot (\vec{v} \cdot \vec{w}), \\ \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w} &= \vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}), & (x \vec{v}) \cdot \vec{w} &= x (\vec{v} \cdot \vec{w})\end{aligned}$$

za sve skalare x i sve vektore $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ iz istog od prostora $V^2, V^2(O), V^3$ odnosno $V^3(O)$.

Zadatak 100 *Dokažite nejednakost Cauchy-Schwarz-Bunjakovskog: $|\vec{v} \cdot \vec{w}| \leq v w$ za svaka dva vektora $\vec{v}$ i $\vec{w}$. Kad vrijedi jednakost?*

S obzirom na to da iznosi v i w ne mogu biti negativni, te da je kut među vektorima unutar segmenta $[0, \pi]$, iz svojstava funkcije kosinus zaključujemo:

Propozicija 18 *Skalarni produkt $\vec{v} \cdot \vec{w}$ je pozitivan, nula odnosno negativan točno ako je kut među vektorima $\vec{v}$ i $\vec{w}$ šiljast, pravi odnosno tupi.*

Nadalje, po definiciji je $\vec{v} \cdot \vec{v} = v v \cos 0 = v^2$, dakle vrijedi:

$$v = +\sqrt{\vec{v} \cdot \vec{v}}. \quad (5.2)$$

Također, iz definicije vidimo da je:

$$\cos \varphi = \frac{\vec{v} \cdot \vec{w}}{v w}. \quad (5.3)$$

Dakle, ako znamo iz koordinata izračunavati skalarne produkte, onda po formuli (5.2) znamo računati i njihove duljine kao i duljine vektora u nazivniku formule (5.3). Budući da je kosinus na segmentu $[0, \pi]$ injektivan, slijedi da tada možemo izračunati i kut φ :

$$\varphi = \arccos \frac{\vec{v} \cdot \vec{w}}{\sqrt{\vec{v} \cdot \vec{v}} \cdot \sqrt{\vec{w} \cdot \vec{w}}}.$$

Kako izračunati skalarni produkt dvaju vektora zadanih koordinatama u *istoj* bazi poznatih parametara? Neka su svojim koordinatama u bazi $\mathcal{B} = (\vec{a}, \vec{b})$ odnosno $\mathcal{B} = (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ zadana dva vektora $\vec{v} = [x, y]$ i $\vec{w} = [x', y']$ odnosno $\vec{v} = [x, y, z]$ i $\vec{w} = [x', y', z']$. Po definiciji koordinata je $\vec{v} = x\vec{a} + y\vec{b}(+z\vec{c})$ i $\vec{w} = x'\vec{a} + y'\vec{b}(+z'\vec{c})$. Koristeći svojstva skalarnog produkta računamo (u zagradama su izdvojeni članovi koji se pojavljuju samo u trodimenzionalnom slučaju):

$$\begin{aligned}\vec{v} \cdot \vec{w} &= (x\vec{a} + y\vec{b}(+z\vec{c})) \cdot (x'\vec{a} + y'\vec{b}(+z'\vec{c})) = \\ &= x x' a^2 + y y' b^2 + (x y' + x' y) a b \cos \gamma \\ &\quad (+z z' c^2 + (x z' + x' z) a c \cos \beta + (z y' + z' y) a b \cos \alpha).\end{aligned}$$

Dakle, ako znamo parametre baze, iz koordinata možemo izračunati skalarni produkt bilo koja dva vektora zadana svojim koordinatama u toj bazi. Uočimo da ako je baza ortogonalna ($(\alpha = \beta = \gamma = 90^\circ)$), vrijedi

$$\vec{v} \cdot \vec{w} = x x' a^2 + y y' b^2 (+ z z' c^2),$$

a ako je još i ortonormirana, dobivamo

$$\vec{v} \cdot \vec{w} = x x' + y y' (+ z z').$$

Primjer 213 U nekoj ortogonalnoj bazi čiji su vektori redom duljina $a = 1 \text{ m}$, $b = 2 \text{ m}$ i $c = 3 \text{ m}$, vektori $[-4, 1, 0]$ i $[1, 1, 0]$ su međusobno okomiti: $[-4, 1, 0] \cdot [1, 1, 0] = -4 \cdot 1 \text{ m}^2 + 1 \cdot 1 \text{ m}^2 + 0 \cdot 0 \text{ m}^2 = 0$. Da je pak baza bila ortonormirana, vektori s koordinatama $[-4, 1, 0]$ i $[1, 1, 0]$ ne bi bili okomiti, nego pod tupim kutem: $[-4, 1, 0] \cdot [1, 1, 0] = -4 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 = -3 < 0$.

Zadatak 101 Koji kut γ trebaju zatvarati vektori $\vec{a}$ i $\vec{b}$ baze prostora V^2 ako znate da je $a = b$ i da su vektori koji obzirom na tu bazu imaju koordinate $[-2, 1]$ i $[0, 3]$ međusobno okomiti?

U kombinaciji s formulom (5.2), iz gornjih formula zaključujemo da se iznos vektora $\vec{v}$ iz njegovih koordinata računa po pravilu

$$v = \sqrt{x^2 a^2 + y^2 b^2 + 2x y a b \cos \gamma (+ z^2 c^2 + 2x z a c \cos \beta + 2y z b c \cos \alpha)}.$$

Ako je baza ortogonalna, formula se pojednostavljuje na

$$v = \sqrt{x^2 a^2 + y^2 b^2 (+ z^2 c^2)},$$

a ako je još i ortonormirana, dobivamo

$$v = \sqrt{x^2 a + y^2 (+ z^2)}.$$

Primijetimo i da budući da je za svake dvije točke njihova udaljenost $d(A, B)$ jednaka duljini vektora $\vec{AB}$ (ili $\vec{BA}$) sada znamo izračunati udaljenost dviju točaka danih svojim koordinatama u proizvoljnom koordinatnom sustavu.

Zadatak 102 Izvedite formulu za $d(A, B)$ ako je $a = b = c \neq 1$ i $\alpha = \gamma = 90^\circ$, $\beta = 60^\circ$.

Primjer 214 Za kristale kubičnog sustava kristalografsku bazu možemo smatrati ortonormiranom, pri čemu duljinu brida a jedinične ćelije uzmemo kao jediničnu. Neka je $a = 320,3 \text{ pm}$ i neka se dva atoma te strukture na pozicijama $A = \left(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{3}\right)$ i $B = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{2}, 0\right)$. Udaljenost ta dva atoma iznosi:

$$d(A, B) = |\vec{AB}| = \left| \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix} \right| = \left| \begin{bmatrix} -\frac{1}{6} \\ \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{3} \end{bmatrix} \right| = \sqrt{\frac{1}{36} + \frac{1}{4} + \frac{1}{9}} = \frac{\sqrt{14}}{6}.$$

Budući da nam je jedinična duljina bila a , udaljenost između tih atoma je $\frac{\sqrt{14}}{6} \cdot 320,3 \text{ pm} = 199,7 \text{ pm}$.

Ako bi se u istoj kristalnoj strukturi nalazio još jedan atom na položaju $C = \left(\frac{1}{5}, \frac{1}{5}, \frac{1}{5}\right)$ te ako su atomi vezani tako da je C vezan s A i B , kut veze $\varphi = \angle ACB$ računamo kao:

$$\begin{aligned} \cos \varphi &= \frac{\vec{CA} \cdot \vec{CB}}{|\vec{CA}| \cdot |\vec{CB}|} = \frac{\left[-\frac{3}{10}, \frac{1}{5}, -\frac{2}{15}\right] \cdot \left[-\frac{2}{15}, -\frac{3}{10}, \frac{1}{5}\right]}{\left| \left[-\frac{3}{10}, \frac{1}{5}, -\frac{2}{15}\right] \right| \left| \left[-\frac{2}{15}, -\frac{3}{10}, \frac{1}{5}\right] \right|} = \\ &= \frac{\frac{3}{10} \cdot \frac{2}{15} - \frac{1}{5} \cdot \frac{3}{10} - \frac{2}{15} \cdot \frac{1}{5}}{\sqrt{\frac{9}{100} + \frac{1}{25} + \frac{4}{225}} \cdot \sqrt{\frac{4}{225} + \frac{9}{100} + \frac{1}{25}}} = \frac{-\frac{7}{150}}{\frac{133}{900}} = -\frac{6300}{19950} = -0,315789\dots, \end{aligned}$$

dakle je $\varphi = 108^\circ 25'$.

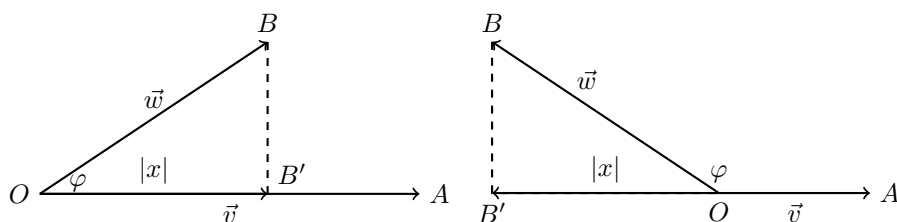
Zadatak 103 Kako biste zadatak iz gornjeg primjera riješili da se radilo o kristalu rompskog sustava s parametrima kristalografske baze $a = 300 \text{ pm}$, $b = 500 \text{ pm}$, $c = 800 \text{ pm}$, $\alpha = \beta = \gamma = 90^\circ$?

Zadatak 104 Za neku triklinsku kristalnu strukturu parametri kristalografske baze su $a = 100 \text{ pm}$, $b = 200 \text{ pm}$, $c = 150 \text{ pm}$, $\alpha = 65^\circ$, $\beta = 85^\circ$, $\gamma = 70^\circ$. Dva atoma te strukture nalaze se na pozicijama $\left(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{3}\right)$ i $\left(0, \frac{1}{4}, \frac{2}{3}\right)$. Kolika je udaljenost među tim atomima?

Osim za računanja duljina i kutova, skalarni produkt može se iskoristiti i za određivanje **ortogonalne projekcije** jednog vektora na drugi. Recimo da želimo odrediti ortogonalnu projekciju vektora $\vec{w} = \vec{OB}$ na vektor $\vec{v} = \vec{OA}$ i neka je ta ortogonalna projekcija vektor $\vec{OB'}$ (vidi sliku 5.8, spojnica BB' je u oba slučaja okomita na vektor $\vec{v}$). Budući da je ta ortogonalna projekcija očito kolinearne s $\vec{v}$, znamo (po propozicijama 16 i 17) da je $\vec{OB'} = \frac{x}{v} \vec{v}$ za neki skalar x (pozitivan ako je kao na slici 5.8 kut φ šiljast, 0 ako je pravi, negativan ako je tupi). Iz pravokutnog trokuta OBB' dobivamo $x = |x| = w \cos \varphi$ za šiljast φ odnosno u tupokutnom slučaju $x = -|x| = -w \cos(\pi - \varphi) = w \cos \varphi$ pa množenje s v daje $xv = vw \cos \varphi = \vec{v} \cdot \vec{w}$. Dakle:

Propozicija 19 Ortogonalna projekcija vektora $\vec{w}$ na vektor $\vec{v}$ je vektor $\frac{\vec{v} \cdot \vec{w}}{v^2} \vec{v}$ iznosa $\frac{|\vec{v} \cdot \vec{w}|}{v}$.

Primjer 215 Rad izvršen djelovanjem sile $\vec{F}$ pri pomaku za vektor $\vec{d}$ pod kutem φ u odnosu na vektor sile je $W = \vec{F} \cdot \vec{d} = Fd \cos \varphi$.



Slika 5.8: Ortogonalna projekcija jednog vektora na drugi.

Iz škole je dobro poznata i formula za računanje površine paralelograma kojemu su poznate duljine v i w njegovih stranica i kut φ između njih: $P = vw \sin \varphi$. Dakle, ako znamo koordinate dvaju vektora $\vec{v}$ i $\vec{w}$, površinu paralelograma kojeg oni određuju (paralelogram $OACB$ na slici 5.4) možemo dobiti tako da im pomoću skalarnog produkta (kako je opisano u odjeljku 5.2.1) izračunamo iznose i kut. To znači da znamo izračunati i površine svih mnogokuta, jer se oni mogu rastaviti na trokute, a površina svakog trokuta je pola površine odgovarajućeg trokuta.

Zadatak 105 Koordinatni sustav određen je ishodištem O i bazom s parametrima $a = b = c = 1$ cm i $\alpha = \beta = \gamma = 75^\circ$. Izračunajte površinu trokuta ABC ako je $A = O$, $B = (1, 2, 3)$ i $C = (-1, -5, 0)$.

Uočimo da smo u svim primjerima primjene skalarnog produkta morali iz parametara baze izračunavati njihove skalarne produkte. Stoga je u slučajevima da trebamo računati kutove, duljine i(li) površine iz koordinata često zgodno na početku ispisati tzv. **metrički tenzor** dane baze $\mathcal{B}$, tj. tablicu (formalno: matricu) skalarnih produkata vektora baze:

$$\begin{array}{c|ccc}
 & \vec{a} & \vec{b} & \vec{c} \\
 \hline
 \vec{a} & a^2 & ab \cos \gamma & ac \cos \beta \\
 \vec{b} & ab \cos \gamma & b^2 & bc \cos \alpha \\
 \vec{c} & ac \cos \beta & bc \cos \alpha & c^2
 \end{array} \quad (5.4)$$

Zadatak 106 Ispišite metričke tenzore za sve baze u zadacima i primjerima ovog odjeljka.

5.2.2 Vektorski produkt vektora

U trodimenzionalnim razmatranjima često je potrebno opisati i vektor koji je istovremeno okomit na dva zadana vektora (to u dvodimenzionalnom slučaju nema smisla, dakle se ovaj odjeljak odnosi samo na prostore V^3 i $V^3(O)$). Ako su vektori $\vec{v}$ i $\vec{w}$ kolinearni, smjerova okomitih na njih ima beskonačno mnogo (svi leže u jednoj ravnini), ali ako vektori $\vec{v}$ i $\vec{w}$ nisu kolinearni, onda postoji samo jedan smjer koji

je istovremeno okomit na oba vektora. Ako znamo jedan vektor $\vec{u}$ tog smjera, lako skaliranjem dobijemo proizvoljno dug i proizvoljno orijentiran vektor tog smjera (propozicije 16 i 17). Algebarska operacija koja iz $\vec{v}$ i $\vec{w}$ koja računa jedan $\vec{u} \perp \vec{v}, \vec{w}$ je vektorski produkt.

Definicija 30 (Vektorski produkt) *Vektorski produkt dvaju vektora $\vec{v}$ i $\vec{w}$ u V^3 ili $V^3(O)$ je vektor $\vec{v} \times \vec{w}$ koji je okomit na oba vektora, iznosa jednakog površini paralelograma razapetog s $\vec{v}$ i $\vec{w}$, a orijentiran je tako da $\vec{v}, \vec{w}, \vec{v} \times \vec{w}$ poštuju pravilo desne ruke.⁴*

Uočimo da je mjerna jedinica za iznos vektorskog produkta kvadrat mjerne jedinice za iznose vektora koje množimo, tj. vektorski produkt nema istu fizikalnu dimenziju kao ti vektori. Ukoliko baš želimo da ima, onda iznos vektorskog produkta trebamo dijeliti s mjernom jedinicom. Primjerice, ako množimo vektore čiji iznosi su dani u cm, vektorski produkt će imati iznos u cm^2 , a ako želimo da ima isti iznos kao oni, taj iznos treba podijeliti s cm. Vektorski produkt se koristi u definicijama mnogih fizikalnih veličina.

Primjer 216 *Moment sile definiran je kao vektorski produkt radijvektora i sile: $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$, a kutni moment mase m oko točke je $\vec{l} = \vec{r} \times \vec{p}$, gdje je $\vec{p} = m\vec{v}$ linearni momoment.*

Uočimo da je po definiciji $|\vec{v} \times \vec{w}|$ površina paralelograma određenog vektorima $\vec{v}$ i $\vec{w}$, tj. $|\vec{v} \times \vec{w}| = vw \sin \varphi$, dakle kad vidimo kako iz koordinata izračunati vektorski produkt dvaju vektora imat ćemo alternativni način računanja površina paralelograma (i općenitijih mnogokuta) u prostoru. Uočimo i da ako su $\vec{v}$ i $\vec{w}$ kolinearni površina navedenog paralelograma je 0 pa vrijedi:

Propozicija 20 *Vektorski produkt kolinearnih vektora je nulvektor.*

Primjer 217 *Ako je $\vec{w} = -e\vec{v}$, onda je $\vec{v} \times \vec{w} = \vec{0}$ jer su po definiciji množenja vektora skalarom vektori $\vec{v}$ i $\vec{w}$ kolinearni.*

Primijetimo i da ako $\vec{v}$ i $\vec{w}$ nisu kolinearni (nisu baza ravnine), onda je $(\vec{v}, \vec{w}, \vec{v} \times \vec{w})$ uvijek baza prostora i obrnuto, ako je navedena trojka baza prostora, onda $\vec{v}$ i $\vec{w}$ nisu istog smjera.

Karakteristična svojstva vektorskog produkta su

$$\vec{v} \times (\vec{w} + \vec{u}) = \vec{v} \times \vec{w} + \vec{v} \times \vec{u}, \quad (\vec{v} + \vec{w}) \times \vec{u} = \vec{v} \times \vec{u} + \vec{w} \times \vec{u},$$

$$\alpha(\vec{v} \times \vec{w}) = (\alpha\vec{v}) \times \vec{w},$$

⁴Ako dlan desne ruke držimo tako da na njemu leži $\vec{v}$ te ako kad dlan preko kuta φ kojeg zatvaraju ta dva vektora — podsjećamo da je to manji od dva moguća kuta — zakrećemo prema vektoru $\vec{w}$, onda palac pokazuje orijentaciju od $\vec{v} \times \vec{w}$.

te ortogonalnost

$$\vec{v} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) = 0, \quad (\vec{v} \times \vec{w}) \cdot \vec{w} = 0,$$

i antikomutativnost

$$\vec{v} \times \vec{w} = -\vec{w} \times \vec{v}.$$

Primijetimo da je antikomutativnost očigledna iz definicije vektorskog produkta, a ortogonalnost slijedi jer je $\vec{v} \times \vec{w}$ okomit na $\vec{v}$ i $\vec{w}$ pa im je skalarni produkt 0.

Vrijedi i $\vec{v} \times \vec{0} = \vec{0} \times \vec{v} = \vec{0}$ (jer je $\vec{0}$ kolinearan sa svakim vektorom), $\vec{v} \times \vec{v} = \vec{0}$ (jer je svaki vektor kolinearan samom sebi) te

$$|\vec{v} \times \vec{w}|^2 = v^2 w^2 - (\vec{v} \cdot \vec{w})^2,$$

$$(\vec{v} \times \vec{w}) \times \vec{u} = (\vec{v} \cdot \vec{u})\vec{w} - (\vec{w} \cdot \vec{u})\vec{v} \quad (5.5)$$

(posljednja formula poznata je i kao Lagrangeova formula).

Dok je računanje skalarnog produkta iz koordinata bilo jednostavno neovisno o tipu baze, za vektorski produkt to u slučaju baze koja nije ortonormirana nije direktno izvedivo, jer bi analog metričkog tenzora za vektorski produkt sadržavao međusobne *vektorske* produkte vektora baze. Dok je $\vec{a} \times \vec{a} = \vec{b} \times \vec{b} = \vec{c} \times \vec{c} = \vec{0}$ i $\vec{b} \times \vec{a} = -\vec{a} \times \vec{b}$, $\vec{a} \times \vec{c} = -\vec{c} \times \vec{a}$ i $\vec{c} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{c}$, vektore $\vec{a} \times \vec{b}$, $\vec{c} \times \vec{a}$ i $\vec{b} \times \vec{c}$ (zasad) znamo opisati riječima, ali ne i izračunati. Tu nam pomaže uvođenje tzv. recipročne baze. To je jedna dodatna baza $\mathcal{B}^*$ koja se gleda u paru s izvornom bazom $\mathcal{B}$, a i neovisno o izračunavanju vektorskih produkata iz koordinata ima veliku samostalnu važnost, osobito u kristalografiji. Kad koristimo recipročnu bazu, polaznu bazu $\mathcal{B}$ nazivamo **direktnom bazom**.

Definicija 31 (Recipročna (dualna) baza) Neka je dana direktna baza $\mathcal{B} = (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$. Pripadna recipročna ili dualna baza definirana je s

$$\vec{a}^* = \frac{1}{V} \vec{b} \times \vec{c}, \quad \vec{b}^* = \frac{1}{V} \vec{c} \times \vec{a}, \quad \vec{c}^* = \frac{1}{V} \vec{a} \times \vec{b},$$

gdje je s V označen volumen jedinične ćelije određene vektorima direktne baze. Kad se koordinate odnose na recipročnu bazu, to ističemo zvjezdicom: $[h, k, l]^* := h \vec{a}^* + k \vec{b}^* + l \vec{c}^*$.

Prostor koordinatiziran direktnom bazom naziva se direktnim prostorom, a ako je koordinatiziran recipročnom bazom, recipročnim prostorom.

Propozicija 21 Vektori $\vec{a}^*$, $\vec{b}^*$, $\vec{c}^*$ imaju sljedeća svojstva:

$$\vec{a}^* \cdot \vec{a} = \vec{b}^* \cdot \vec{b} = \vec{c}^* \cdot \vec{c} = 1,$$

$$\vec{a}^* \cdot \vec{b} = \vec{a}^* \cdot \vec{c} = \vec{b}^* \cdot \vec{a} = \vec{b}^* \cdot \vec{c} = \vec{c}^* \cdot \vec{a} = \vec{c}^* \cdot \vec{b} = 0.$$

Dok ćemo gornje formule za produkte istoimenih vektora direktne i recipročne baze dokazati kad uvedemo mješoviti produkt (odjeljak 5.2.3), za raznoimene vektore iz direktne i recipročne baze su po definiciji recipročne baze odnosno vektorskog produkta međusobno okomiti, pa su im skalarni produkti 0. Koristeći te formule dobivamo da vrijedi sljedeća jednostavna formula za skalarni produkt dvaju vektora od kojih je jedan zadan koordinatama u direktnoj, a drugi u recipročnoj bazi:

$$[x, y, z] \cdot [h, k, l]^* = xh + yk + zl. \quad (5.6)$$

Naime, po definiciji koordinata imamo $[x, y, z] = x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c}$ i $[h, k, l]^* = h\vec{a}^* + k\vec{b}^* + l\vec{c}^*$. Ako ih skalarno pomnožimo, koristeći distributivnost skalarnog produkta i gornju propoziciju, dobivamo formulu (5.6).

Primijetimo da ako je direktna baza ortogonalna, onda je i pripadna recipročna baza ortogonalna. Ako je direktna baza još i ortonormirana, onda je $V = 1$ i očigledno po definiciji vektorskog produkta $\vec{i} \times \vec{j} = \vec{k}$, $\vec{j} \times \vec{k} = \vec{i}$, $\vec{k} \times \vec{i} = \vec{j}$, pa zaključujemo da je $\vec{i}^* = \vec{i}$, $\vec{j}^* = \vec{j}$, $\vec{k}^* = \vec{k}$, tj. ortonormirana baza je sama sebi recipročna.

Uzmimo sad dva vektora iz V^3 ili $V(O)$ zadana koordinatama danim obzirom na jednu (direktnu) bazu: $\vec{v} = [x, y, z]$ i $\vec{w} = [x', y', z']$. Koristeći svojstva vektorskog produkta te definicije koordinata i recipročne baze dobivamo:

$$\vec{v} \times \vec{w} = V(yz' - zy')\vec{a}^* + V(zx' - xz')\vec{b}^* + V(xy' - yx')\vec{c}^* =: V \begin{vmatrix} \vec{a}^* & \vec{b}^* & \vec{c}^* \\ x & y & z \\ x' & y' & z' \end{vmatrix}.$$

Tako smo dobili formulu za računanje vektorskog produkta iz koordinata. Kao što vidimo, iz koordinata dvaju vektorâ u direktnoj bazi dobivamo koordinate njihova vektorskog produkta u recipročnoj, a ne u polaznoj direktnoj bazi.

Napomena 7 *Budući da je $(\vec{i}^*, \vec{j}^*, \vec{k}^*) = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, za slučaj ortonormirane baze gornja formula poprima oblik*

$$[x, y, z] \times [x', y', z'] = V \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & z \\ x' & y' & z' \end{vmatrix}.$$

Zadatak 107 *Izračunajte vektorski produkt vektora $\vec{v} = [5, 4, 3]$ i $\vec{w} = [-1, 0, -2]$ i rezultat izrazite koordinatno i u recipročnoj i u direktnoj bazi, ako znate da su parametri direktne baze $a = 5$ cm, $b = 10$ cm, $c = 12$ cm, $\alpha = \beta = \gamma = 90^\circ$.*

5.2.3 Mješoviti produkt vektora

U trodimenzionalnom prostoru mogu nas uz duljine, kuteve i površine zanimati i volumeni. Znamo da je volumen piramide jednak trećini volumena prizme s istom bazom i visinom. Nadalje, svako uglato tijelo se može triangulirati, tj. rastaviti na

tetraedre (trostrane piramide). Stoga, ako znamo iz koordinata vrhova izračunati volumen paralelepipeda, znamo izračunati volumen svakog uglatog tijela. Operacija kojom dobivamo volumen paralelepipeda razapetog s tri vektora $\vec{u}$, $\vec{v}$ i $\vec{w}$ je, do na predznak, mješoviti produkt tih vektora.

Definicija 32 (Mješoviti produkt) *Mješoviti produkt triju vektora $\vec{u}$, $\vec{v}$ i $\vec{w}$ u prostoru definiran je kao skalar $\vec{u} \cdot \vec{v} \times \vec{w}$. Njegova apsolutna vrijednost jednaka je volumenu paralelepipeda razapetog s $\vec{u}$, $\vec{v}$ i $\vec{w}$.*

Uočite da u gornjoj definiciji nisu potrebne zagrade za naznačavanje redoslijeda, jer $(\vec{u} \cdot \vec{v}) \times \vec{w}$ nema smisla (bio bi to vektorski produkt skalara i vektora). Zbog veze s volumenom vidimo da ako je mješoviti produkt vektora $\vec{u}$, $\vec{v}$ i $\vec{w}$ jednak 0, oni su komplanarni, dakle *ne* čine bazu prostora. Ako je $\vec{u} \cdot \vec{v} \times \vec{w} > 0$, vektori $\vec{u}$, $\vec{v}$ i $\vec{w}$ čine tzv. **desnu bazu** prostora, a u suprotnom tzv. lijevu bazu. U svim standardnim situacijama podrazumijevaju se desne baze. Specijalno, kristalografska baza je uvijek desna. Također, kad god u paru s danom direktnom bazom koristimo i recipročnu, podrazumijeva se da je direktna baza desna.

Osnovno svojstvo mješovitog produkta je njegova ciklička invarijantnost:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} \times \vec{w} = \vec{v} \cdot \vec{w} \times \vec{u} = \vec{w} \cdot \vec{u} \times \vec{v}.$$

Ako je dana desna baza $\mathcal{B} = (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$, iz definicijen vidimo da je volumen jedinične ćelije

$$V = \vec{a} \cdot \vec{b} \times \vec{c}.$$

Sad možemo dovršiti dokaz propozicije 21: Ako računamo, primjerice, $\vec{b}^* \cdot \vec{b}$, iz cikličke invarijantnosti mješovitog produkta dobijemo:

$$\vec{b}^* \cdot \vec{b} = \frac{1}{V} \vec{c} \times \vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{1}{\vec{a} \cdot \vec{b} \times \vec{c}} \cdot \vec{a} \cdot \vec{b} \times \vec{c} = 1.$$

Zadatak 108 *Dokažite da je recipročna baza stvarno baza, da je volumen V^* njome određene jedinične ćelije jednak $1/V$ i da je recipročna baza recipročne baze polazna direktna baza. Uputa: Za dokaz da je $V^* = \frac{1}{V}$ koristite Lagrangeovu formulu (5.5).*

Neka su sad $\vec{u} = [x, y, z]$, $\vec{v} = [x', y', z']$ i $\vec{w} = [x'', y'', z'']$ vektori s koordinatama danim s obzirom na istu direktnu bazu. Računamo:

$$\begin{aligned} \vec{u} \cdot \vec{v} \times \vec{w} &= \vec{u} \cdot V((yz' - y'z)\vec{a}^* + (zx' - y'x)\vec{b}^* + (xy' - x'y)\vec{c}^*) = \\ &= V(x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c}) \cdot ((yz' - y'z)\vec{a}^* + (zx' - y'x)\vec{b}^* + (xy' - x'y)\vec{c}^*) = \\ &= V(x(y'z'' - y''z') + y(z'x'' - z''x') + z(x'y'' - x''y')), \end{aligned}$$

tj. dobili smo opću formulu za računanje mješovitog produkta iz koordinata koju kraće zapisujemo u obliku

$$\vec{u} \cdot \vec{v} \times \vec{w} = V \begin{vmatrix} x & y & z \\ x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \end{vmatrix}.$$

Primijetimo da je u slučaju ortonormirana baze $V = 1$.

5.3 Analitička geometrija prostora

U analitičkoj geometriji euklidske⁵ ravnine se pomoću koordinata (uređenih parova realnih brojeva) proučavaju točke i jednodimenzionalni geometrijski objekti u ravnini: pravci, krivulje drugog reda i razne druge krivulje. U trodimenzionalnom euklidskom prostoru se uz točke i krivulje razmatraju i dvodimenzionalni geometrijski objekti — plohe. Najvažnija vrsta ploha u prostoru su ravnine.

Da bismo se mogli baviti analitičkom geometrijom prostora, potrebno je prvo odabrati koordinatni sustav. Kako je rečeno u prethodnom poglavlju, **koordinatni sustav** se sastoji od jedne odabrane točke prostora (ishodište O) i (desne) baze prostora $V^3(O)$, dakle uređene trojke $\mathcal{B} = (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ nekomplanarnih vektora. Ako je kao baza odabrana (desna) ortonormirana baza govorimo o Kartezijevom koordinatnom sustavu. Zbog ortonormiranosti baze koja ga određuje, mnogi računi koji se odnose na objekte opisane u Kartezijevom koordinatnom sustavu su jednostavniji nego u općem slučaju.

U prethodnom odjeljku smo definirali i koordinate točaka prostora te pojam rešetke. Pritom, prva koordinata se zove apscisa, druga je ordinata, a treća aplikata. U prethodnom odjeljku vidjeli smo i kako se računaju udaljenosti dviju točaka. **Polovište dužine** $\overline{TT'}$, za $T = (x, y, z)$ i $T' = (x', y', z')$, ima koordinate $\left(\frac{x+x'}{2}, \frac{y+y'}{2}, \frac{z+z'}{2}\right)$. Ta formula vrijedi za sve tipove koordinatnih sustava.

Zadatak 109 *Skicirajte rešetku u ravnini ako je $a = 1$ cm, $b = 2$ cm i $\gamma = 45^\circ$. Koliko iznosi udaljenost ishodišta do središta jedinične ćelije?*

Koordinatne osi su brojevi pravci kroz ishodište kojima se smjerovi redom podudaraju sa smjerovima vektora baze koordinatnog sustava. Uobičajeno je tri koordinatne osi zvati redom x -os, y -os i z -os (os apscisa, os ordinata i os aplikata). Na skicama, os ordinata se u pravilu crta horizontalno, orijentiran prema desno. **Koordinatne ravnine** su ravnine određene s po dvije koordinatne osi te govorimo o (x, y) -ravnini, (y, z) -ravnini i (x, z) -ravnini.

Objekti u prostoru opisuju se s jednom ili više jednadžbi s tri nepoznanice koje predstavljaju koordinate točaka pojedinog objekta. Budući da je prostor $V^3(O)$ trodimenzionalan, jedna jednadžba s tri nepoznanice „oduzima“ jedan stupanj slobode (dimenzija je u biti isto što i broj stupnjeva slobode) te predstavlja dvodimenzionalni objekt (plohu) u prostoru, dok dvije (neproporcionalne) jednadžbe s tri nepoznanice „oduzimaju“ dva stupnja slobode te gledane kao sustav predstavljaju jednodimenzionalni objekt (krivulju) u prostoru. Općenito, presjek objekata u prostoru pomoću analitičke geometrije određujemo rješavanjem sustava jednadžbi tih objekata, a rješenja tog sustava su koordinate točaka presjeka. U ovom poglavlju bavit ćemo se samo objektima u prostoru koji se opisuju linearnim jednadžbama, a to su pravci i ravnine.

⁵Izraz euklidski znači da se udaljenosti mjere na uobičajeni način.

5.3.1 Ravnine u prostoru

Pravac u koordinatnoj *ravnini* može se opisati jednađbom oblika $ax + by = c$ u kojoj a i b nisu istovremeno 0, tj. jednom linearnom jednađbom s dvije nepoznanice koja povezuje koordinate točaka pravca. Analog takvog pristupa u prostoru, tj. jedna linearna jednađba oblika

$$Ax + By + Cz = D \quad (5.7)$$

koja povezuje tri prostorne koordinate je (**opća jednađba ravnine**). Pritom koeficijenti A , B i C ne smiju sva tri biti jednaka 0. Sve jednađbe koje se iz jednađbe ravnine mogu dobiti njenim množenjem brojem različitim od nule predstavljaju istu ravninu (jer se time ne mijenja skup rješenja takve jednađbe). Točka je u ravnini točno ako zadovoljava njenu jednađbu.

Zadatak 110 Objasnite zašto jednađba $x + 2y = 3$ u ravnini predstavlja pravac, ali u prostoru predstavlja ravninu.

Najjednostavnije ravnine su koordinatne ravnine. Točke u (x, y) -ravnini imaju aplikatu jednaku nuli te je jednađba (x, y) -ravnine

$$z = 0,$$

tj. $0x + 0y + 1z = 0$. Analogno je jednađba (y, z) -ravnine

$$x = 0,$$

a jednađba (x, z) -ravnine je

$$y = 0.$$

Primjer 218 Jednađbom $x + y - 2z = 5$ zadana je jedna ravnina. Ishodište $(0, 0, 0)$ ne leži u njoj jer $0 + 0 - 2 \cdot 0 \neq 5$, a točka $(1, 8, 2)$ leži u njoj jer je $1 + 8 - 2 \cdot 2 = 5$.

Vidimo: Ravnina sadrži ishodište točno ako je koeficijent D (slobodni član njezine jednađbe) jednak 0. Općenito, iznos koeficijenta D povezan je s udaljenošću ravnine do ishodišta: Što je $|D|$ veći, to je ishodište dalje od ravnine.

Koeficijenti A , B i C govore nam o nagibu ravnine prema koordinatnim osima. Ako je $A = 0$, onda jednađba ima oblik $By + Cz = D$. U tom slučaju nije moguće jednoznačno odrediti sjecište ravnine s x -osi jer bi ono imalo koordinate $(x, 0, 0)$ te bi trebalo riješiti „jednađbu“ $0 = D$, koja je istinita (ili neistinita) numerička jednakosti, tj. ili vrijedi za sve $x \in \mathbb{R}$ (ravnina sadrži x -os) ili ni za jedan (ravnina je paralelna s x -osi i ne sadrži ju). Analogno zaključujemo:

Propozicija 22 Ravnina jednađbe (5.7) je paralelna s osi apsisa/ordinata/aplikata točno ako je koeficijent A odnosno B odnosno C jednak 0.

Dokažimo sad sljedeću važnu i korisnu činjenicu:

Teorem 16 *Skup svih točaka prostora (x, y, z) za koje je skalarni produkt njihova radij-vektora s danim vektorom $\vec{n} = [A, B, C]^*$ konstantan je ravnina s jednadžbom (5.7) i ona je okomita na smjer vektora $\vec{n}$.*

Dokaz. Po formuli (5.6) je $[x, y, z] \cdot [A, B, C]^* = Ax + By + Cz$. Dakle, skup svih točaka za koji je taj produkt konstantan (jednak nekom D) zadovoljava jednadžbu oblika (5.7). Neka je $T_0 = (x_0, y_0, z_0)$ neka fiksna, a $T = (x, y, z)$ varijabilna točka koja zadovoljava tu jednadžbu. Tada je $\overrightarrow{T_0T} = [x - x_0, y - y_0, z - z_0]$. Ako skalarno pomnožimo taj vektor s $\vec{n}$ dobit ćemo, za svaku T , iznos 0 (provjerite!). Dakle, jednadžba $Ax + By + Cz = D$ opisuje geometrijski objekt koji se sastoji od svih točaka prostora za koje je vektor $\overrightarrow{T_0T}$ okomit na fiksni vektor $\vec{n}$, a to je ravnina u prostoru (kroz točku T_0 s vektorom normale $\vec{n}$). $\square$

Budući da je ortonormirana baza sama sebi recipročna, u Kartezijevom koordinatnom sustavu, trojka $[A, B, C]$ iz jednadžbe (5.7) određuje vektor normale na smjer ravnine, no općenito je vektor normale jednak $[A, B, C]^*$.

Ravnine možemo indirektno zadati na više načina. Jedan način zadavanja ravnine je normalom $\vec{n} = [A, B, C]^*$ i jednom točkom $T_0 = (x_0, y_0, z_0)$ u toj ravnini. U tom slučaju jednadžba ravnine je

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0.$$

Primjer 219 *Jednadžba ravnine kojoj je $[2, 3, 4]^*$ vektor normale i koja sadrži točku $(1, 1, 1)$ je $2(x - 1) + 3(y - 1) + 4(z - 1) = 0$, tj. $2x + 3y + 4z = 9$.*

Ravninu možemo zadati i jednom točkom $T_0 = (x_0, y_0, z_0)$ te s dva njoj paralelna vektora $\vec{v} = [v_1, v_2, v_3]$ i $\vec{w} = [w_1, w_2, w_3]$. U tom slučaju prvo odredimo vektor normale $\vec{n} = \vec{v} \times \vec{w}$ (primijetimo da će mu koordinate automatski biti u recipročnoj bazi, vidi odjeljak 5.2.2, tj. dobit ćemo potrebne A , B i C) i zatim primijenimo gornju formulu.

Ravnina se može zadati i trima (nekolinearnim) točkama $T_i = (x_i, y_i, z_i)$, $i = 1, 2, 3$. Jednadžbu ravnine tada dobijemo bilo rješavanjem sustava koji dobijemo ako u $Ax + By + Cz = D$ redom uvrstimo koordinate tih triju točaka, ili pak tako da slučaj svedemo na prethodni uz $\vec{v} = \overrightarrow{T_1T_2}$, $\vec{w} = \overrightarrow{T_1T_3}$ i $T_0 = T_1$. Može se koristiti i formula

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0.$$

Dvije ravnine su **paralelne (istog smjera)** ako su im vektori normala kolinearni, a kolinearni vektori zadani koordinatama u istoj (ovdje recipročnoj) bazi se prepoznaju po proporcionalnosti koordinata. Dakle, ravnine s jednadžbama $Ax + By + Cz + D = 0$ i $A'x + B'y + C'z + D' = 0$ su paralelne točno ako vrijedi:

$$A : A' = B : B' = C : C'.$$

Primjer 220 Ravnine $2x + y - z = 4$ i $-x - \frac{y}{2} + \frac{z}{2} = -2$ su paralelne.

