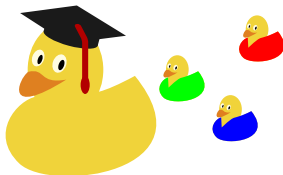


Matematika 1 (2. listopada 2026.)

Franka Miriam Brückler



Broj i (decimalna) brojka 🐥

Koja je razlika između broja, brojke i znamenke?

Broj i (decimalna) brojka

Koja je razlika između broja, brojke i znamenke?

Broj i brojka

Brojevi se zapisuju brojkama, a brojke se sastoje od pojedinačnih simbola koje zovemo znamenkama. Danas uobičajeni zapis brojeva je decimalni (dekadski) zapis, tj. zapis u kojem su pojedine znamenke brojke svojom pozicijom vezane za tu poziciju odgovarajuću potenciju broja deset. Taj je zapis toliko uobičajen da se često govori o decimalnim brojevima (a ne brojkama).

$$725 = 7 \cdot 100 + 2 \cdot 10 + 5 = 7 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10^1 + 5 \cdot 10^0$$

Primjer

Broj i (decimalna) brojka

Koja je razlika između broja, brojke i znamenke?

Broj i brojka

Brojevi se zapisuju brojkama, a brojke se sastoje od pojedinačnih simbola koje zovemo znamenkama. Danas uobičajeni zapis brojeva je decimalni (dekadski) zapis, tj. zapis u kojem su pojedine znamenke brojke svojom pozicijom vezane za tu poziciju odgovarajuću potenciju broja deset. Taj je zapis toliko uobičajen da se često govori o decimalnim brojevima (a ne brojkama).

$$725 = 7 \cdot 100 + 2 \cdot 10 + 5 = 7 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10^1 + 5 \cdot 10^0$$

Primjer

Trebam jednog dobrovoljca za jedan trik!

Broj i (decimalna) brojka

Koja je razlika između broja, brojke i znamenke?

Broj i brojka

Brojevi se zapisuju brojkama, a brojke se sastoje od pojedinačnih simbola koje zovemo znamenkama. Danas uobičajeni zapis brojeva je decimalni (dekadski) zapis, tj. zapis u kojem su pojedine znamenke brojke svojom pozicijom vezane za tu poziciju odgovarajuću potenciju broja deset. Taj je zapis toliko uobičajen da se često govori o decimalnim brojevima (a ne brojkama).

$$725 = 7 \cdot 100 + 2