U kristalografiji su od zimanja su samo određene, tzv. **mrežne ravnine**. Mrežne ravnine su ravnine koje prolaze kroz tri nekolinearne (i stoga beskonačno mnogo) točaka rešetke i ne prolaze ishodištem. Budući da mrežne ravnine prolaze kroz točke rešetke, a njihove su koordinate cjelobrojne, slijedi da je Za mrežnu ravninu uvijek moguće odabrati opću jednadžbu u kojoj su koeficijenti A, B, C, D cijeli brojevi (i $D \neq 0$). Sve mrežne ravnine paralelne s (istog smjera kao) $Ax + By + Cz = D$ se dijele u dvije skupine (s jedne i druge strane ishodišta)⁶ i stoga pri skaliranju jednadžbe dozvoljavamo samo množenje i dijeljenje s *prirodnim* brojevima.

Zadatak 111 Nadite jednadžbu mrežne ravnine koja sadrži točke $(0, -1, 5)$, $(-5, -4, 1)$ i $(10, 5, 0)$ rješavajući prikladni sustav od tri linearne jednadžbe s tri nepoznanice. Temeljem uočenog postupka argumentirajte zašto jednadžbu mrežne ravnine uvijek možemo odabrati tako da su u njoj svi koeficijenti cjelobrojni.

Zbog načina rasta kristala,⁷ međusobno paralelne mrežne ravnine smatraju se ekvivalentnim, tj. iznos D u jednadžbi ravnine je irelevantan, odnosno od svih oblika $Ax + By + Cz = D$ s cjelobrojnim A, B, C i D uvijek možemo kao reprezentativan za dani smjer odabrati jedan u kojem su A, B i C maksimalno skraćeni (relativno prosti), a D je bilo koji *prirodan* broj. U takvom slučaju koristimo oznake h, k i l na mjestu A, B i C i nazivamo ih Millerovim indeksima.

Definicija 33 (Millerovi indeksi) Ako je $Ax + By + Cz = D$ proizvoljna mrežna ravnina i $hx + ky + lz = D$ njoj paralelna ravnina dobivena maksimalnim skraćivanjem A, B i C , bez dijeljenja negativnim brojevima, onda se brojevi h, k i l nazivaju Millerovim indeksima promatranog smjera mrežnih ravnina i govorimo o ravninama smjera (hkl) . Pritom se eventualni negativni Millerovi indeksi umjesto u obliku $-n$ pišu kao $\bar{n}$.

Primjer 221 Millerovi indeksi smjera ravnine $10x - 15y + 5z = 27$ su $(2\bar{3}1)$.

S obzirom na već poznato, vidimo: Ako je neki Millerov indeks 0, ravnina je paralelna odgovarajućoj koordinatnoj osi. Nadalje, ravnine smjera (hkl) imaju vektor normale s koordinatama $[h, k, l]^*$.

Zadatak 112 Kakve ravnine opisuju Millerovi indeksi (110) ? A (010) ?

Općenito, **kut dviju ravnina** se definira kao kut između njihovih normala. Dakle, općenito bi za određivanje kuta među ravninama trebalo na način opisan

⁶Razlikujemo ih jer nije svaki kristal centralno simetričan.

⁷Konkretni makroskopski kristal je poliedar omeđen plohami (stranama poliedra) čije ravnine pripadaju pojedinom skupu međusobno ekvivalentnih mrežnih ravnina.

na str. 193 (uzevši u obzir da se koordinate vektora normala odnose na recipročnu bazu) izračunati

$$\cos \varphi = \frac{\vec{n} \cdot \vec{n'}}{|\vec{n}| \cdot |\vec{n'}|}.$$

Uočimo da je općenito gore potrebno računati skalarni produkt dvaju vektora iz recipročnog prostora. To se radi na isti način kao u direktnom prostoru, ali je prije toga potrebno odrediti parametre recipročne baze (vidi niže). Posebno, dvije ravnine su međusobno okomite ako su im vektori normala okomiti, tj. ako im je skalarni produkt 0. Za slučaj Kartezijevog koordinatnog sustava **uvjet okomitosti ravnina** se pojednostavljuje na formulu

$$A A' + B B' + C C' = 0.$$

Primjer 222 *Odabran je Kartezijev koordinatni sustav. Nadimo ravninu okomitu na ravnine $x + y + z = 1$ i $x - y + z = 2$ koja prolazi ishodištem. Kako znamo jednu točku, $(0, 0, 0)$, radi se o ravnini s jednadžbom oblika $Ax + By + Cz = 0$. Da bismo odredili koordinate vektora normale, iskoristimo uvjete okomitosti: $1A + 1B + 1C = 0$ (okomitost na $x + y + z = 1$) i $1A - 1B + 1C = 0$ (okomitost na $x - y + z = 2$). Tako smo dobili sustav $A + B + C = 0$, $A - B + C = 0$. Zbrajanjem jednadžbi sustava i zatim dijeljenjem s dva vidimo da mora vrijediti $C = -A$. Iz prve jednadžbe je onda $A + B - A = 0$ tj. $B = 0$. Dakle, vektori normale imaju koordinate oblika $[A, 0, -A]$ s proizvoljnim $A \neq 0$. Odaberimo jedan takav vektor, recimo s $A = 1$. Imamo vektor normale $[1, 0, -1]$ te je tražena jednadžba ravnine $x - z = 0$.*

Zadatak 113 *Izračunajte kut između ravnina $x - y - z = 0$ i $x - y$ -ravnine $z = 0$, uz uvjet da je odabrani koordinatni sustav Kartezijev.*

Ponekad je zgodno ravninu opisati parametarskim jednadžbama. **Parametarske jednadžbe ravnine u prostoru** imaju oblik

$$x = x_0 + v_1 t + w_1 s,$$

$$y = y_0 + v_2 t + w_2 s,$$

$$z = z_0 + v_3 t + w_3 s,$$

$$t, s \in \mathbb{R}.$$

Pritom je (x_0, y_0, z_0) neka fiksna točka u ravnini, a $\vec{v} = [v_1, v_2, v_3]$ i $\vec{w} = [w_1, w_2, w_3]$ su dva nekolinearna vektora paralelna ravnini. Za svaki par vrijednosti slobodnih parametara t i s dobivamo po jednu točku (x, y, z) u ravnini. Primijetite da je ravnina dvodimenzionalni objekt — zato u njenim parametarskim jednadžbama imamo dva slobodna parametra.

Primjer 223 Odredimo parametarske jednadžbe ravnine zadane općom jednadžbom

$$2x - 5y + z = 2.$$

Izrazimo li primjerice $z = 2 - 2x + 5y$ i uzmemo da su $x = t$ i $y = s$ slobodni parametri, dobijemo traženi parametarski oblik

$$x = t, \quad y = s, \quad z = 2 - 2t + 5s, \quad t, s \in \mathbb{R}.$$

Zadatak 114 Kako iz parametarskog oblika dobijemo opću jednadžbu ravnine?

Češće od parametarskog oblika jednadžbe ravnine, ali samo za ravnine koje ne sadrže ishodište, koristi jedan specijalni slučaj opće jednadžbe ravnine. To je **segmentni oblik jednadžbe ravnine**

$$\frac{x}{m} + \frac{y}{n} + \frac{z}{p} = 1. \quad (5.8)$$

Prednost tog oblika je da se iz koeficijenata direktno vide odsječci ravnine na koordinatnim osima: to su upravo brojevi m , n i p . Njihove duljine (udaljenosti ishodišta do probodišta ravnine s pojedinom koordinatnom osi) su $|m|a$, $|n|b$ i $|p|c$ (zašto?).

Primjer 224 Segmentni oblik jednadžbe ravnine zadane s $2x - 5y + 3z = 60$ dobije se dijeljenjem sa 60 (odnosno, općenito dijeljenjem s D):

$$\frac{x}{30} + \frac{y}{-12} + \frac{z}{20} = 1.$$

Odsječci te ravnine na koordinatnim osima su redom 30, -12 i 20. Ako je baza zadana s $a = 1$ m, $b = 2$ m i $c = 4$ m, $\alpha = \beta = \gamma = 90^\circ$, probodišta ravnine s koordinatnim osima su tada od ishodišta udaljena od ishodišta $30 \cdot 1$ m, $12 \cdot 2$ m i $20 \cdot 4$ m.

Segmentni oblik jednadžbe se u matematici ne koristi ako je ravnina paralelna nekoj od koordinatnih osi, no uz modifikaciju da u tom slučaju kao iznos odgovarajućeg odsjeka pišemo ∞ koristit ćemo ga i za te slučajeve zbog primjena u kristalografiji. Naime, kao alternativa Millerovom indeksima za opis smjerova mrežnih ravnina koriste se i Weissovi parametri, koji su prirodno povezani sa segmentnim oblikom jednadžbe mrežne ravnine. Jedna od ravnina smjera (hkl) je $hx + ky + lz = v$, gdje je v najmanji (pozitivni) zajednički višekratnik od h , k i l . Dijeljenjem s v dobivamo segmentni oblik jednadžbe te ravnine, $\frac{x}{m} + \frac{y}{n} + \frac{z}{p} = 1$. Ako je neki od Millerovih indeksa bio 0, kao iznos odgovarajućeg odsjeka pišemo ∞ te taj indeks ignoriramo pri određivanju v . Uzevši u obzir da su $\frac{1}{m}$, $\frac{1}{n}$ i $\frac{1}{p}$ također koordinate nekog vektora normale te ravnine, možemo i m , n , p koristiti za opis danog smjera:

Definicija 34 (Weissovi parametri) Ako je $\frac{x}{m} + \frac{y}{n} + \frac{z}{p} = 1$ segmentni oblik jednadžbe one mrežne ravnine promatranog smjera za koji su m , n i p maksimalno skraćeni cijeli brojevi, onda razmjer $m : n : p$ nazivamo Weissovim parametrima tog smjera. Ako je smjer ravnine paralelan nekoj od koordinatnih osi, odgovarajući Weissov parametar je ∞ .

Primjer 225 Ravnine smjera opisanog Millerovim indeksima $(3\bar{2}0)$ su paralelne s osi aplikata. Njihove jednadžbe su oblika $3x - 2y = D$ s prirodnim brojevima D . Ako uzmemo $D = 1$, dobili smo onu mrežnu ravninu tog smjera koja je najbliža ishodištu: $3x - 2y = 1$. Njeni odsječci na osima su $\frac{1}{3}$ i $-\frac{1}{2}$, dakle ta ravnina posjeduje probodišta s osima koja nisu točke rešetke. Ako bismo pak uzeli ravninu $3x - 2y = 6$ (6 je najmanji zajednički višekratnik od 3 i 2), njeni odsječci na osima su 2 i -3 , tj. točke rešetke. Ako dozvolimo proširenje korištenja segmentnog oblika korištenjem simbola ∞ na slučaj paralelnosti s nekom osi (ovdje z -osi) dobijemo segmentni oblik jednadžbe te ravnine, $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} + \frac{z}{\infty} = 1$ i njeni Weissovi parametri su $2a : 3b : \infty c$.

Iz primjera vidimo i: Od svih mrežnih ravnina smjera (hkl) , ravnina $hx + ky + lz = 1$ je najbliža ishodištu, ali njena probodišta s koordinatnim osima ne moraju biti točke rešetke. Ako pak trebamo jednadžbu mrežne ravnine tog smjera najbližu ishodištu koja osi siječe isključivo u točkama rešetke, onda je to $hx + ky + lz = v$.

Primjer 226 Promotrimo ravninu s jednadžbom $\frac{x}{15} + \frac{y}{10} + \frac{z}{20} = 1$. Njeni odsječci na kristalografskim osima su 15, 10, 20. Weissovi parametri njenog smjera su stoga $3a : 2b : 4c$. Millerovi indeksi njenog smjera su (463) .

5.3.2 Pravci u prostoru

Pravac u prostoru određen je svojim smjerom (tj. bilo kojim njemu paralelnim vektorom smjera) i jednom točkom. Alternativno, pravac možemo zadati kao presjek dvije neparalelne ravnine. U prvom slučaju, pravac se opisuje parametarskim jednadžbama ili tzv. kanonskim oblikom jednadžbe pravca. U drugom slučaju pravac se zadaje sustavom od dvije opće jednadžbe ravnina.

Parametarske jednadžbe pravca s vektorom smjera $\vec{s} = [u, v, w]$ koji prolazi točkom $T_0 = (x_0, y_0, z_0)$ su oblika

$$x = x_0 + u t,$$

$$y = y_0 + v t,$$

$$z = z_0 + w t,$$

$$t \in \mathbb{R}.$$

Za svaki iznos parametra t dobivamo po jednu točku tog pravca. Jedan parametar je dovoljan jer je pravac jednodimenzionalan objekt (no upravo zato za opis pravca u trodimenzionalnom prostoru trebamo više od jedne jednadžbe). Uočimo:

Propozicija 23 *Pravac je paralelan nekoj od koordinatnih osi točno ako je jedina koordinata od $\vec{s}$ koja nije jednaka nuli ona koja odgovara toj osi.*

Primjerice, pravci s vektorom smjera $[0, -3, 0]$ su paralelni s y -osi.

Zadatak 115 *Zapišite parametarske jednadžbe z -osi.*

Zadatak 116 *Kako ćete iz parametarskih jednadžbi pravca zaključiti je li pravac paralelan nekoj koordinatnoj ravnini?*

Napomena 8 *Općenito, **krivulje u prostoru** zadaju se parametarski jednadžbama oblika*

$$x = f(t), \quad y = g(t), \quad z = h(t), \quad t \in I,$$

*a **plohe u prostoru** zadane su se parametarskim jednadžbama oblika*

$$x = f(t, s), \quad y = g(t, s), \quad z = h(t, s), \quad t \in I, s \in I'$$

gdje su I i I' intervali realnih brojeva.

Umjesto točkom i vektorom smjera, pravac može biti zadan i s dvije točke. U tom slučaju mu je vektor smjera vektor koji spaja te dvije točke, a jednu od njih uzmemo kao (x_0, y_0, z_0) . Skraćeni zapis parametarskih jednadžbi pravca, koji bismo dobili tako da iz svake od tri jednadžbe izrazimo parametar t i onda ih izjednačimo zove se **kanonski oblik jednadžbi pravca u prostoru**:

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}.$$

Radi se o preglednom obliku jednadžbi pravca, no kad god je potrebno rješavati neke probleme vezane za pravac, potrebno je prvo taj oblik prevesti u parametarski oblik. Također, kako je taj oblik samo skraćeni zapis parametarskog oblika, moguće je da neki od a , b i c budu nula jer izraze u formuli ne treba shvaćati kao stvarno dijeljenje brojeva.

Pravac može biti zadan i kao presjek dvije (neparalelne) ravnine, tj. sustavom

$$Ax + By + Cz = D,$$

$$A'x + B'y + C'z = D'.$$

Iz tog oblika parametarski oblik možemo dobiti rješavanjem sustava te dvije jednadžbe. Ako je pravac presjek dvije ravnine, njegov vektor smjera je okomit na normale tih ravnina, uzevši u obzir da je recipročna baza recipročne baze direktna baza, vidimo da vektor smjera pravca zadanog gornjim sustavom možemo dobiti kao

$$\vec{s} = [A, B, C]^* \times [A', B', C']^* = \begin{vmatrix} \vec{a} & \vec{b} & \vec{c} \\ A & B & C \\ A' & B' & C' \end{vmatrix}.$$

Zadatak 117 Odredite parametarski i kanonski oblik jednadžbi pravca zadanog kao presjek ravnina $x + y + z = 1$ i $2x - y = 5$.

Dva pravca u prostoru mogu se podudarati, biti različiti i paralelni, sječi se ili biti **mimoilazni (mimosmjerni)**, tj. ne biti paralelni i ne sječi se. Dva različita pravca koja se sijeku ili su paralelni određuju jednu ravninu. Dva pravca imaju isti smjer (podudaraju se ili su paralelni) točno ako su im vektori smjera $\vec{s} = [u, v, w]$ i $\vec{s}' = [u', v', w']$ paralelni. Dakle, **uvjet paralelnosti pravaca** je

$$u : u' = v : v' = w : w'.$$

Sijeku li se dva pravca (što je slučaj i kod podudarnih) ili ne (različiti paralelni ili mimoilazni) zaključujemo rješavajući sustav koji se sastoji od njihovih parametarskih jednadžbi.

Primjer 227 Provjerimo sijeku li se pravci

$$\frac{x}{0} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-3}{2}$$

i

$$\frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-3}{1}.$$

Prvi pravac ima parametarske jednadžbe

$$x = 0, y = 2t - 1, z = 3 + 2t,$$

a drugi

$$x = 1 + s, y = s + 2, z = s + 3.$$

Slobodne parametre smo im različito označili jer se radi o dva različita pravca pa dok jedan parametar opisuje „korake šetnje” po jednom, drugi to opisuje za drugi, a ti „koraci” ne moraju biti isti. Sjecište je točka (x, y, z) koja je na oba pravca, dakle treba izjednačiti odgovarajuće koordinate i riješiti sustav:

$$0 = 1 + s \Rightarrow s = -1,$$

$$2t - 1 = s + 2 \Rightarrow t = 1,$$

$$3 + 2t = s + 3 \Rightarrow 5 = 2.$$

Kako vidimo, za ova dva pravca nije moguće naći točku koja je na oba jer je sustav kontradiktoran te se pravci ne sijeku. No, primijetimo da oni nisu paralelni: Vektor smjera prvog je $[0, 2, 2]$ i taj nije paralelan vektoru smjera drugog, $[1, 1, 1]$.

Da smo iz dvije jednadžbe uspjeli odrediti s i t koji zadovoljavaju i treću, uvrštavanje vrijednosti od t u parametarske jednadžbe prvog (ili vrijednosti parametra s u jednadžbe drugog) pravca dalo bi koordinate sjecišta tih pravaca. Tako je, primjerice, sjecište pravca $\frac{x}{0} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-3}{2}$ s pravcem $\frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-3}{1}$ točka $(0, 1, 5)$ — provjerite to sami!

Dva pravca su okomita ako imaju okomite vektore smjera, tj. **uvjet okomitosti pravaca** je

$$\vec{s} \cdot \vec{s'} = 0.$$

Taj skalarni produkt općenito računamo na način opisan na str. 193, a ako je koordinatni sustav Kartezijev uvjet se svodi na $uu' + vv' + ww' = 0$. Općenito se pak kut između pravaca definira kao kut između njihovih vektora smjera.

Primjer 228 Potrebno je naći pravac (pravce) koji prolazi kroz ishodište, okomit je na x -os i sa z -osi zatvara kut od 45° , ako su parametri koordinatnog sustava $a = 5$ cm, $b = 3$ cm, $c = 4$ cm, $\alpha = \beta = \gamma = 90^\circ$.

Budući da pravac treba prolaziti kroz ishodište, prvo znamo da su mu parametarske jednadžbe oblika $x = ut$, $y = vt$ i $z = wt$. Njegov vektor smjera $[u, v, w]$ prvo mora biti okomit na x -os, tj. na prvi vektor baze. Dakle, imamo uvjet

$$0 = [u, v, w] \cdot \vec{a} = (u\vec{a} + v\vec{b} + w\vec{c}) \cdot \vec{a} = ua^2 + v\vec{a}\vec{b} + w\vec{a}\vec{c}.$$

Zbog $\alpha = \beta = \gamma = 90^\circ$ i činjenice da je $a \neq 0$ dobijemo $u = 0$.

Sad dakle znamo da je vektor smjera našeg pravca oblika $[0, v, w] = v\vec{b} + w\vec{c}$ i tražimo takav vektor koji s $\vec{c}$ zatvara kut od 45° . Imamo stoga posljednji uvjet

$$(v\vec{b} + w\vec{c}) \cdot \vec{c} = |[0, v, w]| \cdot c \cdot \cos 45^\circ.$$

Na lijevoj strani, zbog okomitosti $\vec{b}$ i $\vec{c}$ preostaje wc^2 . Iznos $|[0, v, w]| = |v\vec{b} + w\vec{c}|$ jednak je $\sqrt{(v\vec{b} + w\vec{c}) \cdot (v\vec{b} + w\vec{c})} = \sqrt{v^2b^2 + w^2c^2}$ te se gornja jednakost svodi na

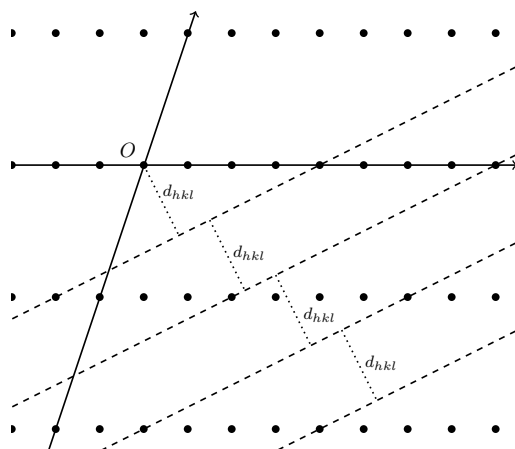
$$wc^2 = \sqrt{v^2b^2 + w^2c^2} \cdot c \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Pokratimo c (zašto to smijemo?) i kvadriramo te dobijemo

$$w^2c^2 = (v^2b^2 + w^2c^2) \frac{1}{2},$$

odnosno $w^2c^2 = v^2b^2$. Uvrstimo b i c i dobijemo $16w^2 = 9v^2$, dakle je $w = \pm \frac{3}{4}v$. Dakle, vektor smjera je ili tipa $[0, v, \frac{3}{4}v]$ ili tipa $[0, v, -\frac{3}{4}v]$, pa imamo dva rješenja (npr. za $v = 4$): Pravac s jednadžbama $x = 0$, $y = 4t$ i $z = 3t$ ili pravac s jednadžbama $x = 0$, $y = 4t$ i $z = -3t$.

Pravac s vektorom smjera $\vec{s} = [u, v, w]$ je okomit na ravninu s vektorom normale $\vec{n} = [A, B, C]^*$ ako su ti vektori paralelni, a pravac je paralelan ravnini ako mu je vektor smjera okomit na njezin vektor normale. Stoga je **uvjet okomitosti pravca na ravninu** da je $\vec{s} \times \vec{n} = \vec{0}$, što općenito nije lako izračunati jer su koordinate $\vec{s}$ dane u osnovnoj, a od $\vec{n}$ u recipročnoj bazi (kako se to radi vidjet ćemo u sljedećem odjeljku). No, u Kartezijevom koordinatnom sustavu se uvjet pojednostavljuje na proporcionalnost koordinata ta dva vektora. S druge strane, **uvjet paralelnosti**



Slika 5.9: Međumrežni razmak jednak je udaljenosti ishodišta do prve mrežne ravnine danog smjera.

pravca s ravninom je $\vec{s} \cdot \vec{n} = 0$. Zbog formule (5.6), uvjet paralelnosti pravca i ravnine iskazan je neovisno o tipu koordinatnog sustava iskazan formulom

$$uA + vB + wC = 0.$$

Ako pravac nije paralelan ravnini, on ju siječe u jednoj točki koja se zove **probodište pravca i ravnine**. Određivanje probodišta pravca i ravnine svodi se na rješavanje sustava koji se sastoji od jednadžbe(i) pravca i jednadžbe(i) ravnine. Također, kut između pravca i ravnine se definira kao kut između vektora smjera pravca i njegove ortogonalne projekcije na ravninu.

Zadatak 118 Odredite probodište pravca $\frac{x}{2} = \frac{y-1}{0} = \frac{z+2}{3}$ i ravnine $2x+3y+4z = 1$.

Mrežne ravnine odabranog smjera (hkl) pojavljuju se u jednakim razmacima: razmak ravnine $hx + ky + lz = 1$ i ravnine $hx + ky + lz = 2$ jednak je razmaku ravnine $hx + ky + lz = 2$ i ravnine $hx + ky + lz = 3$ i t.d. Označimo s d_{hkl} razmak dviju susjednih ravnina smjera (hkl) (tzv. **međumrežni razmak**), tj. udaljenost ravnine $hx + ky + lz = n$ do ravnine $hx + ky + lz = n + 1$ za bilo koji prirodan broj n . Lako je uvidjeti da je on jednak udaljenosti ishodišta O do njemu najbliže ravnine tog smjera (usp. sliku 5.9 za dvodimenzionalni analog), dakle do ravnine $hx + ky + lz = 1$.

Pogledajmo vezu međumrežnih razmaka s recipročnom bazom. Neka je h visina jedinične ćelije određene direktnom bazom $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$, npr. ako paralelogram određen s $\vec{a}$ i $\vec{b}$ gledamo kao osnovicu. Stoga je $V = ab \sin \gamma \cdot h$. S druge strane, toj osnovici paralelna ploha na jediničnoj ćeliji leži u ravnini smjera (001) najbližoj

ishodište pa je $h = d_{001}$. Dakle:

$$\frac{1}{V} |\vec{a} \times \vec{b}| = \frac{a b \sin \gamma}{V} = \frac{1}{d_{001}}.$$

No,

$$c^* = \left| \frac{1}{V} \vec{a} \times \vec{b} \right| = \frac{a b \sin \gamma}{V},$$

dakle je ujedno i

$$c^* d_{001} = 1.$$

Analogno dobivamo i druge dvije veze između iznosa vektora recipročne baze i međumrežnih razmaka:

Teorem 17

$$d_{100} = \frac{1}{a^*} = \frac{V}{b c \sin \alpha}; d_{010} = \frac{1}{b^*} = \frac{V}{a c \sin \beta}; d_{001} = \frac{1}{c^*} = \frac{V}{a b \sin \gamma}.$$

Odatle vidimo i da su jedinice „duljine” u recipročnom prostoru su recipročne jedinicama u direktnom prostoru, što je jedan od razloga naziva recipročni prostor.

Primjer 229 Neki mineral kristalizira u heksagonskom kristalnom sustavu ($a = b$, c , $\alpha = \beta = 90^\circ$, $\gamma = 120^\circ$). udući da $\vec{c}^*$ mora biti okomit na $\vec{a}$ i $\vec{b}$, a takav je i sam $\vec{c}$, zaključujemo da su za heksagonske kristale $\vec{c}^*$ i $\vec{c}$ istog smjera. Vektori $\vec{a}^*$ i $\vec{a}$ kao i $\vec{b}^*$ i $\vec{b}$ su različitih smjerova (ali svi leže u istoj ravnini). Volumen jedinične ćelije je $V = abc \sin \gamma$. Stoga je $\frac{1}{d_{100}} = |\vec{a}^*| = \frac{1}{abc \sin \gamma} bc \sin \alpha = \frac{1}{a \sin \gamma}$, dakle $d_{100} = a \frac{\sqrt{3}}{2}$. Analogno se dobije $d_{010} = b \frac{\sqrt{3}}{2}$ i $d_{001} = c$.

Formule iz prethodnog teorema su specijalni slučajevi općenitijeg teorema, poznatog kao **fundamentalni (temeljni) zakon recipročne rešetke**, kojeg ćemo dokazati u odjeljku 7.1:

Teorem 18 Ako je s $\mathcal{N}_{hkl}$ označen iznos vektora $\vec{n} = [h, k, l]^*$, onda je

$$d_{hkl} \mathcal{N}_{hkl} = 1.$$

Korolar 1 Ako je direktna baza ortogonalna ($\alpha = \beta = \gamma = 90^\circ$), vrijedi sljedeća formula za međumrežni razmak:

$$\frac{1}{d_{hkl}^2} = \frac{h^2}{a^2} + \frac{k^2}{b^2} + \frac{l^2}{c^2}. \quad (5.9)$$

Dokaz nije težak. Prema fundamentalnom zakonu recipročne rešetke imamo:

$$\frac{1}{d_{hkl} n^2} = \mathcal{N}_{hkl}^2 = \sqrt{(h\vec{a}^* + k\vec{b}^* + l\vec{c}^*) \cdot (h\vec{a}^* + k\vec{b}^* + l\vec{c}^*)}.$$

Budući da već znamo da je recipročna baza ortogonalne baze i sama ortogonalna ($\alpha^* = \beta^* = \gamma^* = 90^\circ$), posljednji izraz jednak je $\sqrt{h^2(a^*)^2 + k^2(b^*)^2 + l^2(c^*)^2}$. Nadalje, budući da je baza ortogonalna, imamo $V = a b c$ pa iz teorema 17 dobijemo da je to jednako $\frac{h^2}{a^2} + \frac{k^2}{b^2} + \frac{l^2}{c^2}$, što smo i htjeli dokazati. $\square$

Primjer 230 Neki kristal rompskog sustava ima parametre baze $a = 0,82 \text{ nm}$, $b = 0,94 \text{ nm}$ i $c = 0,75 \text{ nm}$, $\alpha = \beta = \gamma = 90^\circ$. Duljina radij-vektora točke koja u recipročnoj rešetki ima koordinate $(1, 0, \bar{2})^*$ je $\mathcal{N}_{10\bar{2}} = \frac{1}{d_{10\bar{2}}} = \sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{4}{c^2}} = 2,9 \text{ nm}^{-1}$.

Generalizacija dokaza fundamentalnog zakona recipročne rešetke na slučajeve kad vektor normale ima proizvoljne koordinate, a ne samo cjelobrojne, dovodi do opće formule za udaljenost točke do ravnine (koja se definira kao udaljenost točke do njezine ortogonalne projekcije na ravninu, tj. probodišta pravca okomitog na ravninu koji prolazi kroz točku s ravinom): Udaljenost točke $T(x_0, y_0, z_0)$ do ravnine Π s jednadžbom $Ax + By + Cz + D = 0$ je

$$d(T, \Pi) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 - D|}{|\vec{n}|}.$$

Ako je koordinatni sustav Kartezijev, formula se pojednostavljuje na

$$d(T, \Pi) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 - D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Zadatak 119 Ako je koordinatni sustav Kartezijev, odredite udaljenost točke $(1, 2, 3)$ do ravnine $\sqrt{3}x - \pi y = e$ ako je $a = 8$, $b = \sqrt{10}$, $c = e\pi$, $\alpha = \beta = \gamma = 90^\circ$.

Primjer 231 Za neki kristal rompskog sustava ($\alpha = \beta = \gamma = 90^\circ$, $a \neq b \neq c \neq a$) utvrđeno je da razmak susjednih (111) ravnina iznosi $d_{111} = 654 \text{ pm}$. Ako je $a = 820 \text{ pm}$, odredite razmak između susjednih (211) ravnina! Iz $\frac{1}{d_{211}^2} = \frac{4}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}$ i $\frac{1}{d_{111}^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}$ oduzimanjem dobijemo $\frac{1}{d_{211}^2} = \frac{1}{d_{111}^2} + \frac{3}{a^2}$ pa je $d_{211} \approx 383 \text{ pm}$.

Primjer 232 Neka je tetragonska kristalografska baza zadana parametrima $a = b = 4,820 \text{ Å}$, $c = 6,288 \text{ Å}$, $\alpha = \beta = \gamma = 90^\circ$. Tad međumrežni razmak ravnina smjera (211) dobivamo iz

$$\frac{1}{d_{211}^2} = \frac{4}{a^2} + \frac{1}{a^2} + \frac{1}{c^2}.$$

Uvrštavanje zadanih podataka daje $d_{211} = 2,039 \text{ Å}$.

Za kraj, izvedimo formule za parametre recipročne baze za proizvoljnu direktnu bazu, tj. za zadane $a, b, c, \alpha, \beta, \gamma$ i V .⁸ Iznosi vektora recipročne baze se onda mogu dobiti iz teorema 17:

$$a^* = \frac{1}{V} \sqrt{b^2 c^2 - (b c \cos \alpha)^2} = \frac{b c \sin \alpha}{V}, \quad (5.10)$$

$$b^* = \frac{a c \sin \beta}{V}, \quad (5.11)$$

$$c^* = \frac{a b \sin \gamma}{V}. \quad (5.12)$$

⁸ V se uvijek može izračunati iz parametara baze. Opću formulu izvest ćemo u odjeljku 7.1, a za Matematiku 1 zadaci koji uključuju računanje V uvijek će imati bar dva od kutova α, β, γ jednake pravom kutu.

Za kutove, postupak je sljedeći:

$$\cos \alpha^* = \frac{\vec{b}^* \cdot \vec{c}^*}{b^* c^*} = \frac{V^2}{a^2 b c \sin \beta \sin \gamma} \frac{1}{V^2} (\vec{c} \times \vec{a}) \cdot (\vec{a} \times \vec{b}).$$

Koristeći Lagrangeovu formulu (5.5) imamo:

$$\cos \alpha^* = \frac{\cos \beta \cos \gamma - \cos \alpha}{\sin \beta \sin \gamma}, \quad (5.13)$$

i analogno

$$\cos \beta^* = \frac{\cos \alpha \cos \gamma - \cos \beta}{\sin \alpha \sin \gamma}, \quad (5.14)$$

$$\cos \gamma^* = \frac{\cos \alpha \cos \beta - \cos \gamma}{\sin \alpha \sin \beta}. \quad (5.15)$$

Zadatak 120 Izračunajte iznos vektora $\vec{v} = [-1, 2, -5]^*$ ako je $a = b = 10$ cm, $c = 5$ cm, $\alpha = \beta = 90^\circ$, $\gamma = 30^\circ$.

Poglavlje 6

Sustavi linearnih jednadžbi

6.1 Linearne jednadžbe

S linearnim jednadžbama s jednom nepoznanicom susrećemo se već u osnovnoškolskom obrazovanju. Za ponavljanje tog gradiva dajemo jedan zadatak.

Zadatak 121 *Zbog inflacije, cijena kruha je u posljednjih pet godina porasla za 58 %. Ako je mali bijeli kruh prije pet godina koštao 6,50 kuna te ako znamo da je pri zamjeni kuna u eure fiksni tečaj konverzije bio 7,53450 kuna za 1 euro, kolika je cijena malog bijelog kruha danas?*

Definicija 35 (Linearna jednadžba s jednom nepoznanicom) *Linearna jednadžba s jednom nepoznanicom x je jednadžba koja se može zapisati u obliku*

$$ax = b,$$

gdje su a i b zadani brojevi. Rješenje takve jednadžbe je svaki broj čije uvrštavanje u jednadžbu na mjesto nepoznanice x daje istinitu numeričku jednakost.

Primjer 233 *Jednadžba $8x - 3 \cdot (x - 4) = -2x - 6$ je linearna jer ju možemo svesti na oblik $ax = b$:*

$$8x - 3 \cdot (x - 4) = -2x - 6,$$

$$8x - 3x + 12 = -2x - 6,$$

$$7x = -18.$$

Rješenje te jednadžbe je $-\frac{18}{7}$.

Rješenje linearne jednadžbe $ax = b$ je nultočka afine funkcije $f(x) = ax - b$ (vidi odjeljak 2.4.1), tj. sjecište grafa te funkcije s osi apscisa. Moguća su tri slučaja:

- Jednadžba ima jedinstveno rješenje (ako $a \neq 0$): Pravac $y = ax - b$ siječe os apscisa u nultočki $x = \frac{b}{a}$, koja je rješenje naše jednadžbe.

- Jednadžba nema rješenja (ako $a = 0$ i $b \neq 0$): Pravac $y = ax - b$ je paralelan s osi apscisa i različit od nje.
- Jednadžba ima beskonačno mnogo rješenja (ako $a = b = 0$): Pravac $y = ax - b$ se podudara s osi apscisa pa je svaki realan broj x rješenje jednadžbe.

Dakle, rješenja linearne jednadžbe s jednom nepoznanicom možemo interpretirati kao točke na brojevnom pravcu, tj. kao 0-dimenzionalne objekte na 1-dimenzionalnom objektu.

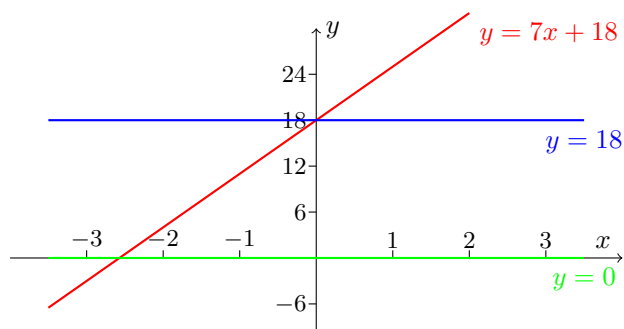
Primjer 234 *Jednadžbe*

$$8x - 3(x - 4) = -2x - 6,$$

$$8x - 3(x - 4) = 5x - 6,$$

$$8x - 3(x - 4) = 5x + 12$$

su redom primjeri za tri navedena slučaja. Grafovi odgovarajućih afinih funkcija za koje te jednadžbe predstavljaju traženje nultočki prikazani su slikom 6.1.



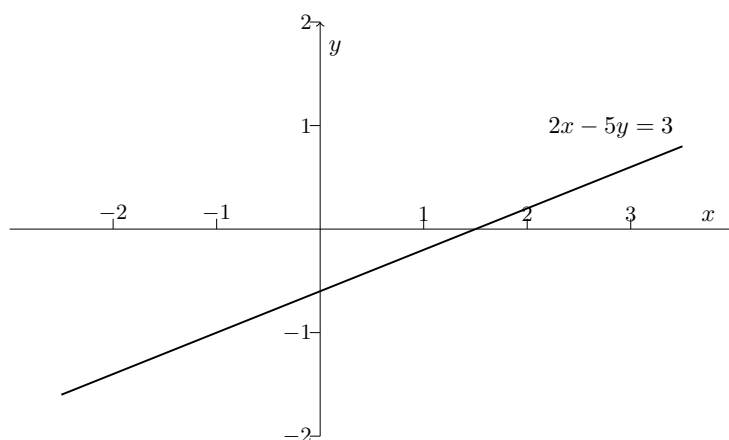
Slika 6.1: Linearne jednadžbe s jednom nepoznanicom mogu imati jedinstveno rješenje (crveni graf), nemati rješenja (plavi graf) ili imati beskonačno mnogo rješenja (zeleni graf).

U ovom poglavlju primarno nas zanimaju linearne jednadžbe s više od jedne nepoznanice.

Definicija 36 (Linearna jednadžba s dvije nepoznanice) Linearna jednadžba s dvije nepoznanice x i y je jednadžba koja se može zapisati u obliku

$$ax + by = c,$$

gdje su a , b i c zadani brojevi. Broj c zove se slobodnim članom, a a i b su koeficijenti jednadžbe. Rješenje takve jednadžbe je svaki uređeni par brojeva čije uvrštavanje u jednadžbu na mjesto brojeva x i y daje istinitu numeričku jednakost.

Slika 6.2: Pravac $2x - 5y = 3$.

Primjer 235 Jednadžba $2x - 5y = 3$ je linearna jednadžba s dvije nepoznanice. Uređeni par $(4, 1)$ je jedno njeno rješenje, dok par $(1, 4)$ nije rješenje te jednadžbe. Važno je o rješenju govoriti kao uređenom paru, ne samo jer su nam za rješenje potrebna dva broja (par), nego i jer je bitno koji je prvi, a koji je drugi.

Geometrijski, linearnu jednadžbu s dvije nepoznanice (zapravo, skup njenih rješenja) možemo interpretirati kao pravac u ravnini (tj. kao njegovu implicitnu jednadžbu).¹ Pravac se sastoji od beskonačno mnogo točaka te tako vidimo da svaka linearna jednadžba s dvije nepoznanice ima beskonačno mnogo rješenja (parova brojeva koji ju zadovoljavaju, tj. koordinata točaka na pravcu koji ju predstavlja).

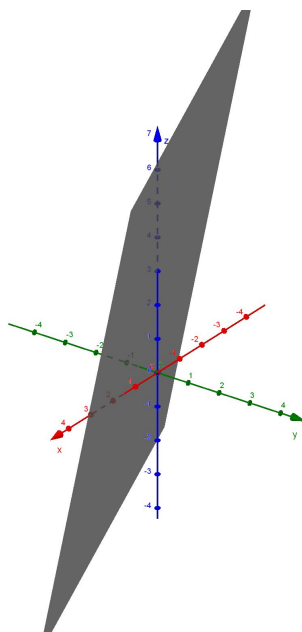
Primjer 236 Jednadžbi $2x - 5y = 3$ odgovara pravac kojem je to implicitna jednadžba, tj. pravac kroz točke $(0, -\frac{3}{5})$ i $(\frac{3}{2}, 0)$ (vidi sliku 6.2). Uz te dvije točke i svaka druga točka tog pravca, primjerice $(9, 3)$, je rješenje te jednadžbe.

Definicija 37 (Linearna jednadžba s tri nepoznanice) Linearna jednadžba s tri nepoznanice x, y, z je jednadžba koja se može zapisati u obliku

$$ax + by + cz = d$$

gdje su a, b, c i d zadani brojevi. Broj d zove se slobodnim članom, a a, b i c su koeficijenti jednadžbe. Rješenje takve jednadžbe je svaka uređena trojka brojeva čije uvrštavanje u jednadžbu na mjesto nepoznanica x, y i z daje istinitu numeričku jednakost.

¹Ako je $a = 0$, pravac $ax + by = c$ je paralelan s x -osi, ako je $b = 0$ paralelan je s y -osi.



Slika 6.3: Ravnina $2x - 5y + z = 3$ (slika izrađena programom Geogebra).

Primjer 237 *Jednadžba $2x - 5y + z = 3$ je linearna jednadžba s tri nepoznanice. Trojka $(4, 1, 0)$ je jedno njeno rješenje, a trojka $(1, 2, 1)$ nije rješenje te jednadžbe.*

Geometrijski, skup rješenja linearne jednadžbe s tri nepoznanice možemo interpretirati kao ravninu u prostoru (vidi odjeljak 5.3.1, odnosno sliku 6.3). Posebno, svaka linearna jednadžba s tri nepoznanice ima beskonačno mnogo rješenja.

Prethodne definicije možemo generalizirati:

Definicija 38 (Linearna jednadžba s n nepoznanica) *Linearna jednadžba s n nepoznanica $x_1, x_2, \dots, x_n$ je jednadžba koja se može zapisati u obliku*

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = b$$

gdje su $a_1, a_2, \dots, a_n, b$ zadani brojevi. Broj b zove se slobodnim članom, a $a_1, a_2, \dots, a_n$ su koeficijenti jednadžbe. Rješenje takve jednadžbe je svaka uređena n -torka brojeva čije uvrštavanje u jednadžbu na mjesto nepoznanica daje istinitu numeričku jednakost.

Primjer 238 *Jednadžba $2x_1 + x_2 - 5x_3 - 4x_4 + x_5 = 0$ je linearna jednadžba s pet nepoznanica x_1, x_2, x_3, x_4 i x_5 . Uređene petorke $(1, 1, 1, 0, 2)$ i $(0, 0, 0, 0, 0)$ su dva od njenih beskonačno mnogo rješenja, a petorka $(1, 2, 1, 2, 1)$ nije rješenje te jednadžbe.*

Zadatak 122 *Koliko najviše nepoznanica može imati linearna jednačba koja ima jedinstveno rješenje?*

Možemo ukratko reći da je linearna jednačba jednačba kojom iskazujemo da zbroj nepoznanica pomnoženih s nekim konkretnim brojevima (koeficijentima) ima zadanu vrijednost (jednaku slobodnom članu). Uočimo da nije ispravno reći da je slobodni član „onaj broj desno od jednakosti u jednačbi”. Naime, iako je u sređenom obliku uobičajeno slobodni član pisati desno od znaka jednakosti, bolje je naglasiti njegov smisao: To je konstantni član jednačbe, tj. konstantni član koji nije pomnožen ni s kojom nepoznanicom. Linearna jednačba naziva se **homogenom** ako joj je slobodni član jednak nuli.

6.2 Sustavi linearnih jednačbi

Primjer 239 *Vektor $\vec{s}$ u bazi $\mathcal{B} = (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ prostora V^3 ima koordinate $[-1, 0, 5]$. Vektori $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ definirani su s $\vec{u} = \vec{a} - \vec{b}$, $\vec{v} = \vec{b} - \vec{c}$, $\vec{w} = 2\vec{c} - \vec{a}$. Dokažimo da je $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ također baza prostora V^3 i odredimo koordinate vektora $\vec{s}$ u toj bazi.*

Iz zadanoga vidimo da je $\vec{u} = [1, -1, 0]$, $\vec{v} = [0, 1, -1]$ i $\vec{w} = [-1, 0, 2]$ pa je njihov mješoviti produkt (vidi str. 200) jednak $V \neq 0$, dakle se radi o bazi $\mathcal{B}' = (\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$. U njoj će vektor $\vec{s}$ imati koordinate $[x, y, z]'$, tj.

$$[-1, 0, 5] = \vec{s} = x\vec{u} + y\vec{v} + z\vec{w} = [x, -x, 0] + [0, y, -y] + [-z, 0, 2z] = [x-z, y-x, 2z-y],$$

dakle tražene koordinate dobijemo kao zajedničko rješenje sljedećih triju linearnih jednačbi:

$$x - z = -1, \quad y - x = 0, \quad 2z - y = 5.$$

Ukoliko kao u primjeru 239 tražimo zajednička rješenja više jednačbi, govorimo o sustavima jednačbi. Jednačbe u sustavima ne moraju biti linearne, ali se samo s takvim sustavima bavimo u ovom poglavlju.

Definicija 39 (Sustav linearnih jednačbi) *Sustav linearnih jednačbi je skup od konačno mnogo linearnih jednačbi s istim nepoznanicama za koje tražimo zajedničko rješenje. Rješenje sustava je svaka uređena n -torka brojeva koja zadovoljava sve jednačbe sustava. Ako sustav ima m jednačbi s n nepoznanica, zovemo ga $m \times n$ -sustavom. Sustavi linearnih jednačbi u kojima su sve jednačbe homogene nazivaju se homogenim sustavima, a ostali se zovu nehomogenim.*

Primjer 240 *Sustav u primjeru 239 je primjer nehomogenog 3×3 -sustava linearnih jednačbi.*

Primjer 241 *Primjer (homogenog) 2×3 -sustava je sustav*

$$x + y + z = 0,$$

$$-2x + y = 0.$$

Jedno njegovo rješenje je npr. trojka $(0, 0, 0)$ jer zadovoljava obje jednadžbe, a trojka $(1, -1, 0)$ nije rješenje sustava jer zadovoljava samo prvu jednadžbu.

Lako je, kao u prethodnom primjeru, zaključiti:

Propozicija 24 Homogeni sustavi linearnih jednadžbi uvijek imaju bar jedno rješenje (tzv. trivijalno rješenje u kojem sve nepoznanice imaju vrijednost nula).

Sustavi linearnih jednadžbi pojavljuju se u raznolikim kontekstima.

Važna primjena sustava linearnih jednadžbi je preračunavanje koordinata vektora iz jedne baze u drugu. Kao u primjeru 239 vrijedi i općenito: Ako neki vektor $\vec{r} \in V^3$ ima poznate koordinate $[x, y, z]$ s obzirom na jednu bazu $\mathcal{B} = (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$, a želimo odrediti njegove koordinate u nekoj drugoj bazi $\mathcal{B}' = (\vec{a}', \vec{b}', \vec{c}')$, gdje su poznate koordinate vektora nove baze obzirom na staru ($\vec{a}' = [a_1, a_2, a_3]$, $\vec{b}' = [b_1, b_2, b_3]$ i $\vec{c}' = [c_1, c_2, c_3]$), onda nove koordinate $[x', y', z']$ od $\vec{r}$ dobivamo kao rješenje 3×3 -sustava

$$a_1 x' + b_1 y' + c_1 z' = x,$$

$$a_2 x' + b_2 y' + c_2 z' = y,$$

$$a_3 x' + b_3 y' + c_3 z' = z.$$

Zadatak 123 Kako biste postavili sustav za preračunavanje koordinata u V^2 ?

Sustavi linearnih jednadžbi često se pojavljuju i u stehiometriji.

Primjer 242 U vodi je otopljeno 0,6190 g smjese natrijeva klorida i kalijeva klorida te je dodan srebrov nitrat. Istaložilo je 1,3211 g srebrova klorida. Treba odrediti masene udjele natrijeva i kalijeva klorida u polaznoj smjesi.

Molarna masa NaCl je 58,45 g mol⁻¹, molarna masa KCl je 74,56 g mol⁻¹, a molarna masa AgCl je 143,34 g mol⁻¹. Neka je x masa NaCl u smjesi, a y masa KCl u smjesi. Iz uvjeta zadatka proizlazi da je (x, y) rješenje sustava od dvije linearne jednadžbe s dvije nepoznanice:

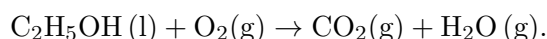
$$x + y = 0,6190 \text{ g}$$

$$\frac{143,34}{58,45}x + \frac{143,34}{74,56}y = 1,3211 \text{ g}.$$

Zadatak 124 Postavite sustav linearnih jednadžbi za sljedeći problem: Neka smjesa se sastoji od tri sastojka, od kojih svaki sadrži dušik i sumpor. Analitičkim metodama je utvrđeno da je maseni udio dušika u smjesi 4,38%, a sumpora 1,06%. Nadalje, utvrđeno je da je maseni udio dušika u prvom sastojku 8,20%, maseni udio sumpora u drugom sastojku 2,40%, a treći sastojak smjese sadrži 2,80% dušika i 1,00% sumpora. Odredite masene udjele sastojaka u smjesi.

Izjednačavanje kemijskih jednadžbi također se može interpretirati kao rješavanje sustava linearnih jednadžbi. Kemijske jednadžbe se zapisuju u obliku $R \rightarrow P$ (reaktanti $\rightarrow$ produkti). Uz svaki reaktant i produkt zapisuje se broj zvan stehiometrijski koeficijent. Primjerice, jednadžba $\text{CH}_4(\text{g}) + 2\text{O}_2(\text{g}) \rightarrow \text{CO}_2(\text{g}) + 2\text{H}_2\text{O}(\text{g})$ nam, među ostalim, kaže da pri gorenju metana za svaki 1 mol metana i 2 mola kisika nastaju po 1 mol ugljikova dioksida i 2 mola vode. Po dogovoru, u računima (osobito u fizikalnoj kemiji), stehiometrijski koeficijenti reaktanata uzimaju se s negativnim, a stehiometrijski koeficijenti produkata s pozitivnim predznakom. Tako su u navedenom primjeru stehiometrijski koeficijenti metana, kisika, ugljikovog dioksida i vode redom -1 , -2 , 1 i 2 . Ukoliko samo znamo reaktante i produkte, jednadžba reakcije nije izjednačena dok ne odredimo stehiometrijske koeficijente svih reaktanata i produkata. Pritom mora vrijediti da za svaku vrstu atoma ili iona broj jedinki s lijeve strane jednadžbe mora biti jednak broju jedinki s desne strane.

Primjer 243 *Recimo da promatramo gorenje etanola $\text{C}_2\text{H}_5\text{OH}$ (l), dakle reakciju etanola s kisikom. Poznato je da u toj reakciji nastaju ugljikov dioksid i voda (vodena para). Potrebno je stoga odrediti stehiometrijske koeficijente u jednadžbi*

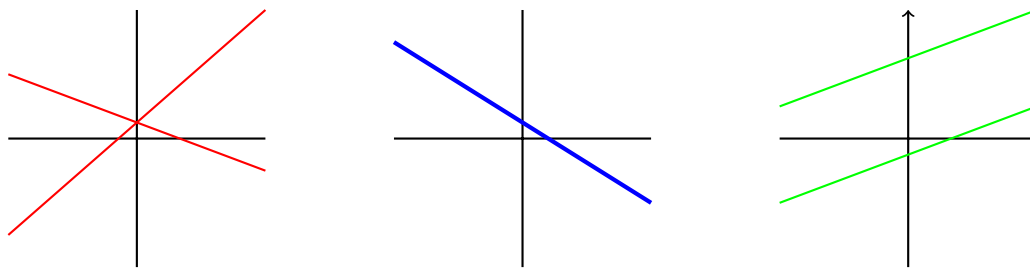


Za svaki od elemenata $E \in \{\text{C}, \text{H}, \text{O}\}$ u reakciji postavlja se po jedna linearna jednadžba u kojoj se odgovarajući nepoznati stehiometrijski koeficijent x_i množi s brojem E-ova u odgovarajućem reaktantu/produktu:

$$\begin{array}{lcl} \text{C} : & 2x_1 + x_3 & = 0 \\ \text{H} : & 6x_1 + 2x_4 & = 0 \\ \text{O} : & x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 & = 0 \end{array}.$$

Prva jednadžba izražava da je ukupna promjena broja atoma ugljika u reakciji jednaka nuli — nisu niti nestali niti nastali novi atomi ugljika. Pritom je $2x_1 < 0$ jer x_1 opisuje broj jedinki etanola koje ulaze u reakciju i u njoj se troše pa je $x_1 < 0$, dok je $x_3 > 0$ jer opisuje koliko jedinku ugljikova dioksida je nastalo u reakciji. Slično druga i treća jednadžba izražavaju da se broj atoma vodika odnosno kisika ne mijenja.

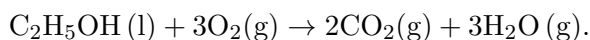
Kao u prethodnom primjeru lako je uočiti da je problem izjednačavanja kemijskih jednadžbi uvijek ekvivalentan homogenom sustav linearnih jednadžbi u kojem su nepoznanice stehiometrijski koeficijenti, a koeficijenti brojevi jedinki promatranih vrsta (atoma ili iona). Broj jednadžbi sustava jednak je broju elemenata odnosno iona koji se pojavljuju u reakciji. Broj nepoznanica jednak je broju sudionika reakcije. Za takve sustave znamo da imaju bar trivijano rješenje: Svaku zamišljenu reakciju je moguće uravnotežiti na trivijalan način, tako da nijednog sudionika nema $\odot$. Obično je pri izjednačavanju kemijskih jednadžbi cilj odrediti točno jedno netrivialno rješenje s cjelobrojnim iznosima nepoznanica, i to obično ono koje



Slika 6.4: 2×2 -sustavi s jedinstvenim rješenjem (lijevo), s beskonačno mnogo rješenja (sredina) i bez rješenja (desno).

ima svojstvo da su x_i -ovi relativno prosti (tj. po apsolutnoj vrijednosti najmanji mogući).

Primjer 244 Sustav za izjednačavanje reakcije gorenja etanola (primjer 243) ima beskonačno mnogo rješenja (x_1, x_2, x_3, x_4) , a to su sve četvorke za koje je $x_1 = -\frac{1}{3}t$, $x_2 = -t$, $x_3 = \frac{2}{3}t$, $x_4 = t$, $t \in \mathbb{R}$. Da bi svi x_i bili cijeli brojevi i $x_3, x_4 > 0$, potrebno je da je $t \in \mathbb{N}$ višekratnik od 3. Najmanji takav je $t = 3$ koji daje rješenje $x_1 = -1$, $x_2 = -3$, $x_3 = 2$, $x_4 = 3$. Izjednačena jednadžba je stoga



Vratimo se na matematiku sustava linearnih jednadžbi. Kao što smo rekli, jedna linearna jednadžba s 2 nepoznanice predstavlja pravac u ravnini, dakle dvije takve jednadžbe predstavljaju dva pravca u ravnini, tri jednadžbe s 2 nepoznanice predstavljaju tri pravca u ravnini itd. Rješavanjem sustava tražimo zajednička rješenja jednadžbi, dakle u slučaju sustava linearnih jednadžbi s 2 nepoznanice tražimo zajedničke točke svih tih pravaca. Iz geometrije ravnine jasno je da imamo tri mogućnosti:

- Svi pravci se sijeku u jednoj točki — sustav ima jedinstveno rješenje (uređeni par koordinata te točke).
- Svi pravci se podudaraju — sustav ima beskonačno rješenja (sve točke tog jednog pravca su rješenja).
- U svim ostalim slučajevima sustav nema rješenja.

Navedene tri situacije su za 2×2 -sustave ilustrirane slikom 6.2. S druge strane, jedna linearna jednadžba s 3 nepoznanice predstavlja ravninu u prostoru, dakle n takvih jednadžbi predstavlja n ravnina. Kako tražimo zajednička rješenja jednadžbi, slijedi da u slučaju sustava linearnih jednadžbi s 3 nepoznanice tražimo zajedničke točke ravnina u prostoru. Ako imamo dvije ravnine, rješenja ili nema (ako su paralelne i različite) ili ih ima beskonačno (ako se podudaraju ili sijeku duž jednog

pravca). Ako imamo bar tri ravnine, moguće je i da se te ravnine sijeku u jednoj jedinoj točki pa sustav ima samo jedno rješenje. No opet, kao u slučaju sustava s 2 nepoznanice, lako iz geometrije zaključimo da čim imamo više od jedne zajedničke točke ravnina, mora ih biti beskonačno mnogo.

Ovo što smo ovdje geometrijski argumentirali za sustave linearnih jednadžbi s 2 ili 3 nepoznanice vrijedi i općenito (a u odjeljku 7.1 ćemo to i dokazati):

Teorem 19 (Teorem o broju rješenja sustava linearnih jednadžbi) *Svaki sustav linearnih jednadžbi ili nema rješenja ili ima jedinstveno rješenje ili ima beskonačno mnogo rješenja.*

Ostaje još vidjeti kako računski naći rješenja sustava linearnih jednadžbi.

6.3 Metoda supstitucije

Metoda supstitucije može se koristiti i za rješavanje drugačijih sustava jednadžbi, a ne samo sustava linearnih jednadžbi. Ona se sastoji u tome da iz jedne jednadžbe izrazimo jednu od nepoznanica i uvrstimo dobiveni izraz na mjesto te nepoznanice u svim ostalim jednadžbama. Time smo smanjili broj jednadžbi i broj nepoznanica za po jedan. Nastavljamo s daljnjim supstitucijama sve dok ne dođemo do samo jedne jednadžbe (ili pak kontradikcije). Metoda je vrlo zgodna za male sustave, ali za sustave s više od 3 nepoznanice postaje nepregledna te su prikladnije druge metode.

Primjer 245 *Riješimo sustav*

$$x + y = 7,$$

$$675x + 300y = 2850$$

metodom supstitucije. Iz prve jednadžbe je $y = 7 - x$ pa uvrštavanjem u drugu jednadžbu dobivamo redom

$$675x + 300(7 - x) = 2850, \quad 375x = 750, \quad x = 2.$$

Budući da je sustav imao dvije nepoznanice, rješenje mora biti uređen par. Drugi dio para odredimo iz formule supstitucije tj.

$$y = 7 - x = 7 - 2 = 5.$$

Dakle, rješenje sustava je uređeni par $(2, 5)$.

Primjer 246 *Riješimo sustav iz primjera 242 metodom supstitucije. Iz prve jednadžbe je $y = 0,6190g - x$ pa uvrštavanje u drugu jednadžbu daje*

$$2,452x + 1,922(0,6190g - x) = 1,3211g$$

iz čega dobijemo

$$x = 0,2479 \text{ g}$$

te

$$y = 0,3711 \text{ g.}$$

Budući da su bili traženi maseni udjeli, dobivamo

$$w(\text{NaCl}) = \frac{0,2479}{0,6190} = 0,4005 = 40,05 \%$$

i

$$w(\text{KCl}) = \frac{0,3711}{0,6190} = 0,5995 = 59,95 \%.$$

Primjer 247 Sustav

$$x + 2y = -4,$$

$$2x + 4y = 0$$

rješavamo metodom supstitucije. Iz prve jednadžbe je $x = -4 - 2y$ što daje

$$2(-4 - 2y) + 4y = 0,$$

tj. $-8 = 0$. Slijedi da sustav nema rješenja.

Primjer 248 Sustav

$$4x + 2y = 6,$$

$$-8x - 4y = -12$$

rješavamo metodom supstitucije. Iz prve jednadžbe je $y = 3 - 2x$ što daje

$$-8x - 4(3 - 2x) = -12$$

tj. $-12 = -12$. Ta jednakost sigurno vrijedi, dakle je druga jednadžba bila suvišna. Preostaje nam samo jednadžba $y = 3 - 2x$, dakle sustav ima beskonačno mnogo rješenja i ona su svi uređeni parovi oblika $(x, 3 - 2x)$ s proizvoljnim $x \in \mathbb{R}$.

Zadatak 125 Metodom supstitucije riješite sustav iz primjera 239.

6.4 Gaußova metoda eliminacija

Gaußova metoda eliminacija sastoji se u postepenom poništavanju (eliminiranju) većine koeficijenata sustava linearnih jednadžbi koristeći određene operacije zvane elementarnim transformacijama. Budući da se nepoznanice tokom rješavanja sustava ne mijenjaju, sam postupak možemo učiniti preglednijim ako ga izvodimo tablično, tj. tako da pišemo samo tablicu koeficijenata i slobodnih članova, a pamtimo koji koeficijenti idu uz koje nepoznanice. Takve tablice zvat ćemo matricama sustava linearnih jednadžbi. Uvodimo sljedeće oznake:

- Broj jednadžbi u sustavu označavamo s m , a broj nepoznanica s n .
- Koeficijent uz nepoznanicu x_j u i -toj po redu jednadžbi označavamo s a_{ij} .
- Slobodni član u i -toj po redu jednadžbi označavamo s b_i .

Definicija 40 (Matrica sustava linearnih jednadžbi) *Matrica sustava*

$$\begin{array}{cccccc}
 a_{11}x_1 & +a_{12}x_2 & +a_{13}x_3 & +\cdots & +a_{1n}x_n & = & b_1 \\
 a_{21}x_1 & +a_{22}x_2 & +a_{23}x_3 & +\cdots & +a_{2n}x_n & = & b_2 \\
 a_{31}x_1 & +a_{32}x_2 & +a_{33}x_3 & +\cdots & +a_{3n}x_n & = & b_3 \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & = & \vdots \\
 a_{m1}x_1 & +a_{m2}x_2 & +a_{m3}x_3 & +\cdots & +a_{mn}x_n & = & b_m
 \end{array}$$

je tablica oblika²

$$\left(\begin{array}{ccccc|c}
 a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\
 a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\
 a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} & b_3 \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
 a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} & b_m
 \end{array} \right).$$

Primijetimo:

- Retci matrice sustava odgovaraju pojedinim jednadžbama.
- Stupci matrice sustava (osim zadnjeg) odgovaraju nepoznanicama.
- Zadnji stupac matrice sustava odgovara slobodnim članovima.
- Okomita crta odvaja stupac slobodnih članova od ostalih i predstavlja niz znakova jednakosti.
- Ako je sustav tipa $m \times n$, njegova matrica ima m redaka i $n + 1$ stupac.

Primjer 249 *Matrica*

$$\left(\begin{array}{ccc|c}
 1 & -1 & 2 & 2 \\
 0 & 1 & -3 & 1 \\
 8 & -24 & 10 & 0 \\
 2 & 1 & 1 & 7
 \end{array} \right)$$

predstavlja sustav s 4 jednadžbe i 3 nepoznanice:

$$\begin{array}{rrcr}
 x_1 & -x_2 & +2x_3 & = & 2, \\
 & x_2 & -3x_3 & = & 1, \\
 8x_1 & -24x_2 & +10x_3 & = & 0, \\
 2x_1 & +x_2 & +x_3 & = & 7.
 \end{array}$$

²Formalno, matrica sustava je samo dio ovako definirane matrice lijevo od okomite crte, a matrica koju ovdje nazivamo matricom sustava pravilno se zove proširenom matricom sustava.

Cilj Gaußove metode eliminacija je sustav, odnosno njegovu matricu, svesti na oblik iz kojeg je lako očitati rješenje. Budući da je najlakše očitati rješenje sustava oblika

$$\begin{aligned}x_1 &= X_1, \\x_2 &= X_2, \\&\vdots \\x_n &= X_n\end{aligned}$$

kojemu odgovara matrica sustava

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & X_1 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & X_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & X_n \end{array} \right),$$

zaključujemo da nam je u Gaußovoj metodi eliminacija cilj dobiti matricu što sličniju posljednjoj (u dijelu lijevo od okomite crte na dijagonali, tj. pozicijama kojima su jednaki redni broj retka i stupca, želimo dobiti jedinice, a iznad i ispod dijagonale nule), a da pritom naravno odgovarajući sustav ima ista rješenja kao polazni. Očigledno pritom ne možemo primjenjivati sasvim proizvoljne operacije. Dozvoljene operacije koje se smiju primijeniti u Gaußovoj metodi eliminacija zovu se elementarne transformacije po retcima:

Definicija 41 (Elementarne transformacije po retcima) *Postoje tri elementarne transformacije po retcima:*

- *Zamjena dva retka (član po član), tj. dozvoljeno je mijenjati poredak jednadžbi, što očito ne mijenja rješenja sustava.*
- *Množenje proizvoljnog retka brojem koji nije nula (množenje svih članova retka tim brojem), tj. dozvoljeno je bilo koju jednadžbu pomnožiti bilo kojim nenul-brojem.³*
- *Pribrajanje jednog retka drugom (član po član), tj. dozvoljeno je bilo koju jednadžbu pribrojiti bilo kojoj drugoj.⁴*

Tim operacijama se doduše mijenja matrica sustava, ali ne mijenjamo skup rješenja. Između uzastopnih matrica koje dobivamo u Gaußovoj metodi eliminacija pišemo znak $\sim$ (i govorimo o ekvivalentnim matricama sustava). Uočimo i da druga

³Ako su neka dva broja jednaka ($L = D$), onda su jednaki i njihovi umnošci s nekim trećim brojem ($La = Da$), dakle se ni ovom operacijom ne mijenjaju rješenja sustava.

⁴Ako su dvaput po dva broja jednaka ($L_1 = D_1$ i $L_2 = D_2$), onda su jednaki i njihovi zbrojevi ($L_1 + L_2 = D_1 + D_2$), pa ni ova operacija ne mijenja rješenja sustava.

elementarna transformacija dozvoljava i dijeljenje retka, tj. jednadžbe, bilo kojim brojem $\alpha \neq 0$, jer je to isto što i množenje brojem $\beta = \frac{1}{\alpha} \neq 0$, te da kombinacija druge i treće elementarne transformacije dozvoljava oduzimanje jednog retka od drugog (jer je to isto kao i množenje jednog retka s -1 , pribrajanje drugom, te dijeljenj prvospomenutog retka s -1). Štoviše, isti argument s proizvoljnim nenul-brojem umjesto s -1 povlači da možemo bilo kojem retku pribrojiti proizvoljni višekratnik bilo kojeg drugog retka.

Primjer 250 *Neka je dana sljedeća matrica sustava:*

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -3 & 1 \\ 8 & -24 & 10 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 7 \end{array} \right).$$

Mogli bismo primjerice prvo zamijeniti treći i četvrti redak: Prva elementarna transformacija izvedena kao zamjena trećeg i četvrtog retka matrice sustava može izgledati primjerice ovako:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -3 & 1 \\ 8 & -24 & 10 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 7 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -3 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 7 \\ 8 & -24 & 10 & 0 \end{array} \right).$$

Sad bismo mogli zadnji redak podijeliti s 2:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -3 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 7 \\ 8 & -24 & 10 & 0 \end{array} \right) \cdot \frac{1}{2} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -3 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 7 \\ 4 & -12 & 5 & 0 \end{array} \right).$$

U posljednjoj matrici možemo primjerice drugi redak pribrojiti prvom:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -3 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 7 \\ 4 & -12 & 5 & 0 \end{array} \right) + \text{drugi redak} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -3 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 7 \\ 4 & -12 & 5 & 0 \end{array} \right).$$

Primjer 251 *Umjesto u tri koraka:*

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 3 & -12 & 5 & 0 \end{array} \right) &\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & 2 & 2 \\ -3 & -3 & -3 & 3 \\ 3 & -12 & 5 & 0 \end{array} \right) \sim \\ &\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & 2 & 2 \\ -3 & -3 & -3 & 3 \\ 0 & -15 & 2 & 3 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & -15 & 2 & 3 \end{array} \right) \end{aligned}$$

istu stvar možemo objediniti u jedan korak:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 3 & -12 & 5 & 0 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & -15 & 2 & 3 \end{array} \right)$$

U Gaußovoj metodi eliminacija sustav s jedinstvenim rješenjem prepoznat ćemo po tome što ćemo matricu sustava elementarnim transformacijama uspjeti svesti na oblik

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & X_1 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & X_2 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & X_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & X_n \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{array} \right).$$

Nulretci (retci u kojima su samo nule) ne moraju postojati. Oni odgovaraju suvišnim jednadžbama, tj. jednakostima $0 = 0$, te ih u „ručnom” rješavanju sustava brišemo. U navedenom slučaju rješenje polaznog sustava je n -torka $(x_1, x_2, \dots, x_n) = (X_1, X_2, \dots, X_n)$.

Napomena 9 Cramerov sustav je sustav s jedinstvenim rješenjem koji je tipa $n \times n$ (dakle, ima onoliko jednadžbi koliko ima nepoznanica).

Primjer 252 Elementarnim transformacijama se sustav

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -3 & 1 \\ 8 & -24 & 10 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 7 \end{array} \right)$$

može svesti na oblik

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

te taj sustav ima samo jedno rješenje: $(3, 1, 0)$ tj. $x_1 = 3$, $x_2 = 1$, $x_3 = 0$.

Primijetimo da sustavi koji imaju manje jednadžbi nego nepoznanica ne mogu imati jedinstveno rješenje — ili ga uopće nemaju ili ih je beskonačno mnogo.

Sustave bez rješenja uvijek prepoznavamo po tome što se u nekom trenutku rješavanja pojavi kontradiktorna jednadžba, tj. jednakost oblika $\spadesuit = 0$ gdje je $\spadesuit$

broj različit od nule. U Gaußovoj metodi eliminacija to je vidljivo tako što se u nekom trenutku postupka kao neki od redaka matrice sustava dobije redak oblika

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & \dots & 0 & \spadesuit \end{array} \right)$$

s $\spadesuit \neq 0$. Taj redak odgovara kontradiktornoj jednadžbi

$$0x_1 + 0x_2 + \dots + 0x_n = \spadesuit.$$

Homogeni sustavi uvijek imaju bar trivijalno rješenje $(0, \dots, 0)$ te je ova situacija nemoguća za homogene sustave.

Primjer 253 *Ako na matricu sustava*

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & -3 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 3 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & -7 & 7 & 3 & 5 \end{array} \right)$$

primijenimo elementarne transformacije (prvi redak pomnožimo s 2 i zatim prvi i drugi oduzmemo od trećeg), dobit ćemo

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & 0 & -6 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{array} \right)$$

te sustav nema rješenja.

U svim ostalim slučajevima imat ćemo beskonačno mnogo rješenja. Najčešće ćemo u takvim slučajevima elementarnim transformacijama matricu sustava uspjeti svesti na oblik

$$\left(\begin{array}{ccccccccc|c} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & \heartsuit & \dots & \heartsuit & X_1 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & \heartsuit & \dots & \heartsuit & X_2 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & \heartsuit & \dots & \heartsuit & X_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & \heartsuit & \dots & \heartsuit & X_k \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{array} \right). \quad (6.1)$$

Pritom su sa $\heartsuit$ i $X_1, \dots, X_k$ označeni bilo kakvi brojevi. Broj k (broj jedinica na dijagonali koji nam je na kraju preostao) je manji od broja nepoznanica n (tj. imamo bar jedan stupac sa $\heartsuit$ — takve stupce zvat ćemo „umetnutim” stupcima). Naravno, k ne može biti veći od broja jednadžbi polaznog sustava niti od broja nepoznanica. I ovdje nulretci ne moraju postojati (odnosno mogu se brisati tijekom „ručnog” računa). U ovom slučaju rješenje očitavamo na sljedeći način: Nepoznanicama koje odgovaraju umetnutim stupcima pridružujemo različite slobodne

parametre — te varijable mogu poprimiti proizvoljne vrijednosti. Vrijednosti nepoznanica koje odgovaraju stupcima lijevo od umetnutih (prvih k nepoznanica) ovise o tim parametrima, a tu ovisnost zapisujemo tako da konačnu matricu ponovno prevedemo natrag u oblik jednadžbi.

Primjer 254 *Sustav*

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -5 & 6 & 7 \end{array} \right)$$

se elementarnim transformacijama može svesti na oblik

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -3 & 2 & 1 \end{array} \right).$$

Treći i četvrti stupac su „umetnuti” pa vrijednosti x_3 i x_4 mogu biti proizvoljne. Pišemo: $x_3 = t \in \mathbb{R}$, $x_4 = s \in \mathbb{R}$. Završna matrica odgovara sustavu

$$x_1 - x_3 + 2x_4 = 3,$$

$$x_2 - 3x_3 + 4x_4 = 1$$

te je rješenje sustava

$$x_1 = 3 + t - 2s, \quad x_2 = 1 + 3t - 2s, \quad x_3 = t \in \mathbb{R}, \quad x_4 = s \in \mathbb{R}.$$

Takoder, može se dogoditi da kod sustava s beskonačno mnogo rješenja jedan od stupaca koji gore u matrici (6.1) na dijagonali imaju broj 1 bude nulstupac. U tom slučaju odgovarajuća nepoznanica ima proizvoljan iznos (u svim jednadžbama je pomnožena s 0) pa je jednaka zasebnom slobodnom parametru. Općenito, ako u nekom trenutku primjene elementarnih transformacija dobijemo stupac u kojemu su samo nule (a da to nije zadnji stupac slobodnih članova), sustav sigurno nema jedinstveno rješenje (no mogu biti bez rješenja), ali u tom slučaju postupak nastavljamo kao da tog stupca nema.

Iako je provođenje elementarnih transformacija po retcima načelno dozvoljeno u bilo kojem redoslijedu, postoji algoritam koji daje redoslijed koji je za većinu sustava najefikasniji. Taj algoritam zove se⁵ Gaußova metoda eliminacija. Nadalje, iako time mijenjamo broj jednadžbi sustava, ali ne i njegova rješenja, dozvolit ćemo brisanje nulredaka iz matrice sustava. Algoritam Gaußove metode eliminacija je sljedeći (na početku je $i = 1$):

⁵Ovdje opisani algoritam zapravo se zove Gauß-Jordanova metoda eliminacija. Razlika između Gaußove i Gauß-Jordanove metode je u tome što se u prvoj Gaußovoj metodi poništavaju samo elementi ispod dijagonale, dok se u Gauß-Jordanovoj metodi poništavaju elementi ispod i iznad dijagonale matrice sustava.

1. Uzmi sljedeći po redu (i -ti) stupac. Ako je to nulstupac, povećaj i za 1 pa gledaj odgovarajući stupac. Ako bi trebalo uzeti stupac slobodnih članova, STOP — gotovo je.
2. Ako je na dijagonalnoj poziciji (i, i) nula, zamjenom i -tog retka s nekim retkom *ispod* njega dovedi broj različit od nule na tu poziciju. Ako to ne možeš postići, STOP — gotovo je.
3. Pomoću broja na poziciji (i, i) (pivotni element) poništi ostatak stupca: Svakom retku u kojem iznad/ispod pivotnog elementa nije 0, pribroji odgovarajući višekratnik i -tog retka.
4. Ukoliko si dobio kontradiktornu jednadžbu, STOP — sustav nema rješenja.
5. Ukoliko si dobio nulredak, možeš ga pobrisati iz matrice sustava.
6. Povećaj i za 1 i vrati se na prvi korak.

Ukoliko je postupak stao iz razloga navedenih u prva dva koraka, sve retke u kojima je na poziciji (i, i) broj različit od 1 podijelimo tim brojem i na kraju očitamo rješenje.

Zadatak 126 *Riješite sustav iz primjera 239 Gaußovom metodom eliminacija. Može li se kod sustava za preračunavanje koordinata iz jedne baze u drugu dobiti sustav s beskonačno mnogo ili bez rješenja i što nam to govori?*

Poglavlje 7

Vektorski prostori, linearni operatori i matrice

7.1 Vektorski prostori

U dosadašnjem gradicu susreli smo zbrajanje i množenje različitih objekata:

- zbrajanje i množenje realnih odnosno kompleksnih brojeva,
- zbrajanje realnih funkcija sa zajedničkom domenom i množenje realnih funkcija brojevima,
- zbrajanje geometrijskih vektora i množenje geometrijskih vektora skalarima.

Vidjeli smo i znamo: zbroj dva realna odnosno kompleksna broja je realan odnosno kompleksan broj, zbroj dvije realne funkcije sa zajedničkom domenom D je realna funkcija s domenom D , a zbroj dva geometrijska vektora u ravnini odnosno prostoru je geometrijski vektor u ravnini odnosno prostoru. U svim tim slučajevima zbrajanje ima uobičajena svojstva. Također, sva spomenuta množenja imaju svojstva uobičajena za množenje. U prva dva slučaja umnožak je istovrsan objektima koje množimo. No, u podsljednjem od tri spomenuta slučaja ne množimo dva istovrsna objekta, nego geometrijski vektor i rezultat množenja je geometrijski vektor. Uočimo i da smo kod množenja kompleksnih brojeva mogli odlučiti množiti ih samo s realnim brojevima, a rezultat bi i dalje bio kompleksan broj.

Možemo reći: Ako je $s \in V$ označen bilo koji od skupova $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, V^2 , V^3 , $V^2(O)$, $V^3(O)$ ili $\mathbb{R}^D$ (skup svih realnih funkcija s domenom D), zbroj po dva elementa iz V je element istog skupa V , a također je i umnožak bilo kojeg elementa iz V s realnim brojem ponovno element skupa V . Pritom za sve $u, v, w \in V$ i sve realne

brojeve α i β vrijedi

$$\begin{array}{ll}
 v + w \in V & \alpha v \in V \\
 v + w = w + v & 1 \cdot v = v \\
 (v + w) + u = v + (w + u) & (\alpha\beta)v = \alpha(\beta v) \\
 v + \mathbf{0} = \mathbf{0} + v = v & v + (-v) = (-v) + v = \mathbf{0} \\
 \alpha(v + w) = \alpha v + \alpha w & (\alpha + \beta)v = \alpha v + \beta v
 \end{array} \tag{7.1}$$

(pri čemu je $\mathbf{0}$ ovisno o konkretnom V broj nula, nul-funkcija ili nulvektor). Općenito definiramo:

Definicija 42 (Realni vektorski prostor) *Ako je V neprazan skup takav da su definirane dvije operacije $+$ i $\cdot$ (zbrajanje vektora i množenje vektora skalarom) za koje vrijede svojstva (7.1), pri čemu je $\mathbf{0}$ jedan element iz V (nulvektor), kažemo da je V realan vektorski prostor, a njegovi elementi nazivaju se vektori.*

Primjer 255 *Skupovi V^2 , V^3 , $V^2(O)$ i $V^3(O)$ su primjeri realnih vektorskih prostora.*

Ukoliko bismo umjesto množenja s realnim brojevima u gornjoj definiciji koristili množenje s kompleksnim brojevima, dobili bismo definiciju **kompleksnog vektorskog prostora**.

Dakle, **vektori** se općenito definiraju kao elementi vektorskih prostora. Vektorski prostori su skupovi čije elemente znamo međusobno zbrajati i množiti ili s realnim ili s kompleksnim brojevima ostajući unutar promatranog skupa. Brojevi s kojima množimo vektore nazivaju se **skalari**. Uočimo da s izuzetkom vektorskih prostora geometrijskih vektora u drugim vektorskim prostorima vektori nisu opisani iznosom, smjerom i orijentacijom. Zato se kao oznake vektora, izuzev geometrijskih, koriste mala slova latinske abecede (u , v , w , ...) bez strelica, a kao oznake skalara se onda radi lakšeg razlikovanja koriste slova grčke abecede.

Primjer 256 *Uzmimo $V = \mathbb{C}$. Zbroj dva kompleksna broja je kompleksan broj. Ako kao skalare gledamo kompleksne brojeve, očito je da vrijede definicijska svojstva te je tako skup $\mathbb{C}$ postaje primjer kompleksnog vektorskog prostora. Ako pak kompleksne brojeve odlučimo množiti samo realnim brojevima, $\mathbb{C}$ postaje primjer realnog vektorskog prostora.*

Ako nije izričito drugačije rečeno, svuda dalje ćemo podrazumijevati da su vektorski prostori realni, dakle da su skalari realni brojevi.

Zadatak 127 *Dokažite da u svakom vektorskom prostoru V vrijedi $0 \cdot v = \mathbf{0}$ i $-v = (-1) \cdot v$ za sve $v \in V$.*

Uočimo da je u svakom vektorskom prostoru moguće i oduzimati vektore, ako definiramo

$$v - w := v + (-w).$$

Uz vektorske prostore geometrijskih vektora posebno važni primjeri realnih vektorskih prostora su skupovi $\mathbb{R}^n$, koji se sastoje od svih uređenih n -torki realnih brojeva,¹ ako zbrajanje i množenje skalarom definiramo s

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) + (y_1, y_2, \dots, y_n) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n),$$

$$\alpha(x_1, x_2, \dots, x_n) = (\alpha x_1, \alpha x_2, \dots, \alpha x_n).$$

Primjer 257 Promotrimo skup $\mathbb{R}^4$. Njegovi elementi su uređene četvorke (x, y, z, w) , gdje su x, y, z, w realni brojevi. Primjer zbrajanja u vektorskom prostoru $\mathbb{R}^4$ je $(1, 2, 3, 4) + (0, \pi, e, -1) = (1, 2 + \pi, 3 + e, 3)$, a primjer množenja skalarom je $4 \cdot (0, 1, -1, 2) = (0, 4, -4, 8)$.

Primjer 258 Sa $C(I)$ označava se skup svih neprekidnih funkcija $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, gdje je I neki interval. Zbrajanje dviju funkcija iz $C(I)$ i množenje skalarom, tj. realnim brojem, definirano je kao i za bilo koje realne funkcije s istom domenom:

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x),$$

$$(\alpha \cdot f)(x) = \alpha \cdot f(x).$$

Kao što znamo, zbroj dvije neprekidne funkcije je neprekidna funkcija, a nije teško vidjeti ni da je umnožak neprekidne funkcije sa skalarom također neprekidna funkcija. Dakle, ako su $f, g \in C(I)$ i $\alpha \in \mathbb{R}$, onda je $f + g, \alpha f \in C(I)$, odnosno $C(I)$ je vektorski prostor.

Konkretno, neka je $I = \mathbb{R}$, tj. gledamo vektorski prostor $C(\mathbb{R})$. Primjeri vektora u tom prostoru su funkcije $\sin$ i $\exp$. Funkcija $\ln$ nije primjer vektora u tom prostoru jer joj domena nije $\mathbb{R}$ ($\ln$ uopće nije element promatranog skupa), a funkcija sgn nije element vektorskog prostora $C(\mathbb{R})$ jer nije neprekidna.

Zadatak 128 Objasnite zašto je skup svih derivabilnih realnih funkcija s domenom $\langle -1, 1 \rangle$ vektorski prostor. Je li funkcija apsolutne vrijednosti vektor u tom vektorskom prostoru? A funkcija $\log$?

Po definiciji svaki vektorski prostor sadrži nulvektor. Vektorski prostor koji sadrži samo nulvektor, dakle skup $\{\mathbf{0}\}$ gledan kao vektorski prostor, zove se trivijalni prostor. Ako vektorski prostor nije trivijalan, onda on sadrži bar jedan vektor $v \neq \mathbf{0}$. Ako taj v množimo redom sa svim (realnim ili kompleksnim, već prema tome je li prostor realan ili kompleksan) skalarima, dobivat ćemo različite vektore. Naime, ako bi bilo $\alpha v = \beta v$, onda je prema svojstvima (7.1) $(\alpha - \beta)v = \mathbf{0}$. Budući da $v \neq \mathbf{0}$ to znači da mora biti $\alpha = \beta$. Budući da skalara ima beskonač no mnogo različitih, zaključujemo:

¹Ako je A skup i n prirodan broj, onda A^n označava skup svih uređenih n -torki elemenata iz A .

Propozicija 25 *Svaki netrivialan vektorski prostor sadrži beskonačno mnogo vektora.*

Kao što smo istaknuli, prostori geometrijskih vektora primjer su (realnih) vektorskih prostora. U poglavlju 5.1 vidjeli smo da ako su $\vec{a}$ i $\vec{b}$ baza za V^2 ili $V^2(O)$, onda se svaki vektor iz V^2 može zapisati kao $x\vec{a} + y\vec{b}$ za jedinstveno određene (realne) skalare x i y . Analogno s tri vektora baze vrijedi za prostore V^3 i $V^3(O)$. Izrazi poput $x\vec{a} + y\vec{b}$ općenito se nazivaju linearnim kombinacijama.

Definicija 43 (Linearna kombinacija) *Linearna kombinacija jednog ili više vektora iz danog vektorskog prostora je zbroj tih vektora pomnoženih s nekim skalarima (što je ponovno vektor promatranog vektorskog prostora).*

Jednočlane linearne kombinacije su jednostavno skalarni višekratnici nekog vektora v , tj. vektori αv .

Primjer 259 *Linearne kombinacije vektora $(1, 2, 3, 4)$ i $(0, 1, 0, 1)$ iz $\mathbb{R}^4$ su oblika*

$$\alpha \cdot (1, 2, 3, 4) + \beta \cdot (0, 1, 0, 1) = (\alpha, 2\alpha + \beta, 3\alpha, 4\alpha + \beta).$$

Primjer 260 *Polinomi se mogu definirati kao linearne kombinacije monoma (u prostoru $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$), ako sad pod monomom pravilno matematički podrazumijevamo funkcije oblika $f(x) = x^n$ s prirodnim brojem n .²*

Primjer 261 *Kompleksne brojeve možemo definirati kao linearne kombinacije brojeva 1 i i s realnim skalarima.*

Napomena 10 *Uz određena dodefiniranja, koja nećemo ovdje razrađivati, za operacije koje se provode pri izjednačavanju redoks-reakcija preko polujednadžbi oksidacije i redukcije može se reći da se računaju određene linearne kombinacije polujednadžbi oksidacije i redukcije.*

Slično, Hessov zakon možemo formulirati i ovako: Ako se neka reakcija može zapisati kao linearna kombinacija drugih reakcija, onda je reakcijski gradijent bilo koje ekstenzivne veličine stanja (primjerice, reakcijska entalpija) jednak linearnoj kombinaciji reakcijskih gradijenata te iste veličine pojedinih reakcija, i to s istim koeficijentima: Ako je reakciju R moguće zapisati kao $\sum_i \alpha_i^\circ CR_i$, onda je $\Delta_r Y = \sum_i \alpha_i \Delta_{r,i} Y$ (primjerice, $Y = H$).

Primjer 262 *Linearna jednadžba s n nepoznanica može se sad definirati kao jednadžba u kojoj zahtijevamo da linearna kombinacija danih koeficijenata ima zadani iznos (u vektorskom prostoru $\mathbb{R}$).*

²U prvom dijelu skripte smo radi jednostavnosti pod monomima podrazumijevali ovakve funkcije pomnožene proizvoljnom konstantom.

Posebno važni primjeri vektorskih prostora pojavljuju se vezano uz sustave linearnih jednadžbi.

Primjer 263 Promotrimo homogeni sustav

$$\begin{aligned}x + y + z &= 0, \\5x - y + 2z &= 0.\end{aligned}$$

Njegova rješenja su uređene trojke koje zadovoljavaju obje jednadžbe, dakle je skup rješenja tog sustava podskup H skupa $\mathbb{R}^3$.

Rješavanjem sustava vidimo da je H skup svih uređenih trojki oblika $(x, y, z) = (t, t, -2t)$ za $t \in \mathbb{R}$. Zbroj dva rješenja $(t, t, -2t)$ i $(t', t', -2t')$ ima oblik $(t, t, -2t) + (t', t', -2t') = (t + t', t + t', -2(t + t'))$, dakle je i zbroj dva rješenja rješenje istog sustava. Slično je za $(t, t, -2t) \in H$ također i $\alpha(t, t, -2t) = (\alpha t, \alpha t, -2(\alpha t)) \in H$. Dakle, H je vektorski prostor.

U slučajevima poput gornjeg govorimo o potprostorima: Ako je S podskup vektorskog prostora V te ako S ima svojstvo da su sve linearne kombinacije elemenata iz S elementi iz S (S je „zatvoren na linearne kombinacije“), kažemo da je S **potprostor** od V (i pišemo $S \leq V$). Drugim riječima, podskup S vektorskog prostora V je potprostor od V ako je i sam vektorski prostor s obzirom na iste operacije množenja skalarom i zbrajanja koje su definirane na V . Ekvivalentno, možemo reći da je $W \subseteq V$ potprostor od V ako je svaka linearna kombinacija svakih dvaju vektora iz W također u W (ako $v, w \in W$, onda je i $\alpha v + \beta w$ za sve skalare α i β). Tako je u primjeru 263 zapravo pokazano da je skup H potprostor od $\mathbb{R}^3$. Slično kao u tom primjeru pokaže se da općenito vrijedi (dokaz ćemo dati na str. 267 koristeći pregledniji, matricni, zapis):

Teorem 20 Skup svih rješenja homogenog sustava linearnih jednadžbi s n nepoznanica je potprostor od $\mathbb{R}^n$.

Zadatak 129 Pokažite da je skup svih rješenja diferencijalne jednadžbe $y' + a(x)y = 0$ (tzv. homogena linearna diferencijalna jednadžba prvog reda) potprostor skupa $C^1(I)$, gdje je $a \in C(I)$.

Zadatak 130 Ako je $(\vec{a}, \vec{b})$ baza za V^2 , je li $\{\vec{a}, \vec{b}\}$ potprostor od V^2 ?

Svaki vektorski prostor V ima dva očigledna (trivijalna) potprostora. To su on sam ($V \leq V$) i nul-prostor $\{\mathbf{0}\} \leq V$. Svi ostali potprostori nazivaju se pravim potprostorima.

Primjer 264 Neka je $\vec{a}$ fiksirani odabrani vektor iz V^3 . Tada je $\{x\vec{a} : x \in \mathbb{R}\}$ pravi potprostor od V^3 . Slično, ako su $\vec{a}$ i $\vec{b}$ dva fiksna vektora iz V^3 , onda je $\{x\vec{a} + y\vec{b} : x, y \in \mathbb{R}\}$ pravi potprostor od V^3 .

Primjer 265 Vektorski prostor svih polinoma i $C^1(\mathbb{R})$ je pravi potprostor od $C(\mathbb{R})$ (oznaka $C^1(I)$ predstavlja skup svih funkcija $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ koje posjeduju neprekidnu derivaciju),³ a $C(\mathbb{R})$ je pravi potprostor od $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.

³Funkcije iz skupa $C^1(I)$ nazivaju se i glatkim realnim funkcijama (s domenom I).

Zadatak 131 *Nadite jedan pravi potprostor vektorskog prostora $\mathbb{C}$. Je li $S = \{x + iy : x, y > 0\}$ (prvi kvadrant kompleksne ravnine) potprostor od $\mathbb{C}$?*

Podsjetimo se: U poglavlju 5.1 (propozicija 17) vidjeli smo da su dva geometrijska vektora $\vec{v}$ i $\vec{w}$ kolinearna točno onda, ako se svaki od njih može zapisati kao (jednočlana) linearna kombinacija drugog, tj. ako i samo ako je $\vec{w} = x \vec{v}$ za neki skalar x . Slično, tri geometrijska vektora su komplanarna točno ako se svaki od njih može zapisati kao linearna kombinacija druga dva: $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = 0$ ako i samo ako je $\vec{w} = x \vec{u} + y \vec{v}$ za neke skalare x i y .

Zadatak 132 *Dokažite da su dva odnosno tri geometrijska vektora kolinearna odnosno komplanarna ako i samo ako postoji njihova linearna kombinacija jednaka nulvektoru takva da u toj linearnoj kombinaciji nisu svi skalari jednaki nuli.*

Kolinearnost i komplanarnost geometrijskih vektora osnovni su primjeri općenitijeg odnosa „linearne zavisnosti“.

Definicija 44 (Linearna (ne)zavisnost) *Konačan skup S vektora u nekom vektorskom prostoru V je linearno zavisna⁴ ako se (bar) jedan od vektora iz S može zapisati kao linearna kombinacija ostalih vektora iz S . U suprotnom kažemo da je S linearno nezavisna skup.*

Sad lako vidimo da je svaki skup vektora koji sadrži nulvektor linearno zavisna. Naime, ako gledamo skup $\{\mathbf{0}, v, w, \dots\}$, odmah vidimo da se jedan od tih vektora, nulvektor, može zapisati kao linearna kombinacija ostalih: $\mathbf{0} = 0 \cdot v + 0 \cdot w + \dots$. Nadalje, svaki jednočlan skup $\{v\}$ s $v \neq \mathbf{0}$ je linearno nezavisna.

Primjer 266 *Vektori $v = (1, 2, 3, 4)$ i $w = (i, 2i, 3i, 4i)$ su linearno nezavisni u $\mathbb{C}^4$ (kao realnom prostoru) jer je $v \neq \alpha v$ za sve realne α , ali vektori w i $u = (-i, -2i, -3i, -4i)$ su linearno zavisni.*

Primjer 267 *Svake dvije eksponencijalne funkcije s različitim bazama a i b su linearno nezavisne. Ako bi one bile linearno zavisne, moralo bi vrijediti*

$$a^x = c \cdot b^x$$

za sve $x \in \mathbb{R}$ i neki realan broj c . No, gornja jednakost je ekvivalentna s $(a/b)^x = c$, tj. eksponencijalna funkcija s bazom $a/b \neq 1$ bi bila konstantna funkcija, što je nemoguće.

Iz perspektive korištenja baza (odnosno koordinata), kolinearnost i komplanarnost su bila nepoželjna svojstva, sad njihovu ulogu preuzima linearna zavisnost.

⁴Standardnija i ekvivalentna matematička definicija linearne zavisnosti je da postoji linearna kombinacija vektora iz S jednaka nulvektoru u kojoj je bar jedan od skalar različit od 0.

Definicija 45 (Dimenzija i baza) Najveći broj elemenata kojeg u danom vektorskom prostoru V može sadržavati neki linearno nezavisan skup vektora zove se dimenzijom prostora (oznaka $\dim V$). Baza prostora je svaki linearno nezavisan skup vektora koji ima onoliko elemenata kolika je dimenzija prostora.

Ako je dimenzija konačna (prirodan broj), govorimo o konačnodimenzionalnom vektorskom prostoru, a inače o beskonačnodimenzionalnom vektorskom prostoru. Ako nije drugačije rečeno, u nastavku su svi vektorski prostori ne samo realni, nego i konačnodimenzionalni. Za konačnodimenzionalne vektorske prostore podrazumijevamo da su im baze ne samo podskupovi, nego uređene. Primjerice, ako je prostor dimenzije 4 i $\{a, b, c, d\}$ njegova baza, gledamo ju kao uređenu četvorku $\mathcal{B} = (a, b, c, d)$.

Zadatak 133 Ako je vektorski prostor dimenzije 5, znači li to da se on sastoji od pet vektora?

Zadatak 134 Ako je $S \subseteq V$ i $\dim V = 8$, a S sadrži 10 vektora, može li S biti linearno nezavisan?

Zadatak 135 Dokazite: Ako je $W \leq V$, onda je $\dim W \leq \dim V$.

Smisao dimenzije vektorskog prostora je da je to najmanji broj vektora potreban da kao njihove linearne kombinacije možemo zapisati sve vektore tog vektorskog prostora, odnosno, osnovno svojstvo svake baze prostora je da se svaki vektor može prikazati kao linearna kombinacija vektora baze, i to na jedinstven način:

Teorem 21 $\mathcal{B} = (f_1, f_2, \dots, f_n)$ je baza za V ako i samo ako za svaki $v \in V$ postoje jedinstveni skalari $x_1, x_2, \dots, x_n$ takvi da je $v = x_1 f_1 + x_2 f_2 + \dots + x_n f_n$.

U slučaju kao u teoremu 21 kažemo da je v prikazan u bazi $\mathcal{B}$, a koeficijenti $x_1, x_2, \dots, x_n$ zovu se **koordinate vektora s obzirom na bazu $\mathcal{B}$** . Ako je jasno na koju bazu se odnose koordinate, pišemo $v = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, a ako je potrebno naglasiti na koju se bazu odnose koordinate pišemo $v = (x_1, x_2, \dots, x_n)_{\mathcal{B}}$.

Primjer 268 Vektorski prostor $\mathbb{C}$ je dvodimenzionalan. Naime, svaki $z \in \mathbb{C}$ je oblika $z = x + yi = x \cdot 1 + y \cdot i$ s $x, y \in \mathbb{R}$. Prema teoremu 21 je $\mathcal{B} = (1, i)$ jedna baza za realni prostor $\mathbb{C}$, dakle je taj prostor dvodimenzionalan, a uz ovu bazu $\mathcal{B}$ su koordinate od $z \in \mathbb{C}$ točno realni i imaginarni dio od z . Budući da je takav zapis od z najprirodniji, bazu $(1, i)$ nazivamo i kanonskom bazom za realni vektorski prostor $\mathbb{C}$.

Ako bismo $\mathbb{C}$ gledali kao kompleksan vektorski prostor, on je jednodimenzionalan jer se svaki $z \in \mathbb{C}$ može jednoznačno zapisati kao $z \cdot 1$, tj. u tom slučaju je najjednostavnija moguća baza za $\mathbb{C}$ baza $\mathcal{B} = (1)$.

Primjer 269 U primjeru 263 vidjeli smo da je $H = \{(t, t, -2t) : t \in \mathbb{R}\}$ i po teoremu 20 znamo da je $H \leq \mathbb{R}^3$. Budući da je svaki $v \in H$ oblika $v = t(1, 1, -2)$ s $t \in \mathbb{R}$, prema teoremu 21 zaključujemo da je $\mathcal{B} = ((1, 1, -2))$ baza za H , a za svaki $v \in H$ je t njegova koordinata u toj bazi. Primjerice, $v = (-5, -5, 10) \in H$ u bazi $\mathcal{B}$ ima koordinatu $v = (-5)_{\mathcal{B}}$.

Zadatak 136 Odredite dimenziju i jednu bazu realnog vektorskog prostora $\mathbb{C}^2$.

Teorem 22 Realni vektorski prostori $\mathbb{R}^n$ su n -dimenzionalni realni vektorski prostori.

Dokaz. Dokazat ćemo to za slučaj $n = 4$, a dokaz se lako poopći na proizvoljni $n \in \mathbb{N}$. Uzmimo sljedeća četiri vektora iz $\mathbb{R}^4$: $e_1 = (1, 0, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0, 0)$, $e_3 = (0, 0, 1, 0)$ i $e_4 = (0, 0, 0, 1)$. Budući da je svaki $v = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4$ oblika $x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3 + x_4 e_4$ i ni za koje druge realne brojeve na mjestima x_1, x_2, x_3, x_4 nećemo dobiti isti v , zaključujemo da je $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ jedna baza za $\mathbb{R}^4$ i stoga je $\dim \mathbb{R}^4 = 4$. $\square$

Baze za $\mathbb{R}^n$ koje se kao u dokazu gornjeg teorema sastoje od vektora $e_1, \dots, e_n$ kojima su sve koordinate jednake 0 osim po jedne (za vektor e_i njegove i -te koordinate) koja je jednaka 1 zovu se kanonske baze za $\mathbb{R}^n$. Koordinate n -torke $(x_1, \dots, x_n)$ s obzirom na kanonsku bazu su točno $(x_1, \dots, x_n)$, odnosno kanonske baze od $\mathbb{R}^n$ rezultiraju „najprirodnijim“ koordinatama za vektore.

Primjer 270 Dani su vektori $a = (2, -1, 0, 1)$, $b = (1, 2, 3, 4)$, $c = (1, 1, 1, 0)$ i $d = (0, 1, 0, 0)$ iz $\mathbb{R}^4$. Neka je $v = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ proizvoljan vektor u $\mathbb{R}^4$. Možemo li ga zapisati kao linearnu kombinaciju od a, b, c i d ? Ako da, je li takav zapis jednoznačan, tj. je li takav zapis moguć samo s jednom kombinacijom skalara?

Neka je

$$\alpha a + \beta b + \gamma c + \delta d = (x_1, x_2, x_3, x_4).$$

Ako na desnoj strani uvrstimo a, b, c i d te izračunamo izraz u skladu s računskim operacijama u $\mathbb{R}^4$, vidimo da smo dobili sustav linearnih jednadžbi (s nepoznanicama $\alpha, \beta, \gamma, \delta$)

$$2\alpha + \beta + \gamma = x_1,$$

$$-\alpha + 2\beta + \gamma + \delta = x_2,$$

$$3\beta + \gamma = x_3,$$

$$\alpha + 4\beta = x_4.$$

Rješenje tog sustava postoji i jedinstveno je neovisno o odabiru vektora v (što se lako utvrdi bilo supstitucijom bilo Gaußovom metodom eliminacija). Dakle, svaki $v \in V$ se na jedinstven način može zapisati kao linearna kombinacija a, b, c i d , odnosno $\mathcal{B}' = (a, b, c, d)$ je također baza za $\mathbb{R}^4$ i u njoj su koordinate od v točno rješenje gornjeg sustava. Primjerice, $e_1 = (1, 0, 0, 0)$, kojemu su $(1, 0, 0, 0)$ koordinate u kanonskoj bazi, u bazi $\mathcal{B}'$ ima koordinate $\left(\frac{2}{5}, -\frac{1}{10}, \frac{3}{10}, \frac{3}{10}\right)'$.

Kao u primjerima 239 i 270, tako vrijedi i općenito: Ako za neki vektor v znamo koordinate $(b_1, \dots, b_n)$ u nekoj bazi $\mathcal{B}$ i želimo mu odrediti koordinate $(x_1, \dots, x_n)$ u drugoj bazi $\mathcal{B}'$ uz pretpostavku da znamo koordinate vektora baze $\mathcal{B}'$ u bazi $\mathcal{B}$, onda se te koordinate dobiju rješavanjem sustava linearnih jednadžbi kojemu su nepoznanice te koordinate, stupac slobodnih članova sadrži koordinate vektora u bazi $\mathcal{B}$, a stupci koji odgovaraju nepoznanicama redom sadrže koordinate vektora baze $\mathcal{B}'$ s obzirom na bazu $\mathcal{B}$. Također, linearna nezavisnost skupa S vektora kojima znamo koordinate u nekoj bazi $\mathcal{B}$ provjerava se rješavanjem homogenog sustava linearnih jednadžbi čiji stupci koeficijenata uz nepoznanice su redom koordinate elemenata od S u bazi $\mathcal{B}$.

Zadatak 137 Jesu li vektori $(2, 2, 1)$, $(-1, 0, 1)$ i $(-1, 2, -2)$ iz $\mathbb{R}^3$ linearno zavisni ili nezavisni?

Vektorski prostori $C(I)$, $C^1(I)$, $\mathbb{R}^I$ su beskonačnodimenzionalni, no u mnogim situacijama razmatramo samo njihove konačnodimenzionalne potprostore.

Primjer 271 Ako gledamo skup svih linearnih kombinacija dviju različitih eksponencijalnih funkcija, on je dvodimenzionalan vektorski prostor (bazu mu čine točno te dvije eksponencijalne funkcije).

Primjer 272 Skup $\mathcal{P}_3$ svih polinoma stupnja 3 (ili manjeg) je vektorski prostor: Zbroj dva polinoma stupnja 3 ili manjeg je polinom stupnja najviše 3, a također je i umnožak konstante i takvog polinoma opet polinom stupnja 3 ili manjeg.

Monomi x^n različitog stupnja su linearno nezavisni (provjerite!). Svaki polinom iz $\mathcal{P}_3$ možemo zapisati u obliku $a + bx + cx^2 + dx^3$, stoga je skup $(1, x, x^2, x^3)$ primjer baze tog prostora, odnosno dimenzija od $\mathcal{P}_3$ jednaka je 4.

Općenito, skup $\mathcal{P}_n$ svih polinoma stupnja n je vektorski prostor dimenzije $n + 1$. Najprirodnija (kanonska) baza za $\mathcal{P}_n$ je $(x^n, x^{n-1}, \dots, x^2, x, 1)$. S obzirom na nju, koordinate polinoma iz $\mathcal{P}_n$ su točno njihovi koeficijenti.

Zadatak 138 Nadite jednu nekanonsku bazu za prostor $\mathcal{P}_3$. Koje su koordinate polinoma x^2 u toj bazi?

Zadatak 139 Jesu li polinomi $1 + x^2$, -1 i $x^2 + x + 1$ iz $\mathcal{P}_2$ linearno zavisni ili nezavisni?

Zadatak 140 Je li skup $\mathcal{P}$ svih polinoma vektorski prostor? Je li konačne ili beskonačne dimenzije?

Podsjetimo se (odjeljak 2.4.1): U kontekstu realnih funkcija jedne varijable, linearna funkcija je funkcija $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ koja sve iznose nezavisne varijable množi istim brojem, dakle funkcija s pravilom oblika $f(x) = ax$ gdje je $a \in \mathbb{R}$ konstanta. Ako umjesto $\mathbb{R}$ za domenu i kodomenu uzmemo bilo koji vektorski prostor, onda

funkciju $f : V \rightarrow V$ s pravilom oblika $f(v) = \alpha v$ gdje je α konstantan skalar nazivamo **operatorom skaliranja** (na V). Operator skaliranja s α umjesto s f označavat ćemo sa $\hat{S}_\alpha$. Izraz operator znači da se radi o funkciji kojoj su domena i kodomena vektorski prostori, tj. koja vektorima pridružuje vektore.

Primjer 273 *Jedan operator skaliranja na V^3 zadan je s $f(\vec{v}) = 3\vec{v}$. On svakom geometrijskom vektoru pridružuje triplicat dulji vektor istog smjera i orijentacije.*

7.1.1 Unitarni prostori

Nerijetko uz osnovne dvije operacije (zbrajanje vektora i množenje vektora skalarom) vektorski prostor možemo na smislen način opskrbiti i operacijom koja ima svojstva kao skalarni produkt geometrijskih vektora (odjeljak 5.2.1). U tom slučaju govorim o unitarnim prostorima.

Definicija 46 (Unitarni prostori) *Realan vektorski prostor V je unitaran ako je na njemu definirana dodatna operacija $\langle \cdot, \cdot \rangle$ koja svakom paru vektora pridružuje po jedan skalar i koja ima svojstva*

$$\langle v, v \rangle \geq 0; \quad \langle v, v \rangle = 0 \Leftrightarrow v = \mathbf{0},$$

$$\langle v, w \rangle = \langle w, v \rangle,$$

$$\langle u, v + w \rangle = \langle u, v \rangle + \langle u, w \rangle,$$

$$\langle v, \alpha \cdot w \rangle = \alpha \langle v, w \rangle.$$

Pritom naravno ta svojstva moraju vrijediti za sve vektore $v, w, u \in V$ i skalare α . U tom slučaju operaciju $\langle \cdot, \cdot \rangle$ nazivamo skalarnim produktom vektora.

Za kompleksne unitarne prostore drugo definicijsko svojstvo poprima oblik

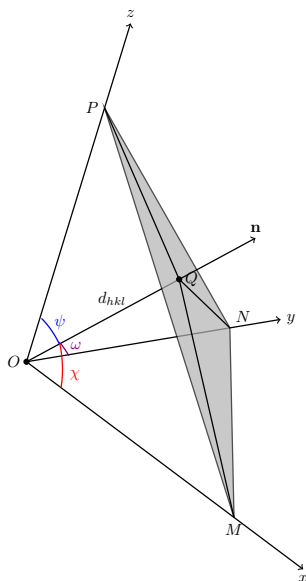
$$\langle v, w \rangle = \overline{\langle w, v \rangle}.$$

Uočite da tada kombinacija drugog i četvrtog svojstva povlači da vrijedi

$$\langle \alpha \cdot v, w \rangle = \overline{\alpha} \langle v, w \rangle.$$

Naravno, uz $\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle = \vec{v} \cdot \vec{w} = |\vec{v}| |\vec{w}| \cos \varphi$ realni vektorski prostori V^2 , $V^2(O)$, V^3 , $V^3(O)$ postaju unitarni prostori. Prije povratka u općentije vektorske prostore, sad ćemo obraditi još neke teme vezane za te unitarne prostore koje nismo obradili u poglavlju 5 zbog ograničenosti vremena predviđenog za Matematiku 1.

Prvo, dokažimo sad fundamentalni zakon recipročne rešetke (teorem 18): Kako smo uočili (vidi str. 211 i sliku 7.1), udaljenost ravnine $hx + ky + lz = 1$ do ishodišta jednaka je međumrežnom razmaku d_{hkl} dviju susjednih ravnina smjera (hkl) . Neka je R probodište te ravnine s jednom od koordinatnih osi, recimo s x -osi pa je $R = (\frac{1}{h}, 0, 0)$. Iznos $d_{hkl} = d(O, Q)$ jednak je duljini ortogonalne projekcije

Slika 7.1: Slika uz izvod formule za d_{hkl} .

vektora $\overrightarrow{OR}$ na $\vec{n}$ (slika 7.2), za kojeg znamo da je okomit na smjer (hkl) pa je (podsjećamo da je $\mathcal{N}_{hkl} = |h, k, l|^*$):

$$d_{hkl} = \frac{|\overrightarrow{OR} \cdot \vec{n}|}{\mathcal{N}_{hkl}} = \frac{|[h, k, l]^* \cdot [\frac{1}{h}, 0, 0]|}{\mathcal{N}_{hkl}} = (5.6) = \frac{1}{\mathcal{N}_{hkl}}.$$

Dakle, dokazali smo teorem 18.

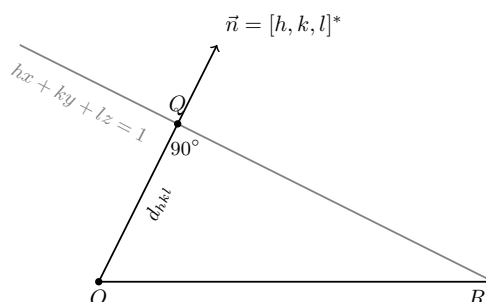
Izvedimo sad i formulu za računanje međumrežnog razmaka u neortogonalnim koordinatnim sustavima (za ortogonalne koordinatne sustave izveli smo ju dokazom korolara 1). Znamo da je $d_{hkl} = d(O, Q)$ i neka su M , N i P probodišta naše ravnine s koordinatnim osima (pretpostavljamo da sva tri postoje, tj. $h, k, l \neq 0$). Uočimo tetraedar $OMNP$ (slika 7.1). Njegov volumen $\bar{V}$ možemo izraziti na dva načina. S jedne strane on je volumen piramide s bazom $\triangle MNP$ i visinom d_{hkl} pa je Volumen te piramide iznosi

$$\bar{V} = \frac{1}{3} d_{hkl} P_{\triangle MNP}.$$

S druge strane, taj volumen je trećina volumena paralelepipeda razapetog vektorima $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{h} \vec{a}$, $\overrightarrow{ON} = \frac{1}{k} \vec{b}$, $\overrightarrow{OP} = \frac{1}{l} \vec{c}$, odnosno

$$\bar{V} = \frac{1}{3} |\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{ON} \times \overrightarrow{OP}| = \frac{1}{3|hkl|} \vec{a} \cdot \vec{b} \times \vec{c} = \frac{V}{3|hkl|},$$

gdje je kao i ranije s V označen volumen jedinične ćelije. Izjednačavanjem gornjih dviju formula za $\bar{V}$ dobivamo:



Slika 7.2: Ilustracija uz dokaz fundamentalnog zakona recipročne rešetke.

Propozicija 26 *Ako nijedan od Millerovih indeksa smjera mrežnih ravnina nije 0, tj. ako smjer mrežnih ravnina nije paralelan nijednoj koordinatnoj osi, onda je*

$$d_{hkl} = \frac{V}{|h \ k \ l| P_{\triangle MNP}}, \quad (7.2)$$

pri čemu su M , N i P redom probodišta ravnine $hx + ky + lz = 1$ s koordinatnim osima.

Uočimo da se površina trokuta MNP , tj. $P_{\triangle MNP}$ u gornjoj formuli, može izračunati kombinacijom kosinusovog poučka i Heronove formule. Naime, znamo da su udaljenosti M , N , P od ishodišta redom $|OM| = \frac{a}{|h|}$, $|ON| = \frac{b}{|k|}$, $|OP| = \frac{c}{|l|}$. Trokut $\triangle OMN$ je trokut kojemu znamo dvije stranice ($|OM|$ i $|ON|$) i kut među njima (to je γ jer su M i N na x -osi odnosno y -osi). Analogno u trokutima $\triangle ONP$ i $\triangle OPM$ znamo po dvije stranice i kut među njima. Stoga se u sva ta tri trokuta duljine trećih stranica ($|MN|$, $|NP|$ odnosno $|PM|$) mogu izračunati pomoću kosinusovog poučka.⁵ Nakojn toga je Heronovom formulom moguće izračunati površinu $P_{\triangle MNP}$.

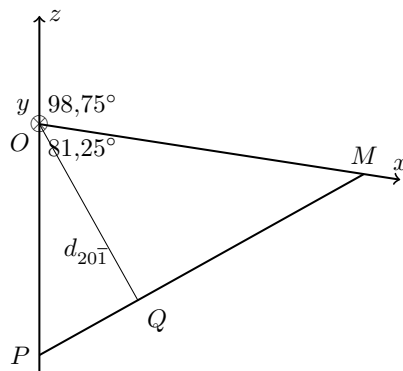
Primjer 274 *Ako su parametri baze $a = 100$ pm, $b = 200$ pm, $c = 250$ pm, $\alpha = \gamma = 90^\circ$, $\beta = 60^\circ$, izračunajmo d_{322} .*

Za ravninu $3x + 2y + 2z = 1$ je $|OM| = 33,3$ pm, $|ON| = 100$ pm, $|OP| = 125$ pm. Trokut $\triangle OMN$ i $\triangle ONP$ su pravokutni pa Pitagorin poučak daje $|MN| = 105,41$ pm i $|NP| = 160,08$ pm; za $\triangle OMP$ koristimo kosinusov poučak i dobijemo $|MP| = 112,11$ pm. Po Heronovoj formuli je stoga $P_{\triangle MNP} = 5.882,288$ pm².

S obzirom na parametre jediničćelije, $V = abc \sin \beta = 4.330.127,019$ pm³.

Naposljetku formula 7.2 daje $d_{322} = 4,68$ pm.

⁵Ako je kut između poznate dvije stranice trokuta pravi, kosinusov poučak postaje Pitagorin poučak.

Slika 7.3: d_{h0l} u sustavu u kojem je $\vec{b} \perp \vec{a}, \vec{c}$

Za slučaj da su dva Millerova indeksa promatranog smjera jednaka 0, dakle je treći ± 1 , formule za međumrežne razmake dobili smo u teoremu 17 (formule s 1 jednako vrijede i ako se 1 zamijeni s $\bar{1}$). Ostaje još pitanje formula za međumrežni razmak za neoortogonalne sustave ako je točno jedan od Millerovih indeksa 0 (ravnine paralelne jednoj koordinatnoj osi). Njih nećemo izvoditi, ali ćemo istaknuti situaciju kad se one mogu izvesti elementarnogeometrijski. Naime, ako je jedna od koordinatnih osi okomita na druge dvije (dakle dva od kutova među parametrima baze su pravi) te ako nas zanima međumrežni razmak za ravnine paralelne upravo toj koordinatnoj osi, postupak je sličan izvodu formule 7.2, ali jednostavniji jer se svodi na planimetriju.

Primjer 275 Malahit kristalizira u monoklinskom sustavu ($a = 9,502 \text{ \AA}$, $b = 11,974 \text{ \AA}$, $c = 3,240 \text{ \AA}$, $\alpha = \gamma = 90^\circ$, $\beta = 98,75^\circ$). Odredimo $d_{20\bar{1}}$ za kristale malahita.

Gledamo ravninu $2x - z = 1$; ona je paralelna s y -osi, a ona je pak okomita na (x, z) -koordinatnu ravninu (slika 7.3). Površina trokuta $\triangle OMP$ je s jedne strane $\frac{1}{2}d_{20\bar{1}}|MP|$, a s druge $\frac{1}{2}|OM||OP|\cos(180^\circ - \beta)$, dakle je $d_{20\bar{1}} = |MP| \approx 15,2141 \text{ \AA}^2$. Duljinu $|MP|$ lako odredimo iz kosinusovog poučka: $|MP|^2 = |OM|^2 + |OP|^2 - 2|OM||OP|\cos(180^\circ - \beta)$, dakle $|MP| \approx 5,3279 \text{ \AA}$, slijedi $d_{20\bar{1}} = 2,856 \text{ \AA}$.

Kut između pravca i ravnine definiran je kao kut između vektora smjera pravca i njegove ortogonalne projekcije na ravninu. To je ekvivalentno apsolutnoj vrijednosti razlike pravog kuta i kuta θ između vektora smjera pravca i vektora normale ravnine. Za računanje kuta između pravca i mrežne ravnine također možemo iskoristiti fundamentalni zakon recipročne rešetke. Naime, po definiciji skalarnog produkta je

$$\cos \vartheta = \frac{\vec{s} \cdot \vec{n}}{|\vec{s}| \cdot |\vec{n}|}.$$

Ako je $\vec{s} = [u, v, w]$ i $\vec{n} = [h, k, l]^*$ (uočimo da fundamentalni zakon recipročne rešetke vrijedi i za necjelobrojne koeficijente vektora normale)), brojni zadnje

formule je $[u, v, w] \cdot [h, k, l]^* = (5.6) = uh + vk + wl$. Nadalje, $|\vec{n}| = \frac{1}{d_{hkl}}$, te formula za računanje kuta između pravca s vektorom smjera $\vec{s} = [u, v, w]$ i mrežne ravnine smjera (hkl) poprima oblik

$$\cos \vartheta = \left| 90^\circ - \frac{uh + vk + wl}{|\vec{s}|} d_{hkl} \right|. \quad (7.3)$$

Primjer 276 Koji kut s y -osi proizvoljnog koordinatnog sustava zatvaraju ravnine smjera (123) ? Vektor normale tog smjera je $\vec{n} = [1, 2, 3]^*$. Tražimo njegov kut φ s $\vec{b} = [0, 1, 0]$. Po definiciji skalarnog produkta je

$$\cos \varphi = \frac{[1, 2, 3]^* \cdot [0, 1, 0]}{\mathcal{N}_{123}b} = \frac{2}{b} d_{123} > 0$$

pa je traženi kut φ šiljast, odnosno $\vartheta = 90^\circ - \varphi$. Iz nps d_{123} bismo mogli izračunati kao u primjeru 274 da su nam zadani parametri baze.

Zadatak 141 Za bazu prostora kao u primjeru 274, izračunajte kut između ravnina smjera (322) s x -osi.

Vratimo se na općenitije vektorske prostore.

Primjer 277 Pogledajmo $\mathbb{C}$ kao realan vektorski prostor. Ako definiramo

$$\langle x + iy, x' + iy' \rangle = xx' + yy'$$

nije se teško uvjeriti da smo tako dobili skalarni produkt. Primjerice, $\langle 1 + i, 2 - i \rangle = 1 \cdot 2 + 1 \cdot (-1) = 1$.

S druge strane, ako $\mathbb{C}$ gledamo kao kompleksan vektorski prostor mogli bismo skalarni produkt definirati ovako:

$$\langle w, z \rangle = \overline{w} z.$$

U tom slučaju bilo bi $\langle 1 + i, 2 - i \rangle = (1 - i) \cdot (2 - i) = 1 - 3i$. Zašto ova druga definicija nije prikladna ako $\mathbb{C}$ gledamo kao realan vektorski prostor?

Prostori $\mathbb{R}^n$ su unitarni uz skalarni produkt definiran s

$$\langle (x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n) \rangle = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n.$$

Zadatak 142 Kako biste definirali skalarni produkt na realnom vektorskom prostoru $\mathbb{C}^2$?

Na vektorskom prostoru $\mathcal{I}(I, \mathbb{R})$ realnih funkcija jedne varijable koje su integrabilne na intervalu I (gdje interval I može biti i neograničen) uobičajeno je skalarni produkt definirati s

$$\langle f, g \rangle = \int_I f(x) g(x) \, dx.$$

Za integrabilne kompleksne funkcije, odgovarajući skalarni produkt se definira s

$$\langle f, g \rangle = \int_I f^*(x) g(x) \, dx,$$

gdje je s f^* označena funkcija koja je definirana s $f^*(x) = \overline{f(x)}$. Ovaj skalarni produkt je vrlo čest u kvantnoj teoriji.

U unitarnom prostoru može se definirati **norma vektora**, koja je poopćenje pojma iznosa ili duljine geometrijskih vektora:

$$\|v\| = \sqrt{\langle v, v \rangle}. \quad (7.4)$$

U unitarnim prostorima geometrijskih vektora norma vektora podudara se s njegovim iznosom.

Primjer 278 U $\mathbb{R}^n$ norma vektora se računa formulom

$$\|(x_1, \dots, x_n)\| = \sqrt{|x_1|^2 + \dots + |x_n|^2}.$$

Zadatak 143 Izračunajte normu funkcije $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$.

Dva vektora unitarnog prostora nazivaju se **ortogonalnim** ako im je skalarni produkt 0.

Primjer 279 Vektori $(1, -1, 2, 0, 3)$ i $(0, 2, 1, 4, 0)$ su ortogonalni u $\mathbb{R}^5$ jer im je skalarni produkt $1 \cdot 0 + (-1) \cdot 2 + 2 \cdot 1 + 0 \cdot 4 + 3 \cdot 0 = 0$.

Primjer 280 Sada, vjerujemo, poprima smisao zadatak iz primjera 183, u kojemu se provjeravala ortogonalnost valnih funkcija.

Zadatak 144 Nađite primjer dviju ortogonalnih integrabilnih realnih funkcija $f, g : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ koje nisu nulfunkcije.

Može se dokazati da ortogonalnost povlači linearnu nezavisnost, preciznije:

Teorem 23 Ako je S skup vektora unitarnog prostora u kojem su svaka dva vektora ortogonalna, onda je S linearno nezavisan skup.

Definicija 47 (Ortogonalne i ortonormirane baze) Baza unitarnog prostora čija svaka dva vektora su ortogonalna naziva se ortogonalnom bazom. Ortogonalna baza u kojoj svi vektori imaju normu 1 naziva se ortonormiranom bazom.

Primjer 281 Kanonske baze za $\mathbb{R}^n$ su ortonormirane.

Ako je $(e_1, \dots, e_n)$ neka ortonormirana baza n -dimenzionalnog unitarnog prostora V i $v \in V$ bilo koji vektor, onda znamo da v ima neke koordinate $(x_1, \dots, x_n)$ u toj bazi, dakle je $v = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n$. Pomnožimo taj izraz skalarno (slijeva) s nekim od baznih vektora e_i . Budući da je skalarni produkt distributivan s obzirom na zbrajanje i da je $\langle e_i, e_j \rangle = 0$ za $i \neq j$ (vektori ortonormirane baze su međusobno ortogonalni), preostat će nam $\langle e_i, v \rangle = \langle e_i, x_i e_i \rangle = x_i \langle e_i, e_i \rangle = x_i$. Dakle, pokazali smo:

Teorem 24 Koordinate vektora v iz konačnodimenzionalnog unitarnog prostora s obzirom na bilo koju ortonormiranu bazu jednake su redom skalarnim produktima vektora te baze s v .

Primjer 282 Ako je $\vec{v} \in V^2$ i u V^2 odabrana ortonormirana baza $(\vec{i}, \vec{j})$, onda je

$$\vec{v} = (\vec{v} \cdot \vec{i}) \vec{i} + (\vec{v} \cdot \vec{j}) \vec{j}.$$

Primjerice, koordinate $\vec{v} = [-2, 3]$ s obzirom na bazu $\vec{i}, \vec{j}$ znače da je $\vec{v} \cdot \vec{i} = -2$ i $\vec{v} \cdot \vec{j} = 3$.

Primjer 283 Neka je desna baza $\mathcal{B} = (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ od V^3 zadana parametrima $a = 5$ cm, $b = c = 10$ cm, $\alpha = 90^\circ$, $\beta = 60^\circ$, $\gamma = 45^\circ$. Želimo ju zamijeniti desnom ortogonalnom bazom $\mathcal{B}' = (\vec{a}, \vec{u}, \vec{v})$ takvom da je $u = v = a$ i da je $\vec{u}$ u ravnini od $\vec{a}$ i $\vec{b}$. Kako bismo mogli formulama opisati vektore $\vec{u}$ i $\vec{v}$?

Prvo, $\vec{u}$ mora biti komplanaran s $\vec{a}$ i $\vec{b}$, dakle je $\vec{u} = x\vec{a} + y\vec{b}$. Pomnožimo li to skalarno s $\vec{a}$ dobit ćemo $\vec{u} \cdot \vec{a} = x a^2 + y a b \cos \gamma$. Želimo $\vec{u} \perp \vec{a}$, dakle treba biti $0 = (25x + 25y\sqrt{2}) \text{ cm}^2$, odnosno $x = -\sqrt{2}y$. Želimo i da je $u = 5$ cm, dakle $25 \text{ cm}^2 = \vec{u} \cdot \vec{u} = x^2 a^2 + 2xy a b \cos \gamma + y^2 b^2$, odnosno $25 = 25x^2 + 50\sqrt{2}xy + 100y^2$. Zbog $x = -\sqrt{2}y$ to povlači $25 = 50y^2 - 100y^2 + 100y^2$. Stoga je $y = \frac{\sqrt{2}}{2}$ i $x = -\frac{1}{2}$, odnosno $\vec{u} = \frac{1}{2}(-\vec{a} + \sqrt{2}\vec{b})$.

Vektor $\vec{v}$ treba biti okomit i na $\vec{a}$ i na $\vec{u}$, dakle treba biti kolinearan s vektorom $\vec{a} \times \vec{u} = \frac{1}{2}\vec{a} \times (-\vec{a} + \sqrt{2}\vec{b}) = \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{a} \times \vec{b}$. Budući da je $\vec{v}$ kolinearan s time, znači da je $\vec{v} = \alpha \frac{\sqrt{2}}{2} V \vec{c}^* = \beta \vec{c}^*$. Želimo i da bude $5 \text{ cm} = v = |\beta| \cdot a b \sin \gamma = |\beta| \cdot \frac{50\sqrt{2} \text{ cm}^2}{2}$. Stoga uzimamo $\beta = \frac{20}{\sqrt{2} \text{ cm}}$ (pozitivno zato da baza bude desna), odnosno $\vec{v} = \frac{20}{\sqrt{2} \text{ cm}} \vec{a} \times \vec{b}$.

U unitarnim prostorima osim već spomenutih operatora skaliranja postoji još jedan način kako poopćiti realne linearne funkcije jedne varijable. Uzmemo li kao domenu unitaran prostor V , a kao kodomenom njegov skup skalara S ($\mathbb{R}$ ili $\mathbb{C}$) te jedan fiksni vektor $a \in V$, onda je dobro definirana funkcija $f: V \rightarrow S$, $f(x) = \langle a, x \rangle$ (skalarni produkt svih vektora domene s fiksnim vektorom). Takve funkcije nazivamo **linearnim funkcijama**.

Primjer 284 Neka je $a = (1, 2, 3, 4) \in \mathbb{R}^4$. Tim vektorom određena je linearna funkcija $f: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \langle a, x \rangle$. Ako je $x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4$, onda je $f(x) = \langle (1, 2, 3, 4), (x_1, x_2, x_3, x_4) \rangle = x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4$.

Primijetimo da sada, kao što su linearne jednažbe s jednom nepoznanicom jednažbe u kojima je linearna funkcija jedne varijable izjednačena sa zadanom vrijednošću (slobodnim članom), tako su linearne jednažbe s n nepoznanica jednažbe u kojima je linearna funkcija s n varijabli izjednačena sa zadanom vrijednošću (slobodnim članom), odnosno sve linearne jednažbe su zapravo jednažbe s jednom nepoznanicom (vektorom $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$) i mogu se zapisati u obliku

$$\langle a, x \rangle = b$$

za neki $a \in \mathbb{R}^n$, $b \in \mathbb{R}$.

Primjer 285 Linearna jednažba $2x_1 - 3x_2 + x_3 + x_4 - 6x_5 = 7$ u vektorskom obliku glasi $\langle a, x \rangle = 7$, gdje je $a = (2, -3, 1, 1, -6)$ i $x = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$.

7.2 Linearni operatori

Promotrimo spomenute operatore skaliranja i linearne funkcije. Ako je f operator skaliranja skalarom α na V , iz definicijskih svojstava (7.1) vidimo da je $\hat{S}_\alpha(\beta v) = \alpha\beta v = \beta\alpha v = \beta\hat{S}_\alpha(v)$ i $\hat{S}_\alpha(v + w) = \alpha(v + w) = \alpha v + \alpha w = \hat{S}_\alpha(v) + \hat{S}_\alpha(w)$, tj. $\hat{S}_\alpha$ se „lijepo“ ponaša s obzirom na obje osnovne operacije na vektorskim prostorima, tj. svejedno je zbrojimo li prvo dva vektora domene i preslikamo zbroj ili prvo preslikamo ta dva vektora pa onda zbrojimo rezultat i svejedno je skaliramo li prvo vektor domene pa preslikamo ili prvo preslikamo vektor pa onda skaliramo. Iz definicijskih svojstava unitarnih prostora pak na analogan način vidimo da to vrijedi i za linearne funkcije. Kažemo: operatori skaliranja i linearne funkcije imaju svojstvo linearnosti. Svojstvo linearnosti sastoji se od dva svojstva — aditivnosti i homogenosti. Operatore koji imaju svojstvo linearnosti nazivamo linearnim operatorima.

Definicija 48 (Linearan operator) Linearan operator je funkcija $\hat{A} : V \rightarrow W$ (gdje su V i W vektorski prostori) koja ima sljedeća dva svojstva:

$$\hat{A}(v + w) = \hat{A}(v) + \hat{A}(w) \quad (\text{aditivnost}),$$

$$\hat{A}(\alpha v) = \alpha \hat{A}(v) \quad (\text{homogenost})$$

za sve $v, w \in V$ i skalare α . Ako je $W = \mathbb{R}$ odnosno $W = \mathbb{C}$ (kao kompleksan prostor), linearan operator zovemo linearnim funkcionalom. Ako je domena linearnog operatora jednaka kodomeni, tj. $V = W$, govorimo o linearnom operatoru na V .

Primjer 286 Za svaki vektorski prostor V i skalar α je operator $\hat{S}_\alpha$ skaliranja s α linearan operator.

Primjer 287 Za svaki unitaran prostor V i svaki skalar α je linearna funkcija $f(v) = \langle a, v \rangle$ linearan funkcional.

Primjer 288 Funkcija sinus nije primjer linearnog operatora (funkcionala) s $\mathbb{R}$ u $\mathbb{R}$ jer niti je aditivna niti je homogena.

Zadatak 145 Je li kvadriranje, korjenovanje, uzimanje recipročne vrijednosti aditivno? Homogeno?

Primjer 289 Funkcija s $C^1(I)$ u $C(I)$ koja svakoj funkciji pridružuje njenu derivaciju je linearan operator kojeg nazivamo operatorom deriviranja. Ako je nezavisna varijabla funkcijâ koje deriviramo označena s x , operator deriviranja označavamo s $\frac{d}{dx}$.

Slično, funkcija s $C^1(I)$ u $\mathbb{R}$ koja svakoj funkciji pridružuje njenu derivaciju $f'(c)$ u istom broju $c \in I$ je linearan funkcional.

Primjer 290 Osnâ simetrija u ravnini je linearna operator: Svejedno je zbrojimo li prvo dva geometrijska vektora iz V^2 pa ih zrcalimo s obzirom na danu os simetrije, ili ih prvo zrcalimo pa zbrojimo njihove slike, a isto tako je svejedno skaliramo li vektor prije ili poslije zrcaljenja. Analogno vrijedi i za zrcaljenje s obzirom na ravninu u uobičajenom trodimenzionalnom prostoru.

Iako to u definiciji nije naglašeno, domena i kodomena linearnog operatora moraju imati isti skup skalara. Naime, za svojstvo homogenosti moramo moći množiti sa istim skalarom i u domeni i u kodomeni. Dakle, linearni operatori idu s realnih prostora u realne, alternativno s kompleksnih u kompleksne.

Najjednostavniji primjer linearnih operatora definiranih na svakom vektorskom prostoru su jedinični operator i nuloperator. **Jedinični operator** $\hat{I}$ je operator skaliranja s 1, tj. funkcija identiteta na vektorskom prostoru: $\hat{I} : V \rightarrow V$, $\hat{I}(v) = v$. **Nuloperator** je funkcija koja svim vektorima danog vektorskog prostora pridružuje nulvektor tog istog ili nekog drugog prostora, tj. to je funkcija $\hat{O} : V \rightarrow W$, $\hat{O}(v) = \mathbf{0}_W$. Ako je kodomena $\mathbb{R}$ odnosno $\mathbb{C}$, govorimo o nulfunkcionalu.

Nuloperator i jedinični operator očigledno nulvektoru domene pridružuju nulvektor kodomene. Derivacija nulfunkcije je nulfunkcija. Ako u linearnu funkciju s n varijabli uvrstimo $\mathbf{0} = (0, 0, \dots, 0)$, dobit ćemo 0. Osnosimetrična slika nulvektora je nulvektor. To nije slučajno. Naime, vrijedi:

Teorem 25 Ako je $\hat{A} : V \rightarrow W$ linearan operator, onda je $\hat{A}(\mathbf{0}_V) = \mathbf{0}_W$.

Zadatak 146 Dokažite gornji teorem!

Primjer 291 Funkcija koja svim vektorima domene pribraja isti vektor a (**translacija**) nije linearan operator osim ako je $a = \mathbf{0}$. Naime, ako $a \neq \mathbf{0}$ onda translacija preslikava nulvektor $\mathbf{0}$ u $\mathbf{0} + a = a \neq \mathbf{0}$. Translacija za nulvektor je, očito, isto što i jedinični operator.

S druge strane, funkcija sinus preslikava 0 u 0, ali ipak nije linearna.

Od posebnog interesa u kemiji (stereokemiji, kristalografiji) su linearni operatori koji preslikavaju geometrijske vektore u geometrijske vektore, preciznije rečeno: linearni operatori kojima su su domena i kodomena jednake i pritom su to jedan od prostora $V^2(O)$ ili $V^3(O)$. Neka je $\hat{A}$ jedan takav operator. Ako je p neki pravac kroz O , smjera određenog vektorom $\vec{s}$, onda se taj pravac sastoji od svih vektora oblika $t\vec{s}$, $t \in \mathbb{R}$, tj. p je jednodimenzionalni potprostor od $V^2(O)$ odnosno $V^3(O)$. Budući da je $\hat{A}$ homogen, imamo $\hat{A}(t\vec{s}) = t\hat{A}(\vec{s})$, tj. svi vektori s pravca p se preslikavaju u vektore pravca određenog vektorom smjera $\hat{A}(\vec{s})$. Naravno, i preslikavanjem dobiveni pravac mora prolaziti kroz O jer $\hat{A}$ mora nulvektor preslikati u nulvektor. Ako je $\hat{A}(\vec{s}) = \vec{0}$, onda je slika pravca p samo ishodište O , tj. naš operator je nuloperator. Analogno se može dokazati i za slike ravnina kroz ishodište u slučaju linearnih operatora na $V^3(O)$, tj. vrijedi:

Propozicija 27 *Ako je $\hat{A} \neq \hat{0}$ linearan operator na $V^2(O)$ ili na $V^3(O)$, on svaki pravac kroz O preslikava u neki pravac kroz O . Ako je $\hat{A} \neq \hat{0}$ linearan operator na na $V^3(O)$, on svaku ravninu kroz O preslikava u neku ravninu kroz O ili u neki pravac kroz O .*

Za primjene u fizici i kemiji posebno su važni linearni operatori simetrija, koji su podvrsta ortogonalnih operatora, tj. operatora koji čuvaju normu vektora.

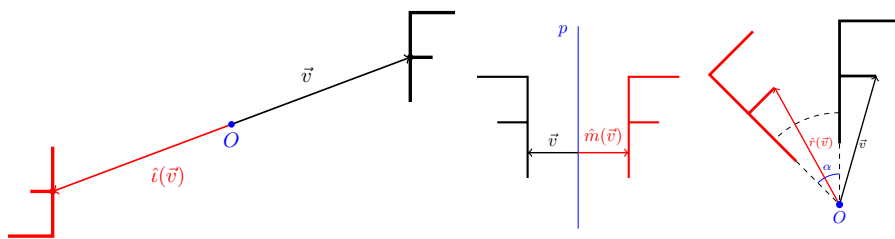
Definicija 49 (Ortogonalni operatori i operatori simetrija) *Ako je V unitaran prostor, linearni operator $\hat{A} : V \rightarrow V$ koji ima svojstvo $\|\hat{A}(v)\| = \|v\|$ za sve $v \in V$ naziva se ortogonalnim operatorom. Ako je V jedan od prostora $V^2(O)$ ili $V^3(O)$, ortogonalne operatore nazivamo operatorima simetrije.*

Kako vidimo, operatori simetrije čuvaju iznose geometrijskih vektora, jer je za geometrijske vektore norma isto što i iznos. Ako operator simetrije fiksira neki podskup prostora (preslikava taj podskup u samog sebe), govorimo o simetriji tog podskupa.

Primjer 292 *Ako je k kružnica oko O (u ravnini), onda je svaka rotacija oko O simetrija te kružnice.*

Osnovni tipovi operatora simetrije su sljedeći (usp. sliku 7.4).

- **Jedinični operator** e operator simetrije (on se kao operator simetrije označava s $\mathbf{1}$). On je simetrija svakog podskupa ravnine odnosno trodimenzionalnog prostora.
- **Centralna simetrija (inverzija)** s obzirom na centar (točku) O je definirana s $\bar{\mathbf{1}}(v) = -v$ (tj. $\bar{\mathbf{1}} = -\mathbf{1}$). Vidimo da je to operator skaliranja s -1 .



Slika 7.4: Tri osnovna tipa operatora simetrije (centralna simetrija, zrcaljenje, rotacija)

- **Zrcaljenje (refleksija)** se različito definira u ravnini i u trodimenzionalnom prostoru. Ako gledamo zrcaljenje u ravnini, govorimo i o osnoj simetriji. To je linearni operator $\hat{m} : V^2(O) \rightarrow V^2(O)$ za koji postoji pravac p (os simetrije) koji prolazi kroz O i koji ima svojstvo da za svaki $\vec{v} = \overrightarrow{OT}$ vrijedi da ako je $\hat{m}(\vec{v}) = \overrightarrow{OT'}$, onda je polovište dužine TT' na pravcu p i pravac TT' je okomit na p . Zrcaljenje u prostoru je linearni operator $\hat{m} : V^3(O) \rightarrow V^3(O)$ definiran analogno, samo umjesto osi simetrije za njega postoji ravnina simetrije Π sa istim svojstvom kao što je u dvodimenzionalnom slučaju navedeno za os simetrije.
- **Rotacija** se također različito definira u ravnini i u prostoru. Rotacija ravnine oko O je linearni operator $\hat{r} : V^2(O) \rightarrow V^2(O)$ koji ima svojstvo da za svaki $\vec{v} = \overrightarrow{OT}$ vrijedi da ako je $\hat{r}(\vec{v}) = \overrightarrow{OT'}$, onda je (orijentirani) kut $\phi = \angle TOT'$ uvijek isti (nazivamo ga kutom rotacije). Rotacija prostora je linearni operator $\hat{r} : V^3(O) \rightarrow V^3(O)$ za koji postoji pravac o kroz O (os rotacije) sa svojstvom da za svaki $\vec{v} = \overrightarrow{OT}$ vrijedi da ako je $\hat{r}(\vec{v}) = \overrightarrow{OT'}$, onda je (orijentirani) kut $\angle TOT'$ uvijek isti, gdje je $\overline{O}$ probodište osi o s ravninom okomitom na O koja sadrži T . Ako je kut rotacije $360^\circ/n$ gdje je n prirodan broj, govorimo o **rotaciji reda n** . Rotacije reda n označavamo s **n** .

Primjer 293 Rotacija reda 4 oko središta je jedna od simetrija kvadrata.

U dvodimenzionalnom slučaju nije potrebno razmatrati centralnu simetriju jer je ona isto što i rotacija reda 2 oko centra simetrije. S druge strane, u trodimenzionalnom slučaju se često razmatraju i rotoinverzije i rotorefleksije. Rotoinverzija je kompozicija rotacije i centralne simetrije, uz uvjet da je centar simetrije na osi rotacije. Rotorefleksija je kompozicija rotacije i zrcaljenja, uz uvjet da je ravnina simetrije okomita na os rotacije. Nije teško dokazati:

Teorem 26 Ako je kompozicija $\hat{A} \circ \hat{B}$ linearnih operatora $\hat{A}$ i $\hat{B}$ definirana, ona je također linearni operator. Ako su $\hat{A}$ i $\hat{B}$ oba ortogonalni, takva je i njihova kompozicija.

Budući da je kompozicija ortogonalnih linearnih operatora ortogonalan linearni operator, rotorefleksije i rotoinverzije prostora $V^3(O)$ su također primjeri operatora simetrije.

Iako je relativno lako opisati što neki operator simetrije „radi“ s vektorima, u konkretnoj situaciji iz tog opisa u pravilu nije lako precizno opisati kamo se preslikao konkretni vektor. Primjerice, kako biste odgovorili na sljedeće pitanje: Ako je koordinatni sustav u ravnini određen bazom s parametrima $a \neq b$, $\gamma = 90^\circ$, u koji vektor će se rotacijom reda 5 preslikati vektor s koordinatama $[1, 1]$? Dok na pitanja poput prethodnog uz malo truda možemo naći odgovor čisto geometrijskom argumentima, to postaje dosta teško ako umjesto samo jednog vektora želimo preslikati više njih ili ako je djelovanje operatora kompliciranije. Kao što vektori s obzirom na baze (u konačnodimenzionalnim prostorima) imaju svoje koordinate i one nam olakšavaju zaključivanje o njihovim geometrijskim svojstvima i odnosima, tako korištenjem baza domene i kodomene i linearni operatori imaju nešto poput koordinata što nam olakšava zaključivanje o njihovom djelovanju. To nešto su matrice.

7.3 Matrice

7.3.1 Matrica linearnog operatora

Neka je $\hat{A} : V \rightarrow W$ linearni operator (gdje su V i W konačnodimenzionalni). Jednostavnosti radi uzmimo da je dimenzija domene 2, a dimenzija kodomene 3. Neka je $\mathcal{B}_V = (a, b)$ neka baza domene. Znamo da svaki vektor $v \in V$ jednoznačno možemo zapisati u obliku $v = x a + y b$ s nekim skalarima x i y (koordinatama vektora v u bazi $\mathcal{B}_V$). Zbog linearnosti od $\hat{A}$ vrijedi $\hat{A}(v) = \hat{A}(x a + y b) = x \hat{A}(a) + y \hat{A}(b)$. Dakle, ako znamo kamo $\hat{A}$ preslikava vektore a i b baze domene, znamo izračunati kamo $\hat{A}$ preslikava sve vektore. Vektori $\hat{A}(a)$ i $\hat{A}(b)$ nalaze se u kodomeni pa se mogu odrediti njihove koordinate s obzirom na neku bazu $\mathcal{B}_W = (e, f, g)$ kodomene. Ako su im koordinate u toj bazi (α, β, γ) i (δ, ϵ, η) imamo $\hat{A}(v) = x(\alpha, \beta, \gamma) + y(\delta, \epsilon, \eta) = (x\alpha + y\delta, x\beta + y\epsilon, x\gamma + y\eta)$, tj. imamo potpuno računski postupak za izračunavanje kamo $\hat{A}$ preslikava bilo koji vektor v . Zamijenimo li u gornjem postupku dimenzije 2 i 3 proizvoljnim konačnim dimenzijama (i naravno uzmemo baze s odgovarajućim brojevima elemenata) analogno bismo dokazali:

Teorem 27 *Linearni operator je potpuno zadan svojim djelovanjem na jednoj bazi domene, tj. potpuno je zadan koordinatama slika svih vektora odabrane baze domene s obzirom na odabranu bazu kodomene.*

Primjer 294 *Neka je $(\vec{a}, \vec{b})$ neka baza za $V^2(O)$ te neka je za linearni operator $\hat{A} : V^2(O) \rightarrow V^2(O)$ poznato da prvi vektor baze preslikava u drugi ($\hat{A}(\vec{a}) = \vec{b}$), a drugi u zbroj prvog i drugog ($\hat{A}(\vec{b}) = \vec{a} + \vec{b}$). To je dovoljno da bismo znali kako preslikava sve vektore ravnine: Ako je $\vec{v} = [x, y] = x\vec{a} + y\vec{b}$, onda je*

$$\hat{A}(\vec{v}) = \hat{A}(x\vec{a} + y\vec{b}) = (\text{aditivnost}) = \hat{A}(x\vec{a}) + \hat{A}(y\vec{b}) =$$

$$= (\text{homogenost}) = x \hat{A}(\vec{a}) + y \hat{A}(\vec{b}) = \vec{b} + y(\vec{a} + \vec{b}) = y\vec{a} + (x+y)\vec{b}.$$

Vidimo da to možemo kraće zapisati kao $\hat{A}([x, y]) = [y, x+y]$.

Kao i u primjeru 294, ako je domena linearnog operatora jednaka kodomeni, ukoliko nije drugačije rečeno podrazumijeva se da u domeni i kodomeni uzimamo istu bazu.

Ako teorem 27 zapišemo simbolički imamo: Neka je $\mathcal{B}_V$ odabrana baza domene linearnog operatora $\hat{A}$, a $\mathcal{B}_W$ odabrana baza kodomene, onda za svaki vektor $e_i \in \mathcal{B}_V$ možemo zapisati koordinate od $\hat{A}(e_i)$ s obzirom na bazu $\mathcal{B}_W$. Ako je dimenzija domene n , a dimenzija kodomene, dobit ćemo n m -torki brojeva koje možemo zapisati kao stupce jedne pravokutne tablice. Pritom uočimo da nije potrebno zapisivati oznake stupaca i redaka jer im je redoslijed zadan redoslijedom vektora odabranih baza. Općenitom, pravokutne tablice koje sadrže brojeve zovu se matrice.

Definicija 50 (Matrica) *Matrica je pravokutna tablica realnih (ili kompleksnih) brojeva. Brojeve u matrici nazivamo njenim elementima. Matrice čiji elementi su realni brojevi zovemo realnim matricama, a one s kompleksnim elementima su kompleksnim matricama. Matrica je reda (tipa, dimenzije) $m \times n$ ako ima m redaka i n stupaca. U slučaju $m = n$ govorimo o kvadratnoj matrici reda n .*

Matrice omeđujemo okruglim ili uglatim zagradama, a označavamo ih velikim slovima latinske abecede. Gore opisanim postupkom dobili smo matricu koja predstavlja linearni operator $\hat{A}$ s obzirom na odabrane baze domene i kodomene slično kao što koordinate vektora s obzirom na odabranu bazu vektorskog prostora predstavljaju taj vektor.

Definicija 51 (Matrica linearnog operatora) *Matrica linearnog operatora $\hat{A} : V \rightarrow W$ s obzirom na odabrane baze $\mathcal{B}_V$ i $\mathcal{B}_W$ domene i kodomene je matrica A u kojoj se redom u stupcima nalaze koordinate slika vektora baze $\mathcal{B}_V$ (dakle, od vektora $\hat{A}(e_1), \hat{A}(e_2), \dots, \hat{A}(e_n)$) u bazi $\mathcal{B}_W$. Ako je $V = W$ i $\mathcal{B}_V = \mathcal{B}_W$ (označimo tu bazu s $\mathcal{B}$), govorimo o matrici linearnog operatora s obzirom na bazu $\mathcal{B}$.*

Primjer 295 *Pogledajmo operator iz primjera 294. Imamo $\mathcal{B} = \mathcal{B}_V = \mathcal{B}_W = (\vec{a}, \vec{b})$, pa je $\hat{A}(\vec{a}) = \vec{b} = [0, 1]$ (prvi stupac matrice operatora) i $\hat{A}(\vec{b}) = \vec{a} + \vec{b} = [1, 1]$ (drugi stupac matrice operatora). Dakle, matrica ovog operatora s obzirom na bazu $\mathcal{B}$ je kvadratna matrica*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Zadatak 147 *Koliko redova i stupaca će imati matrica linearnog operatora kakvog smo razmatrali sasvim na početku ovog odjeljka?*

Iz definicije je jasno:

Teorem 28 *Ako je $\hat{A} : V \rightarrow W$ linearan operator, onda s obzirom na bilo koje baze domene i kodomene matrica od $\hat{A}$ ima redaka kolika je dimenzija kodomene, a stupaca kolika je dimenzija domene. Posebno, matrice linearnih operatora na V su kvadratne.*

Uočimo i da matrice linearnih funkcionala imaju samo jedan redak, jer im je dimenzija kodomene 1. Također, budući da matrice moraju imati konačno mnogo redaka i stupaca, vidimo da se ne može definirati matrica linearnog operatora ako mu domena ili kodomena ima beskonačnu dimenziju.

Zadatak 148 *Ima li operator deriviranja $\frac{d}{dx} : C^1(\mathbb{R}) \rightarrow C(\mathbb{R})$ matrice? A kao operator s domenom koja je vektorski prostori iz primjera 271? Ako ima, zapišite jednu odgovarajuću matricu s obzirom na neku bazu.*

Budući da nulvektor u svakoj bazi ima iste koordinate (sve su 0), vidimo da nuloperator $\hat{0} : V \rightarrow W$ s obzirom na svaki par baza domene i kodomene ima istu matricu, matricu koja ima $m = \dim W$ redaka, $n = \dim V$ stupaca i čiji su svi elementi nule. Takve matrice nazivamo **nulmatricama** (tipa $m \times n$, oznaka $0_{m,n}$).

Jedinični operator $\hat{I} : V \rightarrow V$ sve vektore preslikava u same sebe: $\hat{I}(v) = v$ za sve $v \in V$. Stoga je $\hat{I}(e_i) = e_i$ za sve vektore bilo koje baze $(e_1, \dots, e_n)$ od V . Budući i -ti vektor bilo koje baze s obzirom na tu istu bazu ima koordinate jednake po redoslijedu odgovarajućem vektoru kanonske baze od $\mathbb{R}^n$, zaključujemo da je matrica jediničnog operatora s obzirom na svaku bazu kvadratna matrica reda n oblika

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Takve matrice zovemo **jedinične matrice**. Pozicije na kojima se nalaze brojevi 1 u jediničnoj matrici, dakle pozicije kojima je indeks retka jednak indeksu stupca, zovu se **dijagonalom matrice**. Dakle, jedinična matrica je svaka kvadratna matrica koja na dijagonali ima jedinice, a izvan dijagonale nule.

Na isti način se vidi da **operatori skaliranja** $\hat{S}_\alpha : V \rightarrow V$ s obzirom na svaku odabranu bazu imaju istu matricu: kvadratnu matricu reda n koja na svim pozicijama dijagonale ima α , a ostali elementi su joj nule. Takve matrice zovu se **skalarne matrice**.

Primjer 296 *Budući da je centralna simetrija zapravo operator skaliranja s -1 na $V^3(O)$, s obzirom na bilo koju bazu od $V^3(O)$ matrica centralne simetrije je matrica*

$$-I_3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in M_3.$$

Gore smo matricu označili kao suprotnu jediničnu matricu. Općenito, **suprotna matrica** matrice A je matrica $-A$ u kojoj su promijenjeni predznaci svih elemenata od A :

$$-A = [-a_{ij}],$$

gdje se s a_{ij} označava element matrice A koji je u i -tom retku i j -tom stupcu (na poziciji (i, j)). Također, ako pogledamo operator skaliranja s α prirodno je njihove matrice označiti s αI_n , jediničnu matricu pomnoženu sa skalarom α . Općenito se umnožak skalara α s matricom A dobije tako da sve elemente od A pomnožimo s α :

$$A = [\alpha a_{ij}].$$

Tako smo definirali **množenje matrice skalarom**. Uočimo da su matrice $-A$ i αA uvijek istog tipa kao A . Nije teško uvjeriti se da množenje matrica skalarima ima ista svojstva kao množenje skalarom u svakom vektorskom prostoru (vidi svojstva 7.1).

Primjer 297 Ako je $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$, onda je $-3A = \begin{pmatrix} -6 & -3 & -9 \\ 0 & 3 & -6 \end{pmatrix}$.

Dok su matrice nuloperatora, jediničnog operatora i operatora skaliranja iste s obzirom na sve baze, općenito matrica linearnog operatora, iz istog razloga kao koordinate pojedinog vektora, ne ovisi samo o operatoru, nego i odabranim bazama domene i kodomene.

Primjer 298 Linearan operator $\hat{A} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ zadan je kao tzv. pomak ulijevo: $\hat{A}(x, y, z) = (y, z, 0)$. Odredimo njegove matrice obzirom na kanonsku bazu od $\mathbb{R}^3$ i obzirom na bazu $\mathcal{B} = (a, b, c)$ gdje su $a = (4, 0, 3)$, $b = (-2, 1, 0)$ i $c = (0, -1, 1)$ (zadatak za Vas: provjerite da se stvarno radi o bazi od $\mathbb{R}^3$).

Ako uzmemo kanonsku bazu, imamo redom $\hat{A}(1, 0, 0) = (0, 0, 0)$, $\hat{A}(0, 1, 0) = (1, 0, 0)$, $\hat{A}(0, 0, 1) = (0, 1, 0)$, pa je s obzirom na kanonsku bazu matrica našeg operatora

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Za bazu $\mathcal{B}$ imamo redom $\hat{A}(4, 0, 3) = (0, 3, 0) = v_1$, $\hat{A}(-2, 1, 0) = (1, 0, 0) = v_2$, $\hat{A}(0, -1, 1) = (-1, 1, 0) = v_3$, no matrica

$$A' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

nije tražena matrica. Naime, kad smo ispisali A' , koordinate vektora v_1 , v_2 i v_3 uzeli smo kao koordinate s obzirom na kanonsku bazu. Dakle, A' je matrica operatora

Â ako u domeni uzmemo bazu $\mathcal{B}$, a u kodomeni kanonsku bazu. No, dogovorili smo se da se kod operatora kojima se domena i kodomena podudaraju u kodomeni bira ista baza kao u domeni. Stoga nam trebaju koordinate vektora v_1, v_2, v_3 u bazi $\mathcal{B}$. Kao što znamo, njih dobijemo rješavanjem sustava linearnih jednadžbi čiji koeficijenti uz nepoznanice, po stupcima, sadrže koordinate baze (a, b, c) u kanonskoj bazi, a u stupcu slobodnih članova koordinate vektora v_i u kanonskoj bazi (vidi str. 7.1). Budući da pri rješavanju sustava Gaußovom metodom eliminacija odluka o elementarnim transformacijama ovisi samo o „lijevom” dijelu, a ne o stupcu slobodnih članova i budući da u toj metodi ne dolazi do miješanja stupaca, možemo paralelno riješiti sva četiri sustava za dobivanje traženih koordinata:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 4 & -2 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \sim \dots \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{3}{5} & -\frac{1}{10} & \frac{1}{10} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{3}{5} & -\frac{3}{10} & -\frac{7}{10} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{3}{5} & -\frac{3}{10} & -\frac{3}{10} \end{array} \right).$$

Dakle, matrica $\hat{A}$ s obzirom na bazu $\mathcal{B}$ je

$$A'' = \left(\begin{array}{ccc} \frac{3}{5} & -\frac{1}{10} & \frac{1}{10} \\ -\frac{3}{5} & -\frac{3}{10} & -\frac{7}{10} \\ -\frac{3}{5} & -\frac{3}{10} & -\frac{3}{10} \end{array} \right) = \frac{1}{10} \cdot \left(\begin{array}{ccc} 6 & 1 & 1 \\ 12 & -3 & 7 \\ -18 & -3 & -3 \end{array} \right).$$

Iako su situacije kao u prethodnom primjeru moguće, u pravilu se za linearni operator uzima baza u kojoj on ima posebno „zgodnu“ matricu. Pogledajmo koje su to „najzgodnije” baze i odgovarajuće matrice za operatore zrcaljenja i rotacije ravnine i prostora.

Primjer 299 Neka je $\hat{m}$ zrcaljenje prostora $V^3(O)$ s obzirom na neku ravninu koja prolazi kroz O . Odaberimo bazu $\mathcal{B} = (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ prostora $V^3(O)$ tako da je ta baza ortogonalna i da se ravnina simetrije podudara s (x, y) -ravninom. Tada je $\hat{m}(\vec{a}) = \vec{a}$, $\hat{m}(\vec{b}) = \vec{b}$ i $\hat{m}(\vec{c}) = -\vec{c}$. Stoga je matrica operatora $\hat{m}$ s obzirom na bazu $\mathcal{B}$ matrica

$$M = \left(\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{array} \right).$$

Ako gledamo zrcaljenje ravnine (osnu simetriju) $\hat{m} : V^2(O) \rightarrow V^2(O)$, ako je moguće biramo ortogonalnu bazu $\mathcal{B} = (\vec{a}, \vec{b})$ kojoj jedan od vektora leži na osi simetrije, tj. biramo pravokutni koordinatni sustav tako da os simetrije bude jedna od koordinatnih osi. Analogno kao u primjeru 299 dobivamo da ako smo os simetrije uzeli kao x -os odnosno y -os, matrica operatora zrcaljenja je, ukoliko je koordinatni sustav pravokutni, dana s

$$M_x = \left(\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{array} \right) \quad \text{odnosno} \quad M_y = \left(\begin{array}{cc} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{array} \right).$$

Ako gledamo zrcaljenje $\hat{m} : V^3(O) \rightarrow V^3(O)$, po mogućnosti biramo bazu tako da ravnina simetrije bude jedna od koordinatnih ravnina, a treća os okomita na nju, tj. bazu takvu da je bar jedan vektor baze okomit na druga dva, a da ta dva leže u ravnini simetrije. Ovisno o tome jesmo li ravninu simetrije odabrali kao (x, y) -ravninu (i pritom je $\alpha = \beta = 90^\circ$), kao (y, z) -ravninu (i pritom je $\beta = \gamma = 90^\circ$) ili pak kao (x, z) -ravninu (i pritom je $\alpha = \gamma = 90^\circ$), analogno kao u primjeru 299 dobit ćemo da zrcaljenje ima matricu

$$M_{xy} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ odnosno } M_{yz} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ odnosno } M_{xz} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ako pak promatramo rotacije, „lijepe“ matrice dobivamo samo uz odabir ortonormiranih baza. Za rotaciju ravnine $\hat{r} : V^2(O) \rightarrow V^2(O)$ za kut ϕ oko O uz ortonormiranu bazu $(\vec{i}, \vec{j})$, lako vidimo da se $\vec{i}$ zarotira u $\cos \phi \vec{i} + \sin \phi \vec{j}$, a $\vec{j}$ se zarotira u $-\sin \phi \vec{i} + \cos \phi \vec{j}$. Stoga je dakle u ortonormiranoj bazi ravnine matrica rotacije za kut ϕ matrica

$$R_\phi = \begin{pmatrix} \cos \phi & -\sin \phi \\ \sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix}.$$

Ako promatramo rotaciju $\hat{r} : V^3(O) \rightarrow V^3(O)$ za kut α oko neke osi o koja prolazi kroz O , po mogućnosti biramo ortonormiranu bazu $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ tako da os rotacije bude jedna od koordinatnih osi. Ako smo primjerice os rotacije postavili kao z -os, onda se vektorima z -koordinata rotacijom oko z -osi ne mijenja, a pogled duž z -osi za prve dvije koordinate situaciju svodi na prethodni dvodimenzionalni slučaj. Stoga je matrica rotacije za kut ϕ oko z -osi, ukoliko je koordinatni sustav zadan parametrima $a = b = c = 1$, $\alpha = \beta = \gamma = 90^\circ$, dana s

$$R_{z,\phi} = \begin{pmatrix} \cos \phi & -\sin \phi & 0 \\ \sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (7.5)$$

Primjer 300 Rotacija reda 6 oko z -osi ima matricu

$$R_{z,60^\circ} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} & 0 \\ \sqrt{3} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Zadatak 149 Zaključite kako izgledaju matrice $R_{x,\phi}$ i $R_{y,\phi}$ rotacije za kut ϕ oko x - odnosno y -osi ako je koordinatni sustav Kartezijev!

Uočimo da matrice svih osnovnih linearnih operatora simetrije u ortonormiranim bazama $(I_2, I_3, -I_3, M_{xy}, M_{yz}, M_{xz}, R_\phi, R_{x,\phi}, R_{y,\phi}$ i $R_{z,\phi})$ imaju svojstva:

- Ako bilo koja dva različita retka ili stupca skalarno pomnožimo u $\mathbb{R}^2$ odnosno $\mathbb{R}^3$, dobit ćemo 0. Dakle, retci svake od navedenih matrica su međusobno ortogonalni, a tako i stupci.
- Ako bilo koji redak ili stupac skalarno pomnožimo sam sa sobom u $\mathbb{R}^2$ odnosno $\mathbb{R}^3$, dobit ćemo 1. Dakle, retci svake od navedenih matrica su norme 1, a tako i stupci.
- Broj redaka odnosno stupaca jednak je dimenziji unitarnog prostora u kom smo računali skalarni produkt.

Matrice s gornjim svojstvima nazivaju se **ortogonalne matrice**. Dakle:

Teorem 29 *Za svaki operator simetrije je svaka njegova matrica s obzirom na bilo koju ortonormiranu bazu ortogonalna matrica.*

Primjer 301 Matrica $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ ne može biti matrica nikojeg operatora simetrije s obzirom na neku ortonormiranu bazu jer nije ortogonalna (norma prvog retka je $\sqrt{2}$, norma drugog je 1, a skalarni produkt im je 2).

No, kao što koordinatama vektora nije svrha da u njih gledamo, nego da računanjem s njima možemo izvesti zaključke o vektoru, tako ni matrica linearnog operatora ne služi tome da ju gledamo, nego da pomoću nje možemo računati kako linearni operator djeluje na vektore domene, a i izračunavati kako djeluju razne kombinacije linearnih operatora (zbrojevi, razlike, kompozicije, inverzi). Kako se to radi vidjet ćemo u sljedećem odjeljku. Pritom ćemo se u primjerima koncentrirati na linearne operatore kojima su dimenzija domene i kodomene najviše 3 (uglavnom vektorske prostore geometrijskih vektora), no zaključke i pravila ćemo izreći za proizvoljne konačnodimenzionalne vektorske prostore kao domene i kodomene.

7.3.2 Operacije s matricama

Primjer 302 *Recimo da nas zanima na koju poziciju se zarotira neka točka prostora T (neki radij-vektor $\vec{r} = \overrightarrow{OT}$), ako se radi o rotaciji **8** reda 8 prostora $V^3(O)$ oko z -osi Kartezijevog Matrica našeg linearnog operatora matrica je, prema formuli 7.5 uz $\phi = \frac{360^\circ}{8} = 45^\circ$,*

$$R_{z,45^\circ} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \sqrt{2} & -\sqrt{2} & 0 \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Ako je $\vec{r} = [x, y, z]$, budući da je svaka rotacija oko osi kroz ishodište linearan operator, kao na početku prethodnog odjeljka lako izvedemo da je $\mathbf{8}(\vec{r}) = x \mathbf{8}(\vec{i}) +$

$y\mathbf{8}(\vec{j}) + z\mathbf{8}(\vec{k})$. Stupci matrice operatora sadrže koordinate slika vektora baze, pa zaključujemo da je

$$\mathbf{8}[x, y, z] = x \frac{1}{2}[\sqrt{2}, \sqrt{2}, 0] + y \frac{1}{2}[-\sqrt{2}, \sqrt{2}, 0] + z[0, 0, 2] = [(x-y)\frac{\sqrt{2}}{2}, (x+y)\frac{\sqrt{2}}{2}, z].$$

Ako bolje pogledamo prethodnu jednakost, vidimo da je prva koordinata od $\mathbf{8}(\vec{r})$ jednaka skalarnom produktu prvog retka matrice $R_{z,45^\circ}$ s (x, y, z) , druga koordinata od $\mathbf{8}(\vec{r})$ jr skalarni produkt drugog retka matrice $R_{z,45^\circ}$ s (x, y, z) , a treća koordinata od $\mathbf{8}(\vec{r})$ jr skalarni produkt trećeg retka matrice $R_{z,45^\circ}$ i (x, y, z) (sva tri skalarn produkta su u $\mathbb{R}^3$). To kraće zapisujemo ovako:

$$R_{z,45^\circ} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (x-y)\sqrt{2}/2 \\ (x+y)\sqrt{2}/2 \\ z \end{pmatrix}.$$

Gore smo vidjeli primjer standardnog zapisa koordinata vektora u kontekstu algebre matrica: Ako vektor v ima koordinate $(x, y, \dots)$ u odabranoj bazi, te koordinate zapisujemo kao matricu s jednim stupcem (tzv. **matrica-stupac**) u kojoj su po retcima nabrojane koordinate (i koju isto označavamo s v). Budući da je očigledno pitanje izbora hoćemo li koordinate vektora zapisivati kao n -torke u $\mathbb{R}^n$ ili kao matrice-stupce tipa $n \times 1$, očito je i da matrice-stupce tipa $n \times 1$ možemo zbrajati po koordinatama i množiti skalarom isto po koordinatama: Skup svih $n \times 1$ -matrica je n -dimenzionalni vektorski prostor (odnosno $2n$ -dimenzionalan ako se radi o identifikaciji $\mathbb{C}^n$ s matricama $n \times 1$). U ovoj korespondenciji se i pojam kanonske baze od $\mathbb{R}^n$ na očigledan način prenosi u vektorski prostor matrica tipa $n \times 1$.

Kao u prethodnom primjeru, općenito uvijek vrijedi: Ako je za linearni operator $\hat{A} : V \rightarrow W$ poznata njegova matrica A s obzirom na odabrane baze $\mathcal{B}_V$ i $\mathcal{B}_W$ domene i kodomene te ako je vektor $v \in V$ zadan koordinatama $(x_1, \dots, x_n)$ s obzirom na bazu $\mathcal{B}_V$, koordinate od $\hat{A}(v)$ u bazi $\mathcal{B}_W$ su redom skalarni produkti redaka matrice A s $(x_1, \dots, x_n)$, gledani kao standardni skalarni produkti u $\mathbb{R}^n$. Kažemo: Matricu A pomnožili smo s matricom-stupcem v i dobili matricu-stupac koja predstavlja sliku vektora v s obzirom na linearni operator $\hat{A}$. Uočimo da smo tako definirali množenje matrice A tipa $m \times n$ (matrice linearnog operatora s n -dimenzionalnog u m -dimenzionalni prostor) s matricom-stupcem v tipa $n \times 1$ (koordinatnom matricom vektora v iz domene) i rezultat je matrica-stupac tipa $m \times 1$ (koordinatna matrica vektora $\hat{A}(v)$ u kodomeni):

$$A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix},$$

pri čemu je

$$y_i = \langle (a_{i1}, \dots, a_{in}), (x_1, \dots, x_n) \rangle$$

(„ i -ti redak od A skalarno pomnožen s v “) za $i = 1, \dots, m$. Zbog tog što se (u konačnodimenzionalnom slučaju) djelovanje linearnog operatora svodi na množenje matricom, uobičajeno je pisati $\hat{A}v$ umjesto $\hat{A}(v)$ kad god je $\hat{A}$ linearan operator, te ćemo stoga u nastavku tako i činiti.

Zadatak 150 Zapišite standardni skalarni produkt u $\mathbb{R}^n$ kao množenje matricom.

Primjer 303 Koje su, u ortonormiranoj bazi $(\vec{i}, \vec{j})$, koordinate vektora $2\vec{i} - 5\vec{j} \in V^2(O)$ ako se on zarotira za 60° oko ishodišta? Matrica te rotacije je

$$R_{60^\circ} = \begin{pmatrix} 1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & 1/2 \end{pmatrix},$$

pa je

$$R \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \langle (1/2, -\sqrt{3}/2), (2, -5) \rangle \\ \langle (\sqrt{3}/2, 1/2), (2, -5) \rangle \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 + \frac{5\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{5}{2} \end{bmatrix},$$

dakle se $2\vec{i} - 5\vec{j}$ zarotira u vektor $\left(1 + \frac{5\sqrt{3}}{2}\right) \vec{i} + \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{5}{2}\right) \vec{j}$.

Linearni funkcional vektore preslikava u skalare, a i po prethodnom, vidimo da je rezultat množenja matrice-retka s matricom-stupcem skalar, preciznije: 1×1 -matrica. Pritom, to množenje ima smisla samo ako su broj stupaca matrice-retka linearnog funkcionala i broj redaka matrice-stupca (dimenzija domene).

Zadatak 151 Ima li smisla množiti matricu-stupac s matricom-stupcem?

Zadatak 152 Tzv. opće pozicije u prostornoj grupi $Pbcn$ su točke $T + (0, 0, 0)$, $T + \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, $T + \left(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, $T + \left(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\right)$, $T + \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right)$, $T + \left(\frac{1}{2}, 0, 0\right)$, $T + \left(0, \frac{1}{2}, 0\right)$, $T + \left(0, 0, \frac{1}{2}\right)$, gdje je T proizvoljna točka rešetke, ako je (kristalografska) baza prostora opća ortogonalna baza ($a \neq b \neq c \neq a$, $\alpha = \beta = \gamma = 90^\circ$). Zapišite jednu ne-jediničnu matricu koja (obzirom na bazu B) predstavlja operator simetrije za ovu kristalnu rešetku, tj. takav da se sve opće pozicije preslikavaju u sve opće pozicije.

Iz svojstava skalarnog produkta lako se vidi da množenje $A \cdot X$ matrice tipa $m \times n$ s matricom tipa $n \times 1$ ima svojstva $A \cdot (X_1 + X_2) = A \cdot X_1 + A \cdot X_2$ (distributivnost) $A \cdot (\alpha X) = \alpha A \cdot X$ (kvaziasocijativnost). Usporedimo li to s definicijom linearnog operatora zaključujemo da ne samo da svaki linearan operator između konačnodimenzionalnih prostora možemo opisati matricom, nego i avaka matrica predstavlja neki linearni operator: Ako je A proizvoljna matrica tipa $m \times n$, onda je s $\hat{A}(X) = A \cdot X$ zadan linearan operator koji preslikava matrice-stupce tipa $n \times 1$ u matrice-stupce $m \times 1$ i za njega je A matrica s obzirom na kanonske baze domene i kodomene.

Primjer 304 Neka je

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Odgovarajući linearan operator sigurno ide s nekog 2-dimenzionalnog u neki 2-dimenzionalni vektorski prostor. Definiramo li

$$\hat{A} \left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \right) := A \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x \\ 3y - x \end{bmatrix},$$

dobili smo linearan operator koji 2×1 -matricama pridružuje 2×1 -matrice, čija je matrica (s obzirom na kanonsku bazu) upravo A .

Zadatak 153 Kvadrat ima vrhove u točkama koje u Kartezijevom koordinatnom sustavu imaju koordinate $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(1, 1)$, $(0, 1)$. Neka je M proizvoljna 2×2 -matrica i $\hat{M}$ linearni operator na $V^2(O)$ definiran s

$$\hat{M}\vec{v} = \hat{M}(x\vec{i} + y\vec{j}) := M \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

U kakve četverokute $\hat{M}$ može preslikati zadani kvadrat? U kakve ne? Ako je neki drugi kvadrat određen vrhovima $(4, 4)$, $(6, 2)$, $(8, 4)$, $(6, 6)$, uz koje uvjete na M će se oba kvadrata preslikati u istu vrstu četverokuta?

Analogno kao zbrajanje realnih funkcija s istom domenom može se definirati i zbrajanje linearnih operatora s istom domenom i istom kodomenom: $(\hat{A} + \hat{B})v = \hat{A}v + \hat{B}v$. Uz uvjet poklapanja domena odnosno kodomena, zbroj linearnih operatora je linearan operator.

Zadatak 154 Riječima opišite djelovanje zbroja centralne simetrije s obzirom na O i zrcaljenja s obzirom na (x, y) -ravninu. Je li taj zbroj operator simetrije?

Ako smo fiksirali matrice domene i kodomene, zbroju linearnih operatora odgovara matrica koja je zbroj njihovih matrica. Pritom, zbog uvjeta na jednakost domena odnosno kodomena, dakle i odgovarajućih dimenzija, zaključujemo da se matrice mogu zbrajati samo ako su istog tipa. Zbroj matrica istog tipa $m \times n$ definiran je po pozicijama:

$$[a_{ij}] + [b_{ij}] = [a_{ij} + b_{ij}].$$

Rezultat zbrajanja matrica tipa $m \times n$ je matrica istog tog tipa. Oduzimanje matrica definiramo kao pribrajanje suprotne matrice: $A - B = A + (-B)$. Dakle, i oduzimati se mogu samo matrice istog tipa.

Primjer 305 Ako je $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ i $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, onda je

$$A + B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad A - B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 6 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Zadatak 155 Odaberite po volji dvije matrice $A, B \in M_{2,3}$ i neki skalar $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \neq 0$. Zatim riješite matricnu jednadžbu

$$A + \alpha X = B.$$

Svojstva zbrajanja linearnih operatora, odnosno matrica, ista su kao i svojstva zbrajanja vektora, pri čemu ulogu nulvektora preuzimaju nulmatrice $0_{m,n}$ odgovarajućeg tipa. Kad ta svojstva kombiniramo sa svojstvima množenja matrica skalarima vidimo da su uz zamjenu oznaka u, v, w s matricama A, B, C tipa $m \times n$ i 0 s $0_{m,n}$ zadovoljena sva definicijska svojstva (7.1) vektorskih prostora. Također, očigledno bi se matrica tipa $m \times n$ mogla zapisati kao $m \cdot n$ -torka brojeva iz $\mathbb{R}^{mn}$ (ako jednostavno zaredom sve njene retke zapišemo u jedan red) pa zaključujemo:

Propozicija 28 Skup svih realni matrica tipa $m \times n$, u oznaci $M_{m,n}$, je realni vektorski prostor.

U slučaju $n \times n$ -matrica pišemo M_n za $M_{n,n}$. Uočimo i da se opisanom vezom među vektorskim prostorom $M_{m,n}$ i $\mathbb{R}^{mn}$ pojam kanonske baze prirodno prenosi i u $M_{m,n}$ pri čemu će matrice kanonske baze od $M_{m,n}$ imati po jednu jedinicu (svaka na različitim pozicijama (i, j)), a sve ostalo nule, pa takve matrice označavamo s E_{ij} (matrica tipa $m \times n$ koja ima sve nule, osim na poziciji (i, j) gdje je joj je element 1).

Primjer 306 Kanonska baza četverodimenzionalnog prostora M_2 je $(E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22})$, gdje su

$$E_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, E_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, E_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, E_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Napomena 11 Ukoliko su matrice tipa $m \times n$ kompleksne, odgovarajući vektorski prostor označava se s $M_{m,n}(\mathbb{C})$ i, kao i sam $\mathbb{C}$, može se gledati i kao realni i kao kompleksni vektorski prostor. Pritom je kao realan $2mn$ -dimenzionalan, a kao kompleksan je mn -dimenzionalan.

Zadatak 156 Čini li skup svih realnih matrica vektorski prostor? Zašto?

Zadatak 157 Nadite jedan netrivialni potprostor realnog vektorskog prostora M_2 . Koja je dimenzija tog vektorskog prostora?

Propozicija 29 Realni vektorski prostori $M_{m,n}$ su $m \cdot n$ -dimenzionalni realni vektorski prostori.

Primjer 307 Bilo kojih pet realnih 2-matrica su linearno zavisne jer se radi o pet matrica iz M_2 koji ima dimenziju $2 \cdot 2 = 4$.

Na vektorskim prostorima matrica, osobito kvadratnih, često se koristi jedan linearan funkcional koji nosi ime trag. **Trag** je linearan funkcional na odabranom vektorskom prostoru matrica koji svakoj matrici tog prostora pridružuje zbroj njenih dijagonalnih elemenata. Primjerice, trag jedinične matrice reda n iznosi n , a trag matrice rotacije za kut ϕ oko z -osi (u Kartezijevom koordinatnom sustavu) iznosi $1 + 2 \cos \phi$.

Već smo rekli da je kompozicija linearnih operatora, kad ima smisla, linearan operator (teorem 26). Koristeći matrice lako se iz poznatih matrica komponiranih operatora izračunava i matrica njihove kompozicije. Preciznije rečeno: **Množenje matrica** je definirano tako da umnožak matrica $A \cdot B$ predstavlja kompoziciju $\hat{A} \circ \hat{B}$ odgovarajućih linearnih operatora. Budući da kompozicija funkcija, pa tako i linearnih operatora, općenito nije komutativna, pa čak ne mora biti definirana ni u oba redoslijeda, zaključujemo da ako je umnožak matrica $A \cdot B$ definiran, to ne mora značiti da je definiran i $B \cdot A$, a ako i jest, ne mora biti $A \cdot B = B \cdot A$.

Konkretno, recimo da imamo linearne operatore $\hat{A} : V \rightarrow W$ i $\hat{B} : U \rightarrow V$, kompozicija $\hat{A} \circ \hat{B}$ ima smisla i ima domenu U i kodomenu W . Neka je A matrica od $\hat{A}$ i B matrica od $\hat{B}$ s obzirom na neke baze od V i W odnosno od V i U , pri čemu za V (domenu od $\hat{A}$ i kodomenu od $\hat{B}$) podrazumijevamo da smo uzeli istu bazu i u konstrukciji matrice A i u konstrukciji matrice B . Želimo definirati matricu $A \cdot B$ tako da to bude matrica od $\hat{A} \circ \hat{B}$ (s obzirom na one odabrane baze od U i W). Iz odnosa brojeva redaka i stupaca matrice s dimenzijama domene i kodomene linearnog operatora vidimo da je uvjet da množenje matrica $A \cdot B$ ima smisla da matrica B mora imati onoliko redaka koliko A ima stupaca. Takve matrice A i B zovu se **ulančane matrice** i samo one se mogu množiti. Dakle, matrica A tipa $m \times n$ je ulančana i može se množiti s matricom B tipa $p \times q$ točno ako je $n = p$.

Nadalje, kompozicija $\hat{A} \circ \hat{B}$ ima domenu U , a kodomenu W , dakle matrica $A \cdot B$ od $\hat{A} \circ \hat{B}$ mora imati redaka koliko je dimenzija od W , a stupaca koliko je dimenzija od U . Dakle, umnožak dviju ulančanih matrica A tipa $m \times n$ i B tipa $n \times q$ je matrica tipa $m \times q$.

Ostaje još pitanje kako odrediti elemente u $A \cdot B$. To nećemo argumentirati, nego samo navodimo pravilo: Element na poziciji (i, j) umnoška $A \cdot B$ je skalarni produkt i -tog retka od A i j -tog stupca od B , oba shvaćena kao elementi od $\mathbb{R}^n$.

Primjer 308 S obzirom na standardnu ortonormiranu bazu, odredite matricu linearnog operatora $\hat{A} = m \circ 4$ rotorefleksije reda 4. Odaberimo Kartezijev koordinatni sustav tako da je os rotacije, tj. rotorefleksije, primjerice z -os. Tada je ravnina simetrije m koordinatna (x, y) -ravnina. Rotacija oko z -osi za $\phi = 90^\circ$ prema

formuli (7.5) ima matricu

$$R_{z,90^\circ} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

a zrcaljenje s obzirom na (x, y) -ravninu ima matricu

$$M_{xy} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Budući da kompoziciji operatora odgovara množenje njihovih matrica, tražena matrica rotorefleksije je (uz koordinatni sustav postavljen kako je rečeno na početku primjera)

$$M_{xy} \cdot R_{z,90^\circ} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

U prethodnom primjeru isti rezultat bismo dobili i množenjem u redosljedu $R_{z,90^\circ} \cdot M_{xy}$. No, podsjećamo da množenje matrica nije komutativno.

Zadatak 158 Naddite primjer dvije matrice tako da $A \cdot B$ ima smisla, a $B \cdot A$ nema smisla.

Primjer 309 Neka su

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Tada je

$$AB = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix},$$

ali

$$BA = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Zbog nekomutativnosti množenja matrica, često se kao „mjera nekomutativnosti” uzima njihov **komutator**

$$[A, B] = AB - BA.$$

Primjer 310 Komutator matrica A i B iz prethodnog primjera je

$$[A, B] = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Primjer 311 Paulijeve matrice spina su tri matrice koje se ponekad koriste za opis spinova elektrona (po jedna za svaki kutni moment):

$$S_x = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, S_y = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, S_z = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Za njih je

$$[S_x, S_y] = i\hbar S_z, [S_y, S_z] = i\hbar S_x, [S_z, S_x] = i\hbar S_y$$

i

$$S_x^2 + S_y^2 + S_z^2 = \frac{3}{4}\hbar^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Posljednja matrica predstavlja kvadrat spinskog kutnog momenta.

Osim nekomutativnosti, množenje matrica ima još jednu manu. Kako dobro znamo, ako je umnožak dva realna ili kompleksna broja 0, bar jedan od njih je sigurno 0. No, kod matrica ne možemo zaključiti analogno. Primjerice, umnožak matrice-retka $A = [1 \ 2]$ s matricom-stupcem $B = [-2 \ 1]^t$ je $[0] \in M_1$ iako ni A ni B nije nulmatrica. No, množenje matrica ima svojstva asocijativnosti, distributivnosti prema zbrajanju i kvaziasocijativnosti:

$$A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C, \quad \alpha(A \cdot B) = (\alpha A) \cdot B$$

$$A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C, \quad (A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C$$

za sve skalare α i kad god umnoži matrica u gornjim formulama imaju smisla. Također, jedinične matrice $I_n \in M_n$ kad se množe s drugim matricama s kojima su ulančane ne mijenjaju ih ($I_m \cdot A = A \cdot I_n = A$ za $A \in M_{m,n}$).

Zadatak 159 Ako je $A \in M_{m,n}$, za koje p i q ima smisla $A \cdot 0_{p,q}$? $0_{p,q} \cdot A$? Što je rezultat tih umnožaka?

Primijetimo sada i da se svaki sustav linearnih jednadžbi može zapisati kao jedna matrična linearna jednadžba

$$A \cdot X = B,$$

gdje je B matrica-stupac slobodnih članova, X je matrica stupac koja sadrži nepoznanice, a A je matrica koja sadrži koeficijente uz nepoznanice, u istom redosljedu kako se oni unose u matricu sustava za Gaußovu metodu eliminacije. Zapravo, u poglavlju 6.2 spomenuta matrica sustava je spoj dviju matrica A i B , tj. oblika $(A|B)$. Zbog opisane poveznice matrica s linearnim operatorima vidimo da je pitanje rješavanja sustava od m linearnih jednadžbi s n nepoznanica ekvivalentno pitanju određivanja vektora x (u n -dimenzionalnom prostoru $\mathbb{R}^n$) kojeg linearan operator $\hat{A}$ (s matricom A) preslikava u zadani vektor u kodomeni (analogno kao što je rješavanje jednadžbe $x^2 - 5x + 1 = 8$ određivanje elementa x domene funkcije $x \mapsto x^2 - 5x + 1$ kojeg ta funkcija preslikava u 8 u kodomeni).

Primjer 312 Sustav iz primjera 249 ima matricni oblik $AX = B$ uz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -3 \\ 8 & -24 & 10 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

Uočimo da nam umnožak i -tog retka od A s X i izjednačavanje s b_i točno daje i -tu jednadžbu sustava.

Dokažimo sada teorem 19. U tu svrhu treba prvo dokazati teorem 20. Ako imamo homogeni sustav u matricnom obliku $AX = 0_{m,1}$, neka su X_1 i X_2 dva njegova rješenja i α realan broj. Tada je $A(X_1 + X_2) = AX_1 + AX_2 = 0_{m,1} + 0_{m,1} = 0_{m,1}$ i $A(\alpha X_1) = \alpha AX_1 = 0_{m,1}$, dakle su i $X_1 + X_2$ i αX_1 također rješenja istog sustava. Time smo dokazali teorem 20. Prema propoziciji 25 zaključujemo da homogeni sustavi ili imaju jedinstveno (trivijalno) rješenje ili ih imaju beskonačno mnogo.

Ako pak gledamo nehomogeni sustav $AX = B$ s $B \neq 0_{m,1}$, očigledno je moguće da nema rješenja. Ako pak takav sustav ima bar jedno rješenje, odaberimo jedno od njegovih rješenja i označimo ga s X_P (tzv. partikularno rješenje). Nadalje, homogeni sustav s istom matricom koeficijenata, dakle sustav $AX = 0_{m,1}$, nazivamo (sustavu $AX = B$) pripadnim homogenim sustavom. On ili ima samo trivijalno rješenje ili ih ima beskonačno mnogo. Neka je X_H bilo koje rješenje pripadnog homogenog sustava i $X = X_P + X_H$. Tada je $AX = A(X_P + X_H) = AX_P + AX_H = B + 0_{m,1} = B$, dakle je za svako rješenje X_H pripadnog homogenog sustava $X = X_P + X_H$ rješenje sustava $AX = B$. Prema prethodnom zaključujemo da je dokazan teorem 19. Uočimo da skup rješenja nehomogenog sustava nije vektorski prostor: Ako su X_1 i X_2 dva rješenja, imamo $A(X_1 + X_2) = AX_1 + AX_2 = B + B = 2B \neq B$ ako B nije nulmatrica.

Kao što je kompozicija linearnih operatora, kad ima smisla, ponovno linearni operator, tako vrijedi i:

Teorem 30 Ako je linearan operator $\hat{A}$ bijekcija, onda je i njegova inverzna funkcija $\hat{A}^{-1}$ također linearan operator.

Primjer 313 Neka je $\hat{A} : V \rightarrow W$ linearan operator i $\dim V = 3$, $\dim W = 2$. Pretpostavimo da je $\hat{A}$ injekcija. Odaberimo bazu (a, b, c) za domenu. Vektori $\hat{A}a$, $\hat{A}b$ i $\hat{A}c$ su u dvodimenzionalnoj kodomeni, pa moraju biti linearno zavisni. Uzmimo da je $\hat{A}c = \alpha\hat{A}a + \beta\hat{A}b = \hat{A}(\alpha a + \beta b)$, dakle se $v = \alpha a + \beta b$ i c jednako preslikaju putem operatora $\hat{A}$. No, $v \neq c$ jer je (a, b, c) baza pa su ta tri vektora linearno nezavisna. Dakle, $\hat{A}$ dva različita vektora domene preslika u isti vektor kodomene te ne može biti injekcija.

Primjer 314 Neka je $\hat{A} : V \rightarrow W$ linearan operator i $\dim V = 2$, $\dim W = 3$. Pretpostavimo da je $\hat{A}$ surjekcija. Budući da je domena dvodimenzionalna,

svi vektori domene su oblika $v = \alpha a + \beta b$, gdje je (a, b) neka odabrana baza domene. Stoga je slika operatora $\hat{A}$ skup svih $\hat{A}v = \alpha\hat{A}a + \beta\hat{A}b$. To je očigledno najviše⁶ dvodimenzionalni potprostor kodomene pa ne može biti jednak cijeloj trodimenzionalnoj kodomeni.

Analogno kao u gornja dva primjera vidi se da linearni operator koji je invertibilan mora imati domenu i kodomenu iste dimenzije. Najčešće se uzima, a tako ćemo i mi, da ako nas zanima invertibilnost linearnog operatora uzimamo da je $V = W$, tj. gledamo samo linearne operatore na V . Takvi operatori s obzirom na svaku bazu $\mathcal{B}$ imaju neku kvadratnu matricu A reda $n = \dim V$. Ako je takav linearni operator bijekcija i $\hat{A}^{-1} : V \rightarrow V$ pripadni inverzni linearni operator, onda i on u istoj bazi ima neku kvadratnu matricu B reda n . Po definiciji inverzne funkcije imamo

$$\hat{A} \circ \hat{A}^{-1} = \hat{A}^{-1} \circ \hat{A} = \hat{I}_V.$$

Budući da kompoziciji linearnih operatora uz pretpostavku usklađenosti baza odgovara množenje matrica, a jediničnom operatoru odgovara jedinična matrica, vidimo da mora vrijediti

$$A \cdot B = B \cdot A = I_n.$$

Ovo razmišljanje navodi na sljedeću definiciju:

Definicija 52 (Inverzna matrica) Za kvadratnu matricu $A \in M_n$ njen *inverz (inverzna matrica od A)* je, ako postoji, kvadratna matrica $B \in M_n$ takva da vrijedi $A \cdot B = B \cdot A = I_n$. Ako takva matrica B postoji, jedinstveno je određena te se označava s A^{-1} (a matricu A zovemo invertibilnom ili regularnom matricom).

Opet zbog veze množenja matrica i komponiranja linearnih operatora zaključujemo: $\hat{A}$ je invertibilan točno ako je neka njegova matrica A invertibilna. Dakle, ako je A matrica invertibilnog linearnog operatora $\hat{A} : V \rightarrow V$ s obzirom na neku bazu od V , onda je A^{-1} matrica operatora $\hat{A}^{-1}$ s obzirom na istu bazu. Također primijetimo da nema smisla govoriti o invertibilnosti nekvadratnih matrica jer one odgovaraju linearnim operatorima kojima domena i kodomena nisu iste dimenzije, pa sigurno nisu bijekcije.

Lako je uvjeriti se da nije svaka kvadratna matrica invertibilna. Prvo, očito nuloperator ne može biti bijektivan (on sve vektore šalje u nulvektor pa ne može biti injekcija) pa ni kvadratne nulmatrice nisu invertibilne. No, nuloperatori nisu jedini ne-inverzibilni operatori.

Primjer 315 Neka je V vektorski prostor dimenzije 4 i $\mathcal{B}(e_1, e_2, e_3, e_4)$ bilo koja njegova baza. Definiramo linearni operator $\hat{A} : V \rightarrow V$ njegovim djelovanjem na bazi kao $\hat{A}e_i = 3e_1$ za $i = 1, 2, 3, 4$ (dakle, sve vektore baze šalje u trostruki prvi vektor baze, pa očito nije bijekcija). Matrica tog operatora s obzirom na bazu $\mathcal{B}$ ima

⁶Dvodimenzionalan ako su $\hat{A}a$ i $\hat{A}b$ linearno nezavisni, nul-dimenzionalan ako su oba nulvektori, a inače jednodimenzionalan.

prvi redak $(3, 3, 3, 3)$, a svi ostali elementi su joj 0, dakle nije nulmatrica. ali ne može biti invertibilna jer $\hat{A}$ nije invertibilan.

Analogno vidimo da na svakom vektorskom prostoru postoji beskonačno mnogo linearnih operatora na svakom (netrivijalnom) vektorskom prostoru koji nisu bijektivni.

Zaključujemo da beskonačno mnogo kvadratnih matrica nije invertibilno. Stoga, iako definicijsko svojstvo podsjeća na svojstvo recipročnog broja u skupu $\mathbb{R}$ ($x \cdot x^{-1} = x^{-1} \cdot x = 1$ za $x \neq 0$) ne možemo generalizirati definiciju dijeljenja brojeva ($x : y = x \cdot y^{-1}$ za $y \neq 0$) na dijeljenje matrica jer bismo iz njega morali isključiti beskonačno mnogo matrica-djelitelja.

Korisno je uočiti:

Teorem 31 *Ako je V netrivialan i ako postoji vektor $v \in V$, $v \neq \mathbf{0}$ kojeg linearni operator $\hat{A}$ preslikava u $\mathbf{0}$, onda $\hat{A}$ nije invertibilan. Stoga matrice koje sadrže nulstupac nisu invertibilne.*

Dokaz je jednostavan: Svaki linearni operator preslikava nulvektor u nulvektor, pa ako postoji još neki v koji se preslikava u nulvektor imamo dva elementa domene koji su se preslikali u isti element kodomene te operator nije injekcija. $\square$

Ostaje pitanje kako ćemo za danu matricu provjeriti je li invertibilna i, ako jest, kako joj naći inverz? Ponekad je inverz očigledan iz definicije linearnog operatora.

Primjer 316 *Ako je $R_{z,\phi}$ matrica rotacije za kut ϕ oko z -osi Kartezijevog koordinatnog sustava, onda je matrica rotacije oko z -osi za kut $2\pi - \phi$ jednaka matrici $R_{z,2\pi-\phi}$ jer su te dvije rotacije međusobno inverzne.*

Općenito je u pozadini traženja inverza matrice rješavanje sustava linearnih jednačini.

Primjer 317 *Neka je $\hat{A}$ zadan s $\hat{A}X = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$. Njegova matrica s obzirom na kanonsku bazu od $M_{2,1}$ je*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ako je taj linearni operator invertibilan, onda postoji matrica

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

takva da je

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

dakle postoje brojevi a, b, c, d takvi da su istovremeno zadovoljene jednadžbe

$$2a + c = 1, \quad 2b + d = 0, \quad -a = 0, \quad -b = 1.$$

Taj sustav ima jedinstveno rješenje $(a, b, c, d) = (0, -1, 1, 2)$, pa vidimo da je naš operator $\hat{A}$ je invertibilan i matrica njegovog inverza (s obzirom na kanonsku bazu od $M_{2,1}$) je

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Kao u ovom primjeru, tako vrijedi i općenito: Određivanje inverza kvadratne matrice A reda n ekvivalentno je rješavanju sustava linearnih jednadžbi koji proizlazi iz uvjeta $A \cdot A^{-1} = I_n$. Taj sustav ima n^2 nepoznanica (elementi matrice A^{-1}) i n^2 jednadžbi (po jedna koja proizlazi iz izjednačavanja svih pozicija od $A \cdot A^{-1}$ s odgovarajućim pozicijama u I_n). Ako malo bolje pogledamo gornji primjer, odnosno ako iskoristimo opću definiciju množenja matrica, vidimo da matricu A^{-1} zapravo možemo odrediti rješavanjem n sustava tipa $n \times n$ koji su svi oblika $A \cdot X_j = I_j$, gdje je X_j nepoznati j -ti stupac od A^{-1} , a I_j je j -ti stupac jedinične matrice. Budući da u Gaußovoj metodi eliminacija odluke o elementarnim transformacijama koje se provode ne ovise o stupcu slobodnih članova i budući da pritom ne dolazi do miješanja stupaca, svih tih n sustava možemo riješiti paralelno (kao u primjeru 298). Stoga je postupak za određivanje inverza matrice sljedeći: Primijenimo Gaußovom metodom eliminacija na matricu $[A|I_n]$ dok ne dobijemo oblik $[I_n|B]$. Ako smo uspjeli dobiti taj oblik, onda je $A^{-1} = B$, a ako u lijevom dijelu ne uspijemo dobiti jediničnu matricu, A nije invertibilna.

Primjer 318 Inverz matrice $A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ dobivamo eliminacijom

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \sim \dots \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 5/2 & 3 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -2 & 0 \end{array} \right)$$

te je $A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 5/2 & 3 & 1/2 \\ -1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$. Točnost računa možemo provjeriti pomoću definicije: $AA^{-1} = I_3$.

Zadatak 160 Uz koji uvjet je operator skaliranja invertibilan? Kako izgleda inverzna matrica njegove matrice?

Za invertiranje su posebno zgodne ortogonalne matrice. iPrvo ćemo definiciju ortogonalne matrice možemo pojednostaviti koristeći operaciju transponiranja. Ako matrici A zamijenimo retke i stupce („preklopimo ju preko dijagonale”), dobivamo njenu transponiranu matricu A^t . Preciznije:

Definicija 53 (Transponirana matrica) *Transponirana matrica matrice $A = [a_{ij}] \in M_{m,n}$ je matrica $A^t \in M_{n,m}$ koja na poziciji (i, j) ima a_{ji} .*

Primjer 319

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Očigledno vrijedi: $(A^t)^t = A$. Neke matrice su „imune“ na transponiranje.

Definicija 54 (Simetrična matrica) *Matricu nazivamo simetričnom ako je jednaka svojoj transponiranoj matrici, tj. ako je $a_{ij} = a_{ji}$ za sve i, j .*

Budući da transponiranje zamjenjuje broj redaka i stupaca, zaključujemo da simetrične matrice moraju biti kvadratne.

Primjer 320 *Matrica*

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

je simetrična.

Napomena 12 *Kod kompleksnih matrica simetričnost obično nije zanimljiva, već srodno svojstvo hermitske konjugiranosti: Za matricu $A \in M_{m,n}(\mathbb{C})$ njena hermitski konjugirana matrica je matrica $A^* \in M_{n,m}(\mathbb{C})$ koju iz A dobijemo tako da ju transponiramo i sve elemente kompleksno konjugiramo (tj. na poziciji (i, j) u A^* je $\overline{a_{ji}}$). Kompleksna matrica je hermitska ako je jednaka svojoj hermitski konjugiranoj matrici (dakle, ako je $A = A^*$). I hermitske matrice moraju biti kvadratne. Pritom za dijagonalne elemente vidimo da mora vrijediti $a_{ii} = \overline{a_{ii}}$, tj. svaki dijagonalni element mora sam sebi biti kompleksno konjugiran. Stoga dijagonalni elementi hermitske matrice moraju biti realni brojevi.*

Sad se ranija definicija ortogonalne matrice može koristeći množenje matrica kraće zapisati kao

$$A A^t = A^t A = I_n.$$

Vidimo da je matrica ortogonalna točno ako joj je inverz jednak transponiranoj matrici. Posebno, inverzna matrica bilo kojeg operatora simetrije je njezina transponirana matrica, uz uvjet da se radi o matrici tog operatora s obzirom na neku ortonormiranu bazu.

Zadatak 161 *S obzirom na ortonormiranu bazu za $V^3(O)$ odredite matricu inverza rotoreflexije reda 5 kojoj je os rotacijske komponente x -os.*

Lako je provjeriti da vrijedi

$$\frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

tj. da je

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

Vidimo da je inverz kvadratne matrice reda 2 moguće izračunati uvijek, osim ako je umnožak njenih dijagonalnih elemenata umanjen za umnožak ostala dva elementa jednak 0. Brojevi tipa $ad - bc$ pojavljuju se i u raznim drugim kontekstima.

Primjer 321 Ako su u Kartezijevom koordinatnom sustavu zadane točke $P = (a, b)$ i $Q = (c, d)$, površina A paralelograma određenog s $\overrightarrow{OP}$ i $\overrightarrow{OQ}$ je

$$A = |\overrightarrow{OP} \times \overrightarrow{OQ}| = |ad - bc|.$$

Vidjeli smo da je invertibilnost matrice $A \in M_2$ moguće karakterizirati jednim brojem koji se iz nje lako izračuna. Taj broj nazivamo determinantom matrice A .⁷

Definicija 55 (Determinanta) Broj $\det A$ koji karakterizira invertibilnost kvadratne matrice A (ako je jednak 0, matrica nema inverz, a ako je različit od 0, ima ga) zove se determinantom matrice.

Po prethodnom vidimo da je determinanta kvadratne matrice A reda 2 (uz oznake kao gore) $\det A = ad - bc$. Ako su matrici A ispisani njezini elementi, njezina determinanta omeđuje se vertikalnim crtama:

$$\det A = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc.$$

Determinante kvadratnih matrica reda 3 imaju značajnu primjenu u klasičnoj algebri vektora, vezano za sve primjene vektorskog i mješovitog produkta (vidi odjeljke 5.2.2 i 5.2.3), dakle za izračunavanje površina paralelograma i trokuta, provjeru komplanarnosti, volumene prizmi i piramida, ... Za determinante reda 3 često se koristi **Sarrusovo pravilo**:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{33}a_{21}a_{12}.$$

⁷Prava matematička definicija je drugačija i temelji se na permutacijama. Zainteresirane čitatelje u tu svrhu upućujemo na standardnu matematičku literaturu iz linearne algebre.

Primjer 322

$$\begin{vmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 4 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 4 & 2 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 0 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= -2 \cdot 0 \cdot 1 + 0 \cdot (-1) \cdot 4 + 1 \cdot 1 \cdot 2 - 1 \cdot 0 \cdot 4 - (-2) \cdot (-1) \cdot 2 - 0 \cdot 1 \cdot 1 = -2$$

Sarrusovo pravilo se ne može generalizirati na veće matrice. Općenito se za računanje determinanti koristi **Laplaceov razvoj** (koji je primjenjivi i na matrice reda 3). Laplaceov se razvoj može provoditi po bilo kojem (i -tom) retku ili bilo kojem (j -tom) stupcu. Laplaceov razvoj po nekom retku (ili stupcu) izračunava determinantu kvadratne matrice A reda n tako da svaki element tog retka (odnosno stupca) pomnoži s determinantom matrice koju bismo iz A dobili tako da iz nje pobrišemo redak i stupac tog elementa. Tako dobijemo n umnožaka, koje zatim naizmjenično zbrajamo i oduzimamo. Kod razvoja po neparnim retcima (stupcima) alterniranje zbrajanja i oduzimanja je $+ - + - + - \dots$, a kod razvoja po parnim retcima (stupcima) alterniranje zbrajanja i oduzimanja kreće s $-$.

Primjer 323 Izračunajmo $\det(A)$ razvojem po prvom stupcu ako je

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 & 5 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 3 & 2 & -3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Imamo

$$\begin{aligned} \det(A) &= 2 \cdot \det(A_{11}) - 2 \cdot \det(A_{21}) + 0 \cdot \det(A_{31}) - 3 \cdot \det(A_{41}) = \\ &= 2\det(A_{11}) - 2\det(A_{21}) - 3\det(A_{41}). \end{aligned}$$

$$\text{Dalje je } \det(A_{11}) = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 5 \\ -1 & -1 & -1 \\ 2 & -3 & 4 \end{vmatrix} = 32, \det(A_{21}) = \begin{vmatrix} 7 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 2 & -3 & 4 \end{vmatrix} = -44 \text{ i}$$

$$\det(A_{41}) = \begin{vmatrix} 7 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 5 \\ -1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 36 \text{ pa je}$$

$$\det(A) = 2 \cdot 32 - 2 \cdot (-44) - 3 \cdot 36 = 44.$$

Kako se iz prethodnog primjera može vidjeti, količina računa se smanjuje ako je u retku (ili stupcu) po kojemu razvijamo poneka nula. Stoga se preporuča da se determinanta matrice računa razvojem po onom retku ili stupcu u kojem je najviše nula.

Zadatak 162 *Izračunajte*

$$\begin{vmatrix} 2 & 5 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -5 & 2 \\ 3 & 1 & -1 & 0 \end{vmatrix}.$$

S obzirom na to da Laplaceov razvoj po i -tom stupcu daje isti rezultat kao razvoj po i -tom retku zaključujemo da je determinanta svake matrice jednaka determinanti njezine transponirane matrice:

$$\det(A^t) = \det(A).$$

Napomena 13 *Za kompleksne matrice je $\det(A^*) = \overline{\det(A)}$.*

Nadalje, znamo da matrice koje sadrže nulstupac odgovaraju neinvertibilnim linearnim operatorima (a i Laplaceov razvoj po nulstupcu dao bi nulu). Ako matrica sadrži nulredak, njezina transponirana matrica sadrži nulstupac, pa je opet determinanta nula:

Propozicija 30 *Ako kvadratna matrica A sadrži nulstupac ili nulredak, onda je $\det(A) = 0$.*

Specijalno vrijedi:

$$\det(0_n) = 0.$$

Gornje-/donjetrokutaste matrice su one kvadratne matrice čiji svi elementi ispod/iznad dijagonale su 0. Matrice koje su istovremeno gornje- i donjetrokutaste zovu se **dijagonalne**. Uzastopnim Laplaceovim razvojem po prvom retku odnosno stupcu lako zaključimo:

Propozicija 31 *Determinanta gornjetrokutaste, donjetrokutaste ili dijagonalne matrice jednaka je produktu elemenata na dijagonali.*

Specijalno, vrijedi:

$$\det(I_n) = 1.$$

Za velike matrice s malo nula zgodno je kombinirati računanje determinanti s elementarnim transformacijama. Pritom vrijedi: Zamjena dva retka ili dva stupca matrice mijenja predznak determinante. Ako matrici neki redak ili stupac pomnožimo skalarom α , determinanta dobivene matrice je α puta determinanta matrice prije tog množenja. Ako jedan redak matrice pribrojimo nekom drugom (ili jedan stupac drugom stupcu), determinanta se ne mijenja. Posljedično, determinanta se ne mijenja niti kad višekratnik nekog retka dodamo drugom (ili višekratnik nekog stupca dodamo drugom stupcu). Iz navedenog zaključujemo da za kvadratnu matricu A reda n vrijedi

$$\det(\alpha A) = \alpha^n \det(A).$$

Dakle, determinanta kao funkcija $\det : M_n \rightarrow \mathbb{R}$ za $n \neq 1$ nije homogena (a lako je uvjeriti se da nije ni aditivna), pa nije linearan funkcional. Iz navedenog je očito i da ako u matrici imamo dva proporcionalna retka (ili stupca), oduzimanje prikladnog višekratnika jednog od drugog ne mijena determinantu, ali rezultira matricom s nulretkom (odnosno nulstupcem), odnosno ako matrica sadrži dva proporcionalna retka (ili stupca), determinanta joj je 0, tj. matrica nije invertibilna.

Napomena 14 Svojstvo da determinanta promijeni predznak pri zamjeni redaka ili stupaca iskorišeno je pri formalizaciji Paulijevog principa u kvantnoj mehanici. Paulijev princip glasi: Ukupna elektronska valna funkcija, koja uključuje i spin, mora biti antisimetrična na izmjenu bilo kojeg para elektrona. Jednostavnija formulacija je: Nikoja dva elektrona u istom atomu ne mogu imati iste sve kvantne brojeve. To se izvodi iz nemogućnosti razlikovanja elektronâ.

Valne funkcije su funkcije koje opisuju vjerojatnost da se neki elektron nađe u nekoj točki prostora. Ako atom ima n elektrona, svaki od njih je opisan po jednom valnom funkcijom $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n$. Želimo li opisati ukupnu valnu funkciju koja opisuje svih n elektrona istovremeno, najjednostavnija ideja bila bi definirati ju kao produkt svih valnih funkcija pojedinih elektrona, no tako definirana ukupna valna funkcija omogućavala bi razlikovanje elektronâ pa nije prihvatljiva. Primjerice, za slučaj dva elektrona 1 i 2 (možemo ih poistovjetiti primjerice s njihovim pozicijama tj. radij-vektorima), moguće su dvije valne funkcije sustava: $\psi_1(1)\psi_2(2)$ i $\psi_1(2)\psi_2(1)$. Zbog nemogućnosti razlikovanja elektronâ slijedi da ne možemo dati prednost jednoj od te dvije funkcije, pa se kao ukupna valna funkcija uzima jedna od dvije funkcije $\psi_1(1)\psi_2(2) \pm \psi_1(2)\psi_2(1)$. Čestice kojima odgovara opis pomoću antisimetrične varijante (promjena redoslijeda mijenja predznak valne funkcije) $\psi_1(1)\psi_2(2) - \psi_1(2)\psi_2(1) = \begin{vmatrix} \psi_1(1) & \psi_1(2) \\ \psi_2(1) & \psi_2(2) \end{vmatrix}$ zovu se fermioni (to su primjerice elektroni), a one kojima odgovara simetrična varijanta $\psi_1(1)\psi_2(2) + \psi_1(2)\psi_2(1)$ zovu se bosoni (primjerice fotoni).

Poopćenjem gornje ideje dobiva se da je za sustav od n elektrona (ili općenitije fermiona) ukupna valna funkcija dana tzv. Slaterovom determinantom

$$\psi(1, 2, \dots, n) = \frac{1}{\sqrt{n!}} \begin{vmatrix} \psi_1(1) & \psi_1(2) & \dots & \psi_1(n) \\ \psi_2(1) & \psi_2(2) & \dots & \psi_2(n) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \psi_n(1) & \psi_n(2) & \dots & \psi_n(n) \end{vmatrix}.$$

Iako determinanta nema svojstvo linearnosti, ima jedno drugo dobro svojstvo:

Teorem 32 (Binet-Cauchy) Determinanta umnoška matrica jednaka je umnošku njihovih determinanti:

$$\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B)$$

za kvadrante matrice A i B istog reda n .

Posljedica Binet-Cauchyjevog teorema je da je determinanta inverzne matrice recipročna determinanti polazne matrice. Naime, iz $A \cdot A^{-1} = I_n$ slijedi $\det(A \cdot A^{-1}) = \det(I_n) = 1$. Po Binet-Cauchyjevom teoremu lijeva strana zadnje jednakosti je $\det(A) \cdot \det(A^{-1})$ pa je

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}.$$

Iz toga se ponovno vidi da vrijedi svojstvo istaknuto u definiciji determinante: Ako je matrica invertibilna, determinanta joj je različita od nule i obrnuto, ako je $\det(A) \neq 0$, onda je A invertibilna.

Budući da je za ortogonalne matrice $A^t = A^{-1}$, a znamo i $\det(A^t) = \det(A)$, zaključujemo da za ortogonalne matrice vrijedi

$$\det(A) = \det(A^t) = \det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)},$$

tj.

$$\det(A)^2 = 1.$$

Budući da su elementi ortogonalne matrice realni, slijedi da joj je i determinanta realan broj pa dobivamo:

Teorem 33 *Determinanta ortogonalne matrice je uvijek ili 1 ili -1.*

Može se dokazati da su trag i determinanta invarijante linearnih operatora na n -dimenzionalnim prostorima, tj. da za dani $\hat{A} : V \rightarrow V$ sve matrice od A uvijek imaju isti trag i istu determinantu. Budući da operatori simetrije u ortonormiranim bazama imaju ortogonalne matrice, zaključujemo:

Korolar 2 *Svaki operator simetrije u svakoj bazi ima matricu s determinantom 1 ili -1.*

Cramerov sustav, inverzna matrica

Jedna od primjena determinanti je i **Cramerovo pravilo** za rješavanje sustava linearnih jednadžbi. Cramerov sustav je $n \times n$ -sustav s jedinstvenim rješenjem (tj. sustav $AX = B$ s invertibilnom A). Komponente rješenja takvog sustava lako se opisuju preko determinanti: Ako su nepoznanice $x_1, x_2, \dots, x_n$, onda je

$$x_i = \frac{D_i}{D}$$

za sve i , gdje je $D = \det(A)$, a D_i je determinanta matrice koju iz A dobijemo tako da joj i -ti stupac zamijenimo stupcem slobodnih članova B . Ovo pravilo ima više nedostataka. Praktično je samo za 2×2 - i 3×3 -sustave jer za veće sustave računanje determinanti iziskuje više računa nego Gaußova metoda eliminacija. Nadalje, u slučaju da je $D = 0$, ne možemo zaključiti ima li sustav beskonačno mnogo rješenja ili ih uopće nema. Uz to, Cramerovo pravilo nije primjenjivo na sustave kod kojih broj nepoznanica nije jednak broju jednadžbi.

Primjer 324 *Riješimo sustav*

$$2x - y + z = 2,$$

$$-x - y + 3z = 0,$$

$$x + 2y - 5z = 1$$

Cramerovim pravilom. Imamo:

$$D = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & -5 \end{vmatrix} = -1, \quad D_1 = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & -5 \end{vmatrix} = -4,$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & -5 \end{vmatrix} = -11, \quad D_3 = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -5,$$

pa je $x = (-4)/(-1) = 4$, $y = (-11)/(-1) = 11$ i $z = (-5)/(-1) = 5$.

Zadatak 163 *Za kakve m i n sustav*

$$mx + ny = 1, \quad x + y = mn$$

ima jedinstveno rješenje?

Promotrimo sad ponovno prostor geometrijskih vektora $V^3(O)$. Neka je dana neka njegova desna baza $B = (\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3)$ (direktna baza).. Znamo da je volumen jedinične ćelije $V = \vec{a} \cdot \vec{b} \times \vec{c}$. Vektori baze B mogu se zapisati svojim koordinatama u ortonormiranoj bazi $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$: $\vec{a} = [a_1, a_2, a_3]$, $\vec{b} = [b_1, b_2, b_3]$, $\vec{c} = [c_1, c_2, c_3]$. Neka je

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}.$$

Tada je zbog invarijantnosti determinante matrice operatora

$$V = \vec{a} \cdot \vec{b} \times \vec{c} = \det A.$$

Iz svojstava determinanti znamo i da je $\det(A A^t) = \det A \cdot \det A^t = \det A \cdot \det A = (\det A)^2 = V^2$. No,

$$\begin{aligned} A A^t &= \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 & a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 & a_1 c_1 + a_2 c_2 + a_3 c_3 \\ a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 & b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 & b_1 c_1 + b_2 c_2 + b_3 c_3 \\ a_1 c_1 + a_2 c_2 + a_3 c_3 & b_1 c_1 + b_2 c_2 + b_3 c_3 & c_1^2 + c_2^2 + c_3^2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Budući da su koordinate $\vec{a} = [a_1, a_2, a_3]$, $\vec{b} = [b_1, b_2, b_3]$, $\vec{c} = [c_1, c_2, c_3]$ dane s obzirom na ortonormiranu bazu, posljednja matrica jednaka je matrici

$$M = \begin{pmatrix} \vec{a} \cdot \vec{a} & \vec{a} \cdot \vec{b} & \vec{a} \cdot \vec{c} \\ \vec{b} \cdot \vec{a} & \vec{b} \cdot \vec{b} & \vec{b} \cdot \vec{c} \\ \vec{c} \cdot \vec{a} & \vec{c} \cdot \vec{b} & \vec{c} \cdot \vec{c} \end{pmatrix},$$

te slijedi $V^2 = \det M$, odnosno

$$V = \sqrt{\det M}.$$

Matrica M naziva se metričkim tenzorom baze B te se osim za izračunavanje volumena jedinične ćelije može iskoristiti i za računanje skalarnog produkta dvaju vektora zadanim koordinatama u bazi B :

$$[x, y, z] \cdot [x', y', z'] = (x \ y \ z) \cdot M \cdot \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}.$$

Zadatak 164 Za neki kristal pripadna kristalografska direktna baza ima parametre $a = b = c = 255 \text{ \AA}$, $\alpha = \beta = \gamma = 75,5^\circ$. Izračunajte d_{111} , V^* i kut između vektora $\vec{a}$ i $\vec{a}^*$.

Zadatak 165 Za parametre baze kao u primjeru 274 izračunajte metričke tenzore direktne i recipročne baze, d_{310} , iznose vektora $[3, 1, 0]$, $[3, 1, 0]^*$, kut među njima, površinu paralelograma kojeg ta dva vektora razapinju i njihov vektorski produkt.

Zadatak 166 Dokažite da je za svaku direktnu bazu metrički tenzor njezine recipročne baze inverz njenog metričkog tenzora.

Primjer 325 Dokažimo kristalografsku restrikciju; Rotacije koje su simetrije rešetke u dvo- ili trodimenzionalnom prostoru mogu biti samo rotacije redova 1, 2, 3, 4 i 6.

Ako je $\hat{r}$ rotacija prostora $V^2(O)$ (oko O) ili $V^3(O)$ (oko neke osi o kroz O) koja je simetrija rešetke, to znači da točke rešetke preslikava u točke rešetke. Neka je R matrica te rotacije s obzirom na ortonormiranu bazu (u trodimenzionalnom slučaju bazu odaberimo tako da joj je treći vektor na osi rotacije o). Trag od R je (vidi odjeljak 51) jednak $1 + 2 \cos \alpha$, gdje je α kut rotacije. Ako pak matricu istog operatora uzmemo s obzirom na bazu u kojoj točke rešetke imaju cjelobrojne koordinate, budući da se radi o simetriji rešetke, dobit ćemo matricu R' kojoj je trag cijeli broj. Budući da je trag invarijanta linearnog operatora slijedi da je $1 + 2 \cos \alpha$ cijeli broj, tj. $2 \cos \alpha$ je cijeli broj, dakle je $\cos \alpha$ jedan od brojeva $-1, -\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, 1$.

7.4 Svojstvene vrijednosti i svojstveni vektori

Primjer 326 Vektori paralelni s osi rotacije se u odnosu na ostale vektore prostora V^3 ističu (s obzirom na odnos prema rotaciji) time da se ne mijenjaju: Ako je $\vec{v}$ paralelan s osi rotacije $\hat{r}$, onda je $\hat{r}\vec{v} = \vec{v}$. Reći ćemo: Za operator rotacije u V^3 svaki vektor paralelan osi rotacije je svojstven, s pripadnom svojstvenom vrijednosti 1.

Primjer 327 Promotrimo linearni operator određen matricom

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

na standardni način (dakle, operator $\hat{A} : M_{2,1} \rightarrow M_{2,1}$, $\hat{A}X = A \cdot X$). Za $X = (x_1 \ x_2)^t$ imamo

$$\hat{A}X = \begin{pmatrix} x_1 + 5x_2 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

Postoji li za ovaj operator vektor domene koji se preslika u samog sebe? Ako da, trebalo bi vrijediti $(x_1, x_2) = (x_1 + 5x_2, x_2)$. U drugoj komponenti sigurno dolazi do podudaranja, a iz uvjeta podudarnost prvih komponenti ($x_1 = x_1 + 5x_2$) proizlazi uvjet $x_2 = 0$. Dakle, ako je $X = (x_1 \ 0)^t$, onda je $\hat{A}X = X$. Reći ćemo: Linearan operator $\hat{A}$ posjeduje svojstveni vektor s pripadnom svojstvenom vrijednosti 1.

Primjer 328 Operator skaliranja $\hat{S}_\alpha : V \rightarrow V$, tj. množenje skalarom α svaki vektor v preslikava u αv . Reći ćemo: Za operator skaliranja s α svi vektori su svojstveni i odgovarajuća svojstvena vrijednost je α .

Kao što sugeriraju primjeri, kad govorimo o svojstvenim vektorima i svojstvenim vrijednostima, za dani linearni operator nas zanima koje vektore preslikava u njihove skalarne višekratnike („kojim vektorima se čuva smjer“ je prikladno pitanje ako se radi o linearnim operatorima na prostorima geometrijskih vektora). Budući da su za svaki vektor on i njegov svaki skalarni višekratnik elementi istog vektorskog prostora, vidimo da ovakvo pitanje ima smisla samo za linearne operatore kojima se domena i kodomena podudaraju. Neka je stoga u nastavku $\hat{A} : V \rightarrow V$ linearni operator.

Definicija 56 (Svojstveni vektori i svojstvene vrijednosti) Neka je $\hat{A} : V \rightarrow V$ linearan operator. Za skalar λ kažemo da je svojstvena vrijednost operatora $\hat{A}$ ako postoji vektor $v \in V$, $v \neq 0$, takav da je

$$\hat{A}v = \lambda v.$$

Ako je λ svojstvena vrijednost linearnog operatora $\hat{A}$, svaki $v \in V$ koji zadovoljava gornju jednakost zovemo svojstvenim vektorom operatora $\hat{A}$ (pridruženim svojstvenoj vrijednosti λ). Skup svih svojstvenih vrijednosti linearnog operatora zove se spektar operatora.

U definiciji svojstvenih vrijednosti smo „zabranili“ nulvektor jer bi inače svaki skalar bio svojstvena vrijednost svakog linearnog operatora ($\hat{A}\mathbf{0} = \mathbf{0} = \lambda\mathbf{0}$ za sve skalare λ). No, naravno, za svaku svojstvenu vrijednost je nulvektor jedan od pripadnih svojstvenih vektora.

Primjer 329 *Stacionarna Schrödingerova jednadžba $\hat{H}\psi = E\psi$ je problem svojstvenih vrijednosti Hamiltonijana: Svojstvene vrijednosti Hamiltonijana su moguće energije sustava.*

Teorem 34 *Skup svih svojstvenih vektora linearnog operatora na V koji odgovaraju istoj svojstvenoj vrijednosti čine potprostor od V , tzv. **svojstveni potprostor**.*

Dokažimo to. Neka je λ svojstvena vrijednost operatora $\hat{A} : V \rightarrow V$ i neka je v neki pripadni svojstveni vektor. Tada su svi njemu proporcionalni vektori $w = \mu v$ također svojstveni za $\hat{A}$ uz istu svojstvenu vrijednost:

$$\hat{A}(\mu v) = \mu \hat{A}v = \mu \lambda v = \lambda(\mu v).$$

Nadalje, ako su v i w dva svojstvena vektora koji odgovaraju svojstvenoj vrijednosti λ imamo

$$\hat{A}(v + w) = \hat{A}v + \hat{A}w = \lambda v + \lambda w = \lambda(v + w),$$

odnosno dokazali smo da je zbroj dva svojstvena vektora ponovno svojstveni vektor, uz istu svojstvenu vrijednost. Dakle, skup svih svojstvenih vektora linearnog operatora $\hat{A} : V \rightarrow V$ koji odgovaraju danoj svojstvenoj vrijednosti λ čini potprostor od V . $\square$

Svojstveni potprostor operatora $\hat{A} : V \rightarrow V$ koji odgovara svojstvenoj vrijednosti λ označit ćemo s $V_{\hat{A},\lambda}$.

Primjer 330 *Iz primjera 328 vidimo da je za svaki operator skaliranja $\hat{S}_\alpha : V \rightarrow V$*

$$V_{\hat{S}_\alpha,\alpha} = V$$

i da je to jedini svojstveni potprostor za taj slučaj (spektar od $\hat{S}_\alpha = \{\alpha\}$).

Specijalno, budući da je $\hat{I} = \hat{S}_1$, jedinični operator ima jednu svojstvenu vrijednost, to je 1 (spektar mu je $\{1\}$), a pripadni svojstveni potprostor je čitava domena tog operatora.

Pogledajmo linearne operatore simetrija na $V^2(O)$ i $V^3(O)$. Budući da u tim prostorima vrijedi da su dva vektora istog smjera točno ako je jedan jednak skalar puta drugi, vidimo da su operatorima simetrije svojstveni oni vektori kojima se djelovanjem operatora ne promijeni smjer.

U dvodimenzionalnom slučaju imali smo operatore rotacija oko O i operatore osnih simetrija s obzirom na pravce kroz O . Netrivijalna rotacija u dvodimenzionalnom slučaju nema svojstvenih vektora ni vrijednosti (spektar joj je prazan) jer

svakom vektoru osim nulvektora mijenja smjer. Osna simetrija čuva smjer vektorima koji su na osi simetrije ili koji su okomiti na nju. Prvi se preslikavaju sami u sebe, pa je odgovarajuća svojstvena vrijednost 1, odnosno svojstveni potprostor osne simetrije koji odgovara svojstvenoj vrijednosti 1 je skup svih vektora na osi simetrije. Oni drugi se preslikavaju u sebi suprotne, pa je odgovarajuća svojstvena vrijednost -1 , odnosno svojstveni potprostor osne simetrije koji odgovara svojstvenoj vrijednosti -1 je skup svih vektora na pravcu kroz O koji je okomit na os simetrije. Spektar osne simetrije je $\{-1, 1\}$.

U trodimenzionalnom slučaju uz rotacije oko osi kroz O i zrcaljenja s obzirom na ravnine kroz O imamo i centralne simetrije, no one su skalarni operatori s faktorom -1 pa im je cijeli $V^3(O)$ svojstveni potprostor za svojstvenu vrijednost -1 i nemaju drugih svojstvenih vrijednosti. Spektar centralne simetrije je $\{-1\}$. Netrivijalna rotacija u trodimenzionalnom slučaju, kao što smo vidjeli u uvodnom primjeru ovog odjeljka, ima svojstvenu vrijednost 1, a pripadni svojstveni potprostor čine vektori na osi rotacije. Ostalim vektorima se netrivijskom rotacijom mijenja smjer, pa je 1 jedina svojstvena vrijednost za rotacije. Spektar netrivijske rotacije prostora je $\{1\}$. Za zrcaljenja u trodimenzionalnom slučaju kao i u dvodimenzionalnom imamo dvije svojstvene vrijednosti 1 i -1 , odnosno opet je spektar $\{-1, 1\}$. No, prvoj sad odgovara svojstveni potprostor svih vektora u ravnini simetrije. Drugoj kao i u prethodnom slučaju odgovara svojstveni potprostor vektora na normali ravnine simetrije.

Posljednji slučaj se ističe u odnosu na ostale: Za zrcaljenje u $V^3(O)$ imamo svojstvenu vrijednost (to je 1) kojoj odgovara svojstveni potprostor dimenzije veće od 1. U takvom slučaju govorimo o degeneraciji: Ako istoj svojstvenoj vrijednosti odgovaraju dva ili više linearno nezavisnih svojstvenih vektora (tj. svojstveni potprostor ima dimenziju veću od 1), tu svojstvenu vrijednost nazivamo **degeneriranom**.

Primjer 331 U kvantnoj mehanici u slučaju degeneriranih svojstvenih vrijednosti govorimo o degeneriranom stanju sustava. Primjerice, za energetske nivoe (svojstvene vrijednosti Hamiltonijana) opisane glavnim kvantnim brojem $n > 1$ i azimutnim kvantnim brojem $0 < l < n$ dolazi do degeneracija, tj. postoji više neproporcionalnih valnih funkcija (različitih orbitala, primjerice za $l = 1$ i $n = 2$ imamo 3 tzv. 2p-orbitale, koje opisuju elektrone s istom energijom).

Ako je operator $\hat{A} : V \rightarrow V$ invertibilan, on ne može nenul vektor preslikati u nulvektor (zašto?), dakle ne postoji $v \neq \mathbf{0}$ takav da je $\hat{A}v = \mathbf{0} \cdot v$. Budući da invertibilnim operatorima odgovaraju invertibilne matrice, zaključujemo:

Teorem 35 Linearni operator je invertibilan (odnosno, matrica je invertibilna) točno ako mu (joj) spektar ne sadrži 0.

Također, budući da je $\hat{A}v = \lambda v$ za svaku svojstvenu vrijednost λ i pripadni svojstveni vektor v , u slučaju kad je V unitaran imamo $\|\hat{A}v\| = |\lambda| \cdot \|v\|$. Ako je $\hat{A}$

još ortogonalan operator znamo i $\|\hat{A}v\| = \|v\|$, dakle je $|\lambda| = 1$, odnosno dokazali smo:

Teorem 36 *Svojstvene vrijednosti ortogonalnih operatora (operatora simetrije) mogu biti samo 1 i -1 .*

Rekli smo već da su determinanta i trag invarijante linearnih operatora, tj. sve matrice istog linearnog operatora imaju istu determinantu i isti trag, tj. možemo govoriti o determinanti i tragu operatora. Stoga ako znamo da je $\hat{A}$ neki operator simetrije na $V^2(O)$ ili $V^3(0)$, kako smo vidjeli u prethodnim odjeljcima, on ima determinantu 1 ili -1 i, kako smo vidjeli gore, jedine moguće svojstvene vrijednosti su mu ± 1 . Ako ima determinantu -1 , radi se o centralnoj simetriji, zrcaljenju, rotoinverziji ili rotorefleksiji, a ako ima determinantu 1, onda se radi o rotaciji. Ako je $\det \hat{A} = 1$, tj. ako je $\hat{A}$ rotacija, onda (kao u dokazu kristalografske restrikcije) znamo i da je $\text{tr} \hat{A} = 1 + 2 \cos \varphi$, tj. kut rotacije je $\arccos \frac{\text{tr} \hat{A} - 1}{2}$. Os rotacije je pravac na kojem leži bilo koji od nenul-svojstvenih vektora. Ako je pak $\det \hat{A} = -1$, vrstu operatora simetrije kao i položaj njegovog centra/osi/ravnine dobijemo analiziranjem svojstvenih potprostora, vidi kasniji primjer 334.

Kako odrediti svojstvene vektore i vrijednosti danog linearnog operatora $\hat{A} : V \rightarrow V$ (na konačnodimenzionalnom prostoru V , $\dim V = n$)? Neka je $A \in M_n$ matrica tog operatora obzirom na neku bazu B od V . Budući da djelovanju operatora na vektor odgovara množenje matrice operatora s matricom stupcem, definicijska jednakost sad poprima matrični oblik

$$Av = \lambda v,$$

(gdje je v matrica-stupac koja sadrži koordinate svojstvenog vektora u bazi B). Ta je jednakost ekvivalentna s

$$(A - \lambda I_n)v = 0_{n,1}, \quad (7.6)$$

što je matrična jednadžba koja odgovara homogenom $n \times n$ -sustavu linearnih jednadžbi s matricom koeficijenata $A - \lambda I_n$. Znamo da takav sustav ima jedinstveno, trivijalno rješenje, točno ako je ta matrica invertibilna, tj. ako joj je determinanta različita od 0. Dakle, ako je $\det(A - \lambda I_n) \neq 0$, onda jedino nulvektor zadovoljava definicijsku jednakost pa λ nije svojstvena vrijednost. Uzevši u obzir da je determinanta invarijanta operatora, $\det(A - \lambda I_n)$ će imati istu vrijednost neovisno o odabiru baze B , dakle vrijedi:

Teorem 37 *Ako je $A \in M_n$ matrica linearnog operatora $\hat{A}$, svojstvene vrijednosti operatora $\hat{A}$ su rješenja jednadžbe (stupnja n)*

$$\det(A - \lambda I_n) = 0.$$

Ta jednadžba se zove se *karakterističnom jednadžbom* operatora $\hat{A}$ (odnosno, matrice A).

Vidimo da iz toga slijedi da su ne samo determinanta i trag, nego i svojstveni vektori, spektar i karakteristični polinom invarijante operatora, tj. uvijek ćemo za njih dobiti iste rezultate neovisno o tome koju matricu danog linearnog operatora odaberemo.

Zadatak 167 *Dokažite da linearni operator na trodimenzionalnom prostoru uvijek ima bar jednu realnu svojstvenu vrijednost.*

Zadatak 168 *Dokažite da ako su svih n rješenja karakteristične jednadžbe realna, onda je njihov umnožak (svako množimo onoliko puta kolika mu je kratnost) jednak determinanti operatora $\hat{A}$. Uputa: Koristite Vièteove formule.*

Budući da je stupanj karakteristične jednadžbe jednak dimenziji od V , vidimo da spektar operatora sadrži najviše n različitih svojstvenih vrijednosti. Ako smo odredili spektar od $\hat{A}$, za svaki λ u spektru odgovarajući svojstveni potprostor je skup rješenja homogenog sustava 7.6. Točnije, rješenja tog sustava daju koordinate (u bazi na koju se odnosi matrica A) svojstvenih vektora koji odgovaraju svojstvenoj vrijednosti λ .

Primjer 332 *Odredimo spektar i svojstvene vektore operatora $\hat{A} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ koji je obzirom na neku bazu od $\mathbb{R}^2$ prikazan matricom*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Karakteristična jednadžba je

$$\begin{vmatrix} 2 - \lambda & -4 \\ -1 & -1 - \lambda \end{vmatrix} = (\lambda + 2)(\lambda - 3) = 0.$$

Njena rješenja su $\lambda_1 = -2$ i $\lambda_2 = 3$, dakle spektar našeg operatora je skup $\{-2, 3\}$.

Svojstvene vektore koji odgovaraju svojstvenoj vrijednosti 3 dobijemo rješavanjem homogenog sustava kojem je matrica koeficijenata $A - 3I$:

$$\left(\begin{array}{cc|c} -1 & -4 & 0 \\ -1 & -4 & 0 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

pa je $x_1 + 4x_2 = 0$, tj. $x_1 = -4t$, $x_2 = t \in \mathbb{R}$. Rješenja (svojstveni vektori matrice, tj. operatora A koji pripadaju svojstvenoj vrijednosti 3) su vektori iz $\mathbb{R}^2$ oblika

$$(x_1, x_2) = (-4t, t) = t(-4, 1).$$

Zadatak 169 *Odredite svojstvene vektore operatora iz prethodnog primjera koji pripadaju svojstvenoj vrijednosti -2 .*

Primjer 333 Promotrimo linearan operator na $\mathbb{R}^3$ koji obzirom na neku bazu ima matricu

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Njegov karakteristični polinom je

$$k_A(\lambda) = -\lambda(2 - \lambda)^2$$

pa su mu svojstvene vrijednosti $\lambda = 0$ i $\lambda = 2$. Odredimo svojstvene vektore za svojstvenu vrijednost 2, tj. riješimo homogeni sustav s matricom $A - 2I$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \end{array} \right).$$

Rješenje sustava su sve trojke (x_1, x_2, x_3) sa svojstvom $x_1 - x_3 = 0$, $x_2 = t \in \mathbb{R}$ i $x_3 = s \in \mathbb{R}$, tj. trojke oblika $(s, t, s) = s(1, 0, 1) + t(0, 1, 0)$. Za $t = 0$ dobivamo svojstveni vektor $(1, 0, 1)$, a za $s = 0$ svojstveni vektor $(0, 1, 0)$. Vektori $(1, 0, 1)$ i $(0, 1, 0)$ nisu proporcionalni, dakle su linearno nezavisni, pa svojstvenoj vrijednosti 2 odgovaraju dva linearno nezavisna svojstvena vektora. Prema tome, $\lambda = 2$ je degenerirana svojstvena vrijednost operatora prikazanog matricom A .

Primjer 334 Linearan operator $\hat{A}$ na $V^3(O)$ je ortogonalan i s obzirom na neku bazu ima matricu

$$A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \sqrt{3} & \sqrt{3} - 1 & 2 - \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -1 - \sqrt{3} & -\sqrt{3} \\ -1 & 1 + \sqrt{3} & 3 \end{pmatrix}.$$

Determinanta ove matrice je -1 , dakle se radi o centralnoj simetriji, zrcaljenju, rotoinverziji ili rotorefleksiji.

Trag ove matrice je 1, dakle se ne može raditi o centralnoj simetriji (trag bi bio -3).

Trag svakog zrcaljenja je 1, rotorefleksije je $2 \cos \alpha - 1$, a rotoinverzije $-2 \cos \alpha - 1$. Dakle, ako se radi o rotorefleksiji morao bi biti $\alpha = 360^\circ$ (tj. rotorefleksija koja je „čisto“ zrcaljenje), a ako se radi o rotoinverziji morao bi biti $\alpha = 180^\circ$ (no, nije teško uvjeriti se da je rotoinverzija reda 2 oko neke osi isto što i zrcaljenje s obzirom na ravninu okomitu na os). Dakle, naš linearan operator je zrcaljenje s obzirom na neku ravninu.

Svojstvene vrijednosti su 1 i -1 , pri čemu je 1 degenerirana. Dakle, ravnina ovog zrcaljenja je ravnina kroz O kojoj normala ima smjer svojstvenih vektora od -1 . Jedan takav je $\vec{n} = [1, 0, 1]$, tj. ravnina zrcaljenja je ravnina kroz O normale $\vec{n} = \vec{a} + \vec{c}$ ako je $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ baza s obzirom na koju je dana gornja matrica. Ako je ta baza ortonormirana, jednadžba ravnine zrcaljenja bila bi $x + z = 0$, a inače bismo jednadžbu te ravnine $Ax + By + Cz = 0$ dobili tako da odredimo koordinate $[A, B, C]^*$ vektora $\vec{n}$ u recipročnoj bazi baze $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$.

Primjer 335 Ako je

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

onda je

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 4 - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & -1 - \lambda \end{vmatrix} = -\lambda(4 - \lambda)(-1 - \lambda)$$

pa je spektar te matrice $\{0, 4, -1\}$.

Gornji rezultat nije slučajan, naime vrijedi:

Teorem 38 Svojstvene vrijednosti linearnog operatora kojemu u nekoj bazi odgovara dijagonalna matrica su brojevi na njoj dijagonali. Odgovarajući svojstveni vektori su redom vektori baze na koju se odnosi ta matrica.

Zadatak 170 Dokažite gornji teorem!

S obzirom da su dijagonalne matrice posebno zgodne za račune s matricama, postavlja se pitanje dijagonalizacije: Može li se zadani linearni operator **dijagonalizirati**, tj. postoji li baza za V s obzirom na koju mu je matrica dijagonalna? Posljedica prethodnog teorema je:

Korolar 3 Linearni operator $\hat{A}: V \rightarrow V$ se može dijagonalizirati ako i samo ako postoji baza od V čiji svi elementi su njegovi svojstveni vektori.

Primjer 336 U modelu krutog rotora koji se koristi za objašnjenje rotacijskih spektara molekula, molekula se gleda kao skup jezgri na fiksnim međusobnim položajima određenim prosječnom geometrijom molekule u određenom elektronskom i vibracijskom stanju. Kinetička energija T rotacije krutog tijela može se izračunati formulom

$$T = \frac{1}{2} \omega^t I \omega,$$

gdje je ω vektor kutne brzine, a I tzv. tenzor inercije (kvadratna matrica reda 3 na čijoj dijagonali su momenti inercije obzirom na odabrane koordinatne osi, a izvan dijagonale su tzv. produkti inercije).

Matrica I se uvijek može dijagonalizirati u nekoj bazi $\{a, b, c\}$ — ti dijagonalni elementi (svojstvene vrijednosti $I_a \leq I_b \leq I_c$) zovu se glavni momenti inercije, a vektori baze $\{a, b, c\}$ (odnosno odgovarajuće koordinatne osi) zovu se glavne osi inercije. Vrijedi:

$$T = \frac{1}{2} (I_a \omega_a^2 + I_b \omega_b^2 + I_c \omega_c^2),$$

gdje su $\omega_a, \omega_b, \omega_c$ koordinate od ω obzirom na bazu $\{a, b, c\}$.

Temeljem te dijagonalizacije rotori se klasificiraju na linearne ($I_a = 0, I_b = I_c$), sferne ($I_a = I_b = I_c$), simetrične (dva jednaka glavna momenta inercije, treći različit) i asimetrične (sva tri glavna momenta inercije različita).

Općenito nije lako iz dane jedne matrice linearnog operatora saznati može li se taj operator dijagonalizirati. Iznimka su simetrični operatori na unitarnim prostorima. Ako je V realan unitaran prostor, linearan operator $\hat{A} : V \rightarrow V$ je simetričan (hermitski) ako vrijedi: $\langle \hat{A}v, w \rangle = \langle v, \hat{A}w \rangle$ za sve vektore $v, w \in V$. U slučaju kompleksnih vektorskih prostora govorimo o hermitskim operatorima. Simetrični i hermitski operatori imaju isključivo realne svojstvene vrijednosti. Za slučaj konačnodimenzionalnih prostora vrijedi: Sve matrice simetričnog operatora su simetrične (a sve matrice hermitskog operatora su hermitske). Simetrični i hermitski operatori, tj. operatori kojima je u nekoj bazi matrica simetrična odnosno hermitska, mogu se dijagonalizirati.

Primjer 337 Jedan od postulata kvantne mehanike je ne samo da se dinamičke veličine Ω klasične fizike u kvantnoj mehanici opisuju linearnim operatorima $\hat{\Omega}$ (na prostorima valnih funkcija), nego i da se mjerenjem veličine Ω za rezultat mogu dobiti samo svojstvene vrijednosti operatora $\hat{\Omega}$. Primjerice, kad bismo mjerili energiju sustava, dobivali bismo svojstvene vrijednosti Hamiltonijana.

Da bismo se osigurali da mjerne veličine budu realne, postavlja se zahtjev: dinamičke veličine Ω klasične fizike se u kvantnoj mehanici opisuju hermitskim linearnim operatorima $\hat{\Omega}$.

Zadatak 171 Argumentirajte zašto se linearni operator čija karakteristična jednadžba ima onoliko različitih rješenja kolika je dimenzija prostora sigurno može dijagonalizirati!

Formule

Osnovne računske operacije u skupu $\mathbb{R}$

$$x^n = \underbrace{x \cdot x \cdot x \cdots x}_n, \quad x^{-n} = \frac{1}{x^n}, \quad (x \neq 0) \quad x^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{x^m},$$

$$a^{b+c} = a^b \cdot a^c, \quad a^{b-c} = \frac{a^b}{a^c}, \quad a^{(b^c)} = a^{b^c} \neq (a^b)^c = a^{b \cdot c}$$

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2, \quad (a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b), \quad a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$$

Rješenja kvadratne jednadžbe

$$a x^2 + b x + c = 0 : \quad x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4a c}}{2a}$$

Eksponencijalne i logaritamske funkcije

$$\log_a a^x = x, \quad x \in \mathbb{R}; \quad a^{\log_a y} = y, \quad y > 0$$

$$\log_a (x x') = \log_a x + \log_a x', \quad \log_a \frac{x}{x'} = \log_a x - \log_a x' \quad (x, x' > 0)$$

$$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}, \quad \log_{1/a} x = -\log_a x \quad (a, b > 0; a, b \neq 1; x > 0)$$

$$u(x)^{v(x)} = \exp(v(x) \ln u(x))$$

Trigonometrijske i ciklometrijske funkcije

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x, \quad \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$$

$$\sin(2x) = 2 \sin x \cos x, \quad \cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x$$

$$\sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \cos x \sin y, \quad \cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y.$$

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}, \quad \operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{1}{\operatorname{tg} x}.$$

Derivacije realnih funkcija jedne varijable

Jednadžba tangente na graf funkcije f u točki c :

$$y - f(c) = f'(c) \cdot (x - c).$$

Tablica derivacija:

$f(x)$	$f'(x)$
C	0
x^n	$n x^{n-1}$
a^x	$a^x \ln a$
$\log_a x$	$\frac{1}{x \ln a}$
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$
$\operatorname{tg} x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$
$\operatorname{ctg} x$	$-\frac{1}{\sin^2 x}$
$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\operatorname{arctg} x$	$\frac{1}{1+x^2}$
$\operatorname{arcctg} x$	$-\frac{1}{1+x^2}$
$\operatorname{sh} x$	$\operatorname{ch} x$
$\operatorname{ch} x$	$\operatorname{sh} x$

$$(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x) \quad (C f(x))' = C f'(x), \quad \mathrm{d}f = f'(x) \, \mathrm{d}x$$

$$(f(x) g(x))' = f(x) g'(x) + f'(x) g(x) \quad \left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$$

$$(g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x) \quad (\ln f(x))' = \frac{f'(x)}{f(x)} \quad (f^{-1})'(f(x)) = \frac{1}{f'(x)}$$

Uvjeti za lokalne ekstreme dvaput derivabilnih funkcija $f : D \rightarrow \mathbb{R}$:

- $c \in D$, $f'(c) = 0$, $f''(c) < 0 \Rightarrow c$ je točka lokalnog maksimuma od f .
- $c \in D$, $f'(c) = 0$, $f''(c) > 0 \Rightarrow c$ je točka lokalnog minimuma od f .

Integrali realnih funkcija jedne varijable

Tablica neodređenih integrala:

$F(x)$	$\int F(x) dx$
K	$Kx + C$
$x^\alpha, \alpha \neq -1$	$\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$
$\frac{1}{x}$	$\ln x + C$
a^x	$\frac{a^x}{\ln a} + C$
$\sin x$	$-\cos x + C$
$\cos x$	$\sin x + C$
$\frac{1}{1+x^2}$	$\arctg x + C$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin x + C$

$$\int (F(x) + G(x)) dx = \int F(x) dx + \int G(x) dx, \quad \int K F(x) dx = K \int F(x) dx.$$

$$\int_a^a F(x) dx = 0, \quad \int_a^b F(x) dx = \int_a^c F(x) dx + \int_c^b F(x) dx, \quad \int_a^b F(x) dx = - \int_b^a F(x) dx$$

- Ako je F parna, $\int_{-c}^c F(x) dx = 2 \int_0^c F(x) dx$;
- ako je F neparna, $\int_{-c}^c F(x) dx = 0$.

Formula parcijalne integracije

$$\int u dv = uv - \int v du, \quad \int_a^b u dv = uv|_a^b - \int_a^b v du$$

Formula supstitucije

$$\int F(f(x))f'(x) dx = (y = f(x)) = \int F(y) dy, \quad \int_a^b F(f(x))f'(x) dx = \int_{f(a)}^{f(b)} F(y) dy.$$

Parametarski zadane krivulje

- Kružnica ili kružni luk polumjera R sa središtem (x_0, y_0) : $x = x_0 + R \cos t$, $y = y_0 + R \sin t$ za t iz prikladnog intervala.
- Elipsa ili luk elipse s poluosima duljina a (horizontalna poluos) i b (vertikalna poluos) i središtem (x_0, y_0) : $x = x_0 + a \cos t$, $y = y_0 + b \sin t$ za t iz prikladnog intervala.

Parametarsko deriviranje (2D)

$$x = x(t), y = y(t) \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{\dot{y}}{\dot{x}}, v = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}$$

Limesi funkcija

Važni limesi u točki

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\exp(x) - 1}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{a}{x^n} = +\infty \quad (n \in \mathbb{N}, a > 0),$$

$$\lim_{x \rightarrow 0-} \frac{a}{x^n} = +\infty \quad (n \in \mathbb{N}, n \text{ paran}, a > 0), \quad \lim_{x \rightarrow 0-} \frac{a}{x^n} = -\infty \quad (n \in \mathbb{N}, n \text{ neparan}, a > 0),$$

$$\lim_{x \rightarrow 0+} \log_a x = +\infty \quad (0 < a < 1), \quad \lim_{x \rightarrow 0+} \log_a x = -\infty \quad (a > 1).$$

Važni limesi u beskonačnosti

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} C = C$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{x^a} = 0 \quad (a > 0)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = 0 \quad (0 < a < 1), \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = 0 \quad (a > 1).$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

Asimptote

- $y = L$ je horizontalna asimptota za $y = f(x) \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L$ i (li) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L$;

- $y = kx + l$ je horizontalna asimptota za $y = f(x) \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - kx) = L$ i(li) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - kx) = L$, pri čemu je $k \neq 0$.
- $x = c$ je vertikalna asimptota za $y = f(x) \Leftrightarrow$ bar jedan od jednostranih limesa od f u c je beskonačan.

Prosječna vrijednost po dijelovima neprekidne $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$

$$\overline{F} = \frac{1}{b-a} \int_a^b F(t) \, dt$$

Nepravi integrali

$$\int_{-\infty}^b F(t) \, dt = \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{-R}^b F(t) \, dt, \quad \int_a^{+\infty} F(t) \, dt = \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_a^R F(t) \, dt,$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} F(t) \, dt = \int_{-\infty}^c F(t) \, dt + \int_c^{+\infty} F(t) \, dt$$

$$\int_0^{+\infty} x^n \exp(-ax) \, dx = \frac{n!}{a^{n+1}}, \quad \int_0^{+\infty} \exp(-ax^2) \, dx = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{a}} \quad (a > 0)$$

- Ako je $x = a$ vertikalna asimptota za F ,

$$\int_a^b F(x) \, dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \int_{a+\varepsilon}^b F(x) \, dx.$$

- Ako je $x = b$ vertikalna asimptota za F ,

$$\int_a^b F(x) \, dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \int_a^{b-\varepsilon} F(x) \, dx.$$

- Ako je za neki $c \in \langle a, b \rangle$ pravac $x = c$ VA za f :

$$\int_a^b F(x) \, dx = \int_a^c F(x) \, dx + \int_c^b F(x) \, dx.$$

Veza Kartezijevih i polarnih koordinata u ravnini

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi,$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{y}{x}.$$

Kompleksni brojevi

$$z = x + y i \Rightarrow -z = -x - y i, \quad \bar{z} = x - y i,$$

$$z \cdot \bar{z} = |z|^2, \quad \frac{1}{z} = \frac{1}{|z|^2} \cdot \bar{z},$$

$$|z| = +\sqrt{x^2 + y^2}, \quad \operatorname{tg} \arg(z) = \frac{y}{x}.$$

$$(x + y i) \pm (x' + y' i) = (x \pm x') + (y \pm y') i$$

$$\exp(i t) = \cos t + i \sin t$$

$$z = |z| \exp(i \varphi), \quad \bar{z} = |z| \exp(-i \varphi) = |z| \exp(i (2\pi - \varphi)), \quad \frac{1}{z} = \frac{1}{|z|} \exp(-i \varphi)$$

$$|z| \exp(i \varphi) \cdot |w| \exp(i \theta) = |z| |w| \exp(i(\varphi + \theta)), \quad \frac{|z| \exp(i \varphi)}{|w| \exp(i \theta)} = \frac{|z|}{|w|} \exp(i(\varphi - \theta))$$

$$z^n = |z|^n \exp(i n \varphi) \quad \text{za } n \in \mathbb{Z}$$

$$\sqrt[n]{|z|} \cdot \exp\left(i \frac{\varphi}{n} + \frac{2\pi}{n} \cdot k\right) \quad \text{za } k = 0, 1, \dots, n-1 \quad (n \in \mathbb{N})$$

Bibliografija

- [1] P. ATKINS, J. DE PAULA, Physical Chemistry. Oxford University Press, 2006.
- [2] T. CVITAŠ, materijali iz fizikalne kemije, ftp://ftp.chem.pmf.hr/download/cvitas/Fiz_Kem/, pristupljeno 2. listopada 2009.
- [3] P. DAWKINS, Paul's Online Math Notes. <http://tutorial.math.lamar.edu/>, pristupljeno 1. rujna 2025.
- [4] G. JUST, D. OELSCHLÄGEL, Mathematik für Chemiker. Verlag Harri Deutsch, Thun, 1981.
- [5] S. KUREPA, Matematička analiza 2. Tehnička knjiga, Zagreb, 1971.
- [6] R. G. MORTIMER, Mathematics for Physical Chemistry, 3rd ed., Elsevier, 2005.
- [7] G. PÓTA, Mathematical Problems for Chemistry Students. Elsevier, 2006.
- [8] E. A. REINSCH, Mathematik für Chemiker. Teubner, 2004.
- [9] V. SIMEON, Kemijska termodinamika, 1. poglavlje, primjerak za studentsku uporabu. Zagreb, 2004.
- [10] E. STEINER, The Chemistry Maths Book. Oxford University Press, 2008.
- [11] University of Cambridge: NRICH enriching mathematics. <http://nrich.maths.org/>, pristupljeno 1. rujna 2025.

Kazalo

- 0^0 , 4
- A^n , 235
- $C(I)$, 235
- $C^1(I)$, 237
- V^2 , 182
- $V^2(O)$, 182
- V^3 , 182
- $V^3(O)$, 182
- $\mathbb{R}^n$, 246
- $d(A, B)$, 175
- ćelija, jedinična, 277
- čestica u jednodimenzionalnoj kutiji, 161
- aditivnost, 249
- aditivnost deriviranja, 73, 145
- ako, 3
- ako i samo ako, 3
- aksceleracija, 74
- algebra, linearna, 181
- amplituda, 56
- analiza, matematička, 67
- antiderivacija, 75, 86
- aplikata, 201
- aproksimacija, lokalna, 69
- apscisa, 8, 201
- apsolutna vrijednost, 5, 64, 92, 145
- apsolutna vrijednost kompleksnog broja, 166, 170
- argument kompleksnog broja, 166, 170
- arkus-funkcije, 57
- arkus-kosinus, 58
- arkus-kotangens, 58
- arkus-sinus, 57
- arkus-tangens, 58
- asimptota, 34, 124, 125
- asimptota, horizontalna, 34, 35, 41, 43, 48, 59, 124, 125, 127
- asimptota, kosa, 124, 125, 127
- asimptota, vertikalna, 35, 48, 49, 56, 124, 125, 129, 135
- asocijativnost, 4
- baza, 185, 188, 189, 193, 200, 201, 220, 239, 248
- baza eksponencijalne funkcije, 41
- baza vektorskog prostora, 253
- baza, desna, 200
- baza, direktna, 198, 200, 277
- baza, kanonska, 239–241, 247, 255, 260, 263
- baza, kristalografska, 190, 200
- baza, lijeva, 200
- baza, ortogonalna, 192, 194, 199, 247, 257
- baza, ortonormirana, 192, 194, 199, 201, 203, 247, 258, 271
- baza, recipročna, 199, 200, 203, 212, 278
- bijekcija, 17, 41, 47, 267, 268
- bitni prekid, 141
- Bohrov radijus, 42
- Bornova interpretacija valne funkcije, 161, 169
- broj, 5
- broj, čisto imaginarni, 165
- broj, kompleksan, 165, 175, 234, 236
- broj, kompleksno konjugiran, 167
- broj, racionalan, 6
- brojka, 5
- brojnost, 2
- brzina, 68, 74, 106
- brzina reakcije, 71, 108

brzina, trenutna, 68
 centar mase, 153, 187
 cikloida, 106
 Cramerov sustav, 228, 276
 Cramerovo pravilo, 276
 decimalni zapis, 5
 degenerirana svojstvena vrijednost, 281, 284
 derivabilnost, 72, 148
 derivacija, 68–70, 74, 78, 82, 107, 144, 145, 179
 derivacija produkta funkcija, 93
 derivacija kompozicije funkcija, 94
 derivacija kvocijenta funkcija, 93
 derivacija produkta funkcija, 98
 derivacija, druga, 74, 109, 110
 derivacije, više, 74
 deriviranje, logaritamsko, 96
 determinanta, 276, 282
 determinanta matrice, 272
 diferencijalna jednadžba, logistička, 96
 dijagonalna matrice, 226, 255
 dijagonalizacija operatora, 285
 dijagonalna matrica, 285
 dijeljenje polinoma, 29
 dimenzija, 189, 239, 253
 dipolni moment, 187
 diskriminanta, 27
 diskriminanta kvadratne jednadžbe, 165
 divergencija, nepravog integrala, 155, 158
 domena, 11
 domena, prirodna, 59, 60
 e, 42, 50, 127
 eksponencijalni oblik kompleksnog broja, 170
 ekstrem, globalni, 119, 120
 ekstrem, lokalni, 110, 113, 119
 ekstremiti, globalni, 120
 ekstremiti, lokalni, 111, 113, 114, 116
 element, 3
 element matrice, 254
 element skupa, 3
 elementarne transformacije, 274
 elipsa, 106
 energija, Gibbsova, 120
 entalpije, 90
 exp, 42
 faktorizacija polinoma, 102
 fazna tranzicija, 141
 formula, de Moivreova, 173
 formula, Eulerova, 170
 formula, Lagrangeova, 198
 formula, Newton-Leibnizova, 86, 87
 frekvencija, kutna, 56
 fundamentalni zakon recipročne rešetke, 212, 242
 funkcija, 11, 12, 177
 funkcija apsolutne vrijednosti, 143
 funkcija gustoće vjerojatnosti, 160, 169
 funkcija gustoće vjerojatnosti, 117
 funkcija stanja, 90
 funkcija zadana po dijelovima, 63, 143
 funkcija, afina, 22, 28, 215
 funkcija, algebarska, 39, 40
 funkcija, derivabilna, 144
 funkcija, Dirichletova, 143
 funkcija, eksponencijalna, 40–42, 50, 170, 238
 funkcija, elementarna, 40, 59, 86, 121, 143
 funkcija, glatka, 237
 funkcija, hiperbolna, 173
 funkcija, integrabilna, 148, 246
 funkcija, inverzna, 46–48, 57, 268
 funkcija, kompleksna, 161, 167, 247
 funkcija, konkavna, 110
 funkcija, konstantna, 23, 28, 74, 177
 funkcija, konveksna, 109, 110
 funkcija, kvadratna, 25, 27, 28
 funkcija, linearna, 22, 177, 248
 funkcija, logaritamska, 48, 51
 funkcija, neelementarna, 59
 funkcija, neparna, 16, 43, 55, 59, 85, 156, 289

funkcija, neprekidna, 121, 140, 148, 150, 152, 235
 funkcija, ograničena, 147
 funkcija, padajuća, 41, 43, 49, 59, 111, 148
 funkcija, padajuća, 15, 107
 funkcija, parna, 16, 43, 55, 85, 156, 289
 funkcija, periodična, 52–54, 56, 177
 funkcija, periodična, 56
 funkcija, po dijelovima neprekidna, 143, 150, 152
 funkcija, podintegralna, 77, 148
 funkcija, prava racionalna, 102
 funkcija, racionalna, 33, 35, 101, 124, 136
 funkcija, rastuća, 41, 43, 49, 59, 111, 148
 funkcija, rastuća, 15, 107
 funkcija, realna, 12
 funkcija, Riemann-integrabilna, 148
 funkcija, transcendentna, 40
 funkcija, transcendentna, 59
 funkcija, trigonometrijska, 52, 53
 funkcija, vertikalna, 129
 funkcije, ciklotometrijske, 57
 funkcije, trigonometrijske, 173
 funkcional, linearni, 255, 275

 gama-funkcija, 157
 Gaußova metoda eliminacija, 224, 226, 230, 270
 glavna vrijednost argumenta, 166
 graf funkcije, 12, 107, 176
 granice integrala, 82
 gustoća, 89, 141, 153
 gustoća vjerojatnosti, Maxwell-Boltzmannovog, 117, 129

 Hamiltonijan, 280, 281
 hermitska matrica, 286
 hermitski konjugirana matrica, 274
 hermitski operator, 286
 hiperbolne funkcije, 43
 homogeni sustav linearnih jednačbi, 220, 237, 267, 282
 homogeni sustav linearnih jednačbi, 219, 221, 229
 homogenost, 67, 249
 homogenost deriviranja, 73, 145
 horizontalna asimptota, 57

 ideniteta, 77
 identiteta, 12, 23, 167
 imaginarna jedinica, 165
 imaginarni dio kompleksnog broja, 165
 injekcija, 16, 47
 integrabilnost, 148
 integral, 77
 integral, neodređeni, 77, 78, 88, 147
 integral, nepravi, 154, 160
 integral, određeni, 83, 85, 88, 89, 147, 148, 150, 154, 161
 integral, Riemannov, 87, 148
 integriranje racionalnih funkcija, 102
 interval, 8
 invarijante operatora, 276, 283
 invertibilna matrica, 268
 inverz funkcije, 46, 97
 inverz matrice, 271, 272
 inverzija, 251
 inverzna funkcija, 267
 inverzna matrica, 268, 276
 ishodište, 201, 202
 ishodište, 8
 izjednačavanje kemijske jednačbe, 221
 iznos geometrijskog vektora, 193, 194
 iznos vektora, 183, 247

 jakost struje, 88
 jedinična ćelija, 190, 200, 243
 jedinični operator, 255
 jedinica, mjerna, 2
 jedinstvenost limesa, 131
 jednačba, diferencijalna, 87
 jednačba krivulje, eksplicitna, 105
 jednačba pravca, implicitna, 217
 jednačba stanja idealnog plina, 90
 jednačba, linearna, 219

jednadžba, diferencijalna, 75, 78, 80, 88, 237
 jednadžba, homogena linearna, 219
 jednadžba, kvadratna, 167
 jednadžba, linearna, 201, 215, 236, 249, 266
 jednadžba, Schrödingerova, 280
 jednadžba pravca, 202
 jednadžba stanja idealnog plina, 1, 14, 24, 36
 jednadžba tangente na graf funkcije, 70
 jednadžba, Henderson-Hasselbalchova, 52
 jednadžba, kvadratna, 27, 165
 jednadžba, linearna, 215–218
 kanonski oblik jednadžbe pravca, 208
 kapacitet, toplinski, 90, 139
 karakteristična jednadžba operatora, 282
 kinetika, kemijska, 24, 71, 108
 Kirchhoffov zakon, drugi, 96
 kodomena, 11
 koeficijent brzine reakcije, 61
 koeficijent smjera, 22, 70
 koeficijent, stehiometrijski, 72, 108
 koeficijent, vodeći (kvadratna f.), 25
 koeficijent, vodeći (polinoma), 29
 koeficijenti polinoma, 29
 kolinearnost, 238
 komplanarnost, 189, 200, 238
 kompleksno konjugiranje, 161, 167, 171
 kompozicija, 252
 kompozicija funkcija, 45, 94, 142
 kompozicija linearnih operatora, 264
 komutativnost, 4
 komutator, 265
 konkavnost, 108, 109, 112, 113
 konstanta, 1
 konstanta disocijacije, 51
 konstanta integracije, 77
 konstanta, Columbova, 89
 konstanta, opća plinska, 90
 konveksnost, 108, 109, 112, 113
 konvergencija, nepravog integrala, 155, 158
 koordinate, 8, 185, 188–191, 193, 201, 220, 239, 248, 253, 256
 koordinate vektora, 220, 239
 koordinatne osi, 7, 201
 koordinatne ravnine, 201, 202
 koordinatni sustav, 201
 koordinatni sustav, Kartezijev, 8, 201
 korijen, 38
 korijeni, 47
 korjenovanje, 4, 38
 korjenovanje kompleksnih brojeva, 173
 kosinus, 53, 54, 56, 57, 193
 kosinus hiperbolni, 43
 kotangens, 56
 kotangens hiperbolni, 43
 kratnost nultočke polinoma, 30, 103
 kristalografska restrikcija, 278
 krivulja, 201
 krivulja u prostoru, 208
 krivulja u ravnini, 105
 krivulja, integralna, 80
 krivulja, parametarski zadana, 105
 kružnica, 106
 kružnica, jedinična, 53
 kružnice, 175
 kut između vektora, 197
 kut između dva vektora, 193
 kut između pravca i ravnine, 211, 245
 kut između vektora, 184
 kut pravaca, 210
 kvadranti, 8
 kvantna teorija, 161
 L'Hôpital-ovo pravilo, 138
 L'Hospital-ovo pravilo, 138
 Lagrangeov teorem o srednjoj vrijednosti, 74
 lančanica, 43
 lančano pravilo, 94, 100
 Laplaceov razvoj, 273
 lemniskata, Bernoullijeva, 178
 limes funkcije, 125, 129
 limes funkcije u beskonačnosti, 125, 127, 131

limes funkcije u točki, 130, 131, 135
 limes kompozicije funkcija, 142
 limes kvocijenta funkcija, 133
 limes produkta funkcija, 133
 limes razlike funkcija, 133
 limes slijeva, 131
 limes u točki, 142
 limes zbroja funkcija, 133
 limes zdesna, 131
 limes, beskonačan, 135
 limes, jednostrani, 134
 limesi racionalnih funkcija, 127
 linearan operator, 260
 linearizacija, 60
 linearizacija neafine ovisnosti, 24
 linearna diferencijalna jednačba prvog reda, homogena, 237
 linearna kombinacija, 236
 linearna nezavisnost, 238, 241, 247
 linearna zavisnost, 238
 linearni funkcional, 261, 264
 linearni operator, 268
 linearnost, 249
 linearnost deriviranja, 73, 77, 93
 linearnost integriranja, 77
 linearnost određenog integrala, 87
 ln, 50
 log, 50
 logaritam, dekadski, 50
 logaritam, prirodni, 50, 87

 maksimum funkcije, 26
 maksimum, globalni, 119
 maksimum, lokalni, 110, 116
 masa, 89
 matrica, 254
 matrica linearnog operatora, 254, 256, 259, 260, 282, 285
 matrica sustava, 225, 226, 266
 matrica sustava linearnih jednačbi, 225
 matrica, dijagonalna, 274
 matrica, gornjetrokutasta, 274
 matrica, hermitska, 271
 matrica, invertibilna, 281
 matrica, jedinična, 255, 266
 matrica, kompleksna, 254
 matrica, kvadratna, 254
 matrica, ortogonalna, 259, 270, 271
 matrica, realna, 254
 matrica, simetrična, 271
 matrica, skalarna, 255
 matrica, transponirana, 271
 matrica-stupac, 260
 međumrežni razmak, 211, 212, 242, 244
 metoda supstitucije, 104
 metoda supstitucije (integrali), 99
 metoda supstitucije (sustavi linearnih jednačbi), 223
 metoda supstitucije za integrale, 100
 Millerovi indeksi, 204
 mimoilazni pravci, 209
 minimum funkcije, 26
 minimum, globalni, 119
 minimum, lokalni, 110, 116
 mjerne jedinice u derivacijama, 71
 mjerne jedinice u integralima, 79, 152
 množenje vektora skalarom, 184
 množenje geometrijskih vektora skalarom, 184
 množenje matrica, 260, 264
 množenje matrice skalarom, 256, 263
 množenje vektora skalarom, 185, 191, 234
 moment sile, 197
 monom, 28, 33, 236

 nehomogeni sustav linearnih jednačbi, 219
 neodređeni izrazi kod limesa, 138
 neodređeni izrazi u limesima, 138
 nepostojanje derivacije, 91
 neprekidnost, 148
 neprekidnost u točki, 140
 neutralni element, 4
 Newton-Leibnizova formula, 150
 Newtonov zakon grijanja i hlađenja, 94
 norma vektora, 247, 251

normiranost funkcije gustoće vjerojatnosti, 160
 nulfunkcional, 250
 nulmatrica, 255, 266
 nuloperator, 250, 255
 nultočka, višestruka, 103
 nultočke funkcije, 14
 nulvektor, 182, 183, 186, 234, 235, 255

 očekivana vrijednost slučajne varijable, 161
 oduzimanje geometrijskih vektora, 187
 oduzimanje matrica, 262
 oduzimanje vektora, 235
 okomitost praca na ravninu, 210
 okomitost pravaca, 210
 okomitost ravnina, 205
 opća plinska konstanta, 1
 opća jednadžba ravnine, 202
 operator, 249
 operator deriviranja, 250
 operator simetrije, 251, 253, 258, 271, 282
 operator skaliranja, 242, 248, 251, 255, 270, 279, 280
 operator, jedinični, 250, 251, 280
 operator, linearni, 279
 operator, ortogonalni, 251, 282
 operatori simetrija, 280
 operatori simetrije, 257
 orbitala, 161
 orbitala, 1s, 42
 orbitala, atomska, 162
 ordinata, 8, 201
 orijentacija vektora, 183
 ortogonalna matrica, 276
 ortogonalnost funkcija, 163
 ortogonalnost vektora, 247
 os, polarna, 175
 osna simetrija, 250
 osnovni teorem infinitezimalnog računa, 150
 označavanje osi, 8
 oznaka derivacije, 68
 oznake derivacija, 74

 $p[H]$, 51
 parabola, 26
 paralelnost pravaca, 209
 paralelnost pravca i ravnine, 211
 paralelnost ravnina, 203
 parametarske jednadžbe pravca, 207
 parametarske jednadžbe ravnine, 205
 parametri baze, 188, 189, 192, 193
 parcijalna integracija, 98
 period, 53
 period, temeljni, 53, 54, 56
 periodičnost, 170
 periodičnost, 53
 pH, 51
 plin, idealni, 122
 ploha, 201, 208
 početni uvjet, 79
 područje integriranja, 82
 podskup, 12
 polarna udaljenost, 175
 polarne koordinate u ravnini, 175
 polarni koordinatni sustav u ravnini, 175
 polarni kut, 175
 polinom, 28, 32, 34, 74, 102, 127, 236, 241
 polovište dužine, 201
 pomak, fazni, 56
 postojanje limesa funkcije, 131
 potencija, opća, 97
 potencija, opća, 52
 potencijal, Lennard-Jonesov, 117
 potenciranje, 4
 potenciranje kompleksnih brojeva, 173
 potprostor vektorskog prostora, 237
 potprostor, pravi, 237
 potprostor, svojstveni, 280, 281
 potprostor, trivijalni, 237
 površina paralelograma, 196
 pravac, brojevni, 7
 pravac, horizontalni, 10
 pravac, vertikalni, 10
 pravokutni koordinatni sustav, 7

prekid prve vrste, 141
 prekid, bitan, 143
 prikaz vektora u bazi, 239
 primitivna funkcija, 75
 princip homogenosti, 2, 39
 prirodna domena, 12
 problem površine, 82, 84, 147
 problem tangente, 69, 82, 144
 produkt funkcija, skalarni, 163
 produkt, mješovita, 200
 produkt, mješoviti, 200, 272
 produkt, skalarni, 192, 193, 199, 242, 246, 259, 260
 produkt, vektorski, 197, 199, 272
 projekcija, ortogonalna, 195, 242
 promjena baze, 241
 proporcionalnost, 23
 proporcionalnost, obrnuta, 33
 prosječna vrijednost, 152
 prosječna vrijednosti, 151
 prostor, direktni, 198
 prostor, recipročni, 198, 212
 prostor, trivijalan, 235
 prostor, unitarni, 242
 prostor, vektorski, 187, 260, 263
 provjera linearne nezavisnosti, 241

 račun, infinitezimalni, 67
 računske operacije, 4
 rad, 89, 122
 rad, električni, 89, 90
 rad, kemijski, 89
 rad, mehanički, 89, 90
 rad, volumni, 89
 radij-vektor, 182, 190
 radijan, 54
 rastav na parcijalne razlomke, 102, 103
 ravnina, 201, 203
 ravnina, mrežna, 204, 211, 245
 rešetka, 191, 201, 278
 rešetka, kristalna, 190
 reakcija nultog reda, 24
 reakcija prvog reda, 24
 realna funkcija jedne varijable, 12
 realni dio kompleksnog broja, 165
 red matrice, 254
 red reakcije, 61
 red rotacije, 252
 red veličine, 5, 7
 refleksija, 252
 regularna matrica, 268
 reprezentant vektora, 182
 restrikcija funkcije, 47
 rješenje diferencijalne jednačbe, 74
 rješenje, partikularno, 80, 267
 rješenje, trivijalno, 220
 rješenje linearne jednačbe, 215–218
 rješenje sustava linearnih jednačbi, 219
 rotacija, 167, 172, 252, 278, 280
 rotacija ravnine, 258
 rotoinverzija, 252
 rotorefleksija, 252, 264

 Sarrusovo pravilo, 272
 segmentni oblik jednačbe ravnine, 206
 sekanta, 144
 signum, 84, 92
 sila, konzervativna, 90
 simetričan operator, 286
 simetrična matrica, 286
 simetrija, centralna, 251, 252, 255, 281
 simetrija, osna, 167, 252, 257, 281
 simetrija, rotacijska, 177
 simetrije, 251
 sinus, 53–57
 sinus hiperbolni, 43
 skalar, 181, 184, 234
 skalarni produkt, 242
 skaliranje funkcije, 18
 skok, 141
 skup, 3
 skup cijelih brojeva, 3
 skup prirodnih brojeva, 3
 skup racionalnih brojeva, 3
 skup realnih brojeva, 3
 slika funkcije, 13, 121
 slobodni član, 22, 25, 29, 216–219
 slobodni pad, 79

slučajna varijabla, kontinuirana, 159, 161
 slučajna varijabla, kotinuirana, 160
 smjer ravnine, 203
 smjer vektora, 183
 spektar operatora, 279
 spirala, Arhimedova, 177
 spirala, hiperbolna, 177
 sredina, aritmetička, 123
 sredina, geometrijska, 123
 stehiometrija, 220
 stehiometrijski koeficijent, 221
 stupanj polinoma, 28
 subdivizija, 147
 subdivizija, ekvidistantna, 147
 suma, integralna, 147
 surjekcija, 16, 47
 sustav jednađbi, 219
 sustav linearnih jednađbi, 222, 223, 237, 266
 sustav linearnih jednađbi, 219
 sustav, homogen, 267
 sustav, koordinatni, 190
 sustav, kristalni, 190
 sustavi bez rješenja, 228
 sustavi s beskonačno mnogo rješenja, 229
 sustavi s jedinstvenim rješenjem, 228
 svojstvena vrijednost, 282
 svojstveni potprostor, 283
 svojstveni vektor, 282
 tablično integriranje, 78
 tablica derivacija, 72
 tangens, 56, 176
 tangens hiperbolni, 43
 tangenta, 69, 91, 106, 132, 144
 težiti, 124
 temeljni zakon recipročne rešetke, 212
 tenzor, metrički, 196, 278
 teorem o dijeljenju polinoma, 29
 teorem srednje vrijednosti za integrale, 152
 teorem srednje vrijednosti, Lagrangeov, 150–152
 teorem, Binet-Cauchyjev, 275
 teorem, Bolzano-Weierstraß-ov, 121
 teorem, Bolzano-Weierstraßov, 142, 147, 151
 termodinamika, 71, 90, 122
 termodinamika, statistička, 117
 tip matrice, 254
 točka infleksije, 113, 114
 točka prekida, 141
 točka, kritična, 114
 točka, stacionarna, 114
 točno ako, 3
 točka infleksije, 112
 točka prekida, 140
 tok funkcije, 59, 123, 124, 126, 129
 trag, 276, 282
 trag matrice, 264
 transformacije grafova, 17, 64
 transformacije, elementarne, 224, 226
 translacija, 168, 250
 translacija grafa funkcije, 18
 transponirana matrica, 274
 transponiranje, 270
 trigonometrijske funkcije, 53
 trigonometrijski zapis kompleksnog broja, 170
 udaljenost, 194
 udaljenost točke od ravnine, 213
 uklonjivi prekid, 141
 uređeni par, 7
 uvjeti, početni, 80
 valna duljina, 53
 varijabla, 1
 varijabla, diskretna, 2
 varijabla, kontinuirana, 2
 varijabla, kontinuirana slučajna, 159
 varijabla, nezavisna, 1, 8, 11
 varijabla, zavisna, 1, 8, 11
 vektor, 181, 234
 vektor normale, 203
 vektor smjera pravca, 207
 vektor, euklidski, 181
 vektor, geometrijski, 181, 182, 242

- vektor, jedinični, 183, 185
- vektor, suprotni, 183, 186
- vektor, svojstveni, 279
- vektori, kolinearni, 183, 186
- vektorski prostor, beskonačnodimenzionalan, 239, 241, 255
- vektorski prostor, kompleksan, 234, 242
- vektorski prostor, kompleksni, 242
- vektorski prostor, konačnodimenzionalan, 239
- vektorski prostor, realan, 239
- vektorski prostor, realni, 181
- veliĀtina, skalarna, 2
- veliĀina, skalarna, 181
- veliĀina, vektorska, 181
- višestruko deriviranje, 74
- višestruka nultoĀka polinoma, 30, 103
- vjerojatnosni prostor, 159
- vjerojatnost, 117, 159, 160
- vodeĀi Ālan polinoma, 33
- volumen paralelepipeda, 200
- vrijednost, svojstvena, 279
- Weissovi parametri, 207
- zakon oĀuvanja energije, 90
- zakon, Arrheniusov, 61
- zakon, drugi Kirchhoffov, 96
- zakon, drugi Newtonov, 75, 88, 89
- zakon, Hessov, 236
- zakon, Kohlrauschov, 39
- zakon, Ostwaldov, 62
- zakrivljenost grafa, 108, 110
- zaokruŹivanje, 7
- zbrajanje geometrijskih vektora, 186, 191
- zbrajanje matrica, 262
- zbrajanje vektora, 186, 187, 191, 234
- znaĀajne znamenke, 6
- znamenka, 5
- znanstvena notacija, 6
- zrcaljenje, 167, 250, 252
- zrcaljenje grafa funkcije, 17
- zrcaljenje prostora, 258
- zrcaljenje ravnine, 257
- zrcalna simetrija, 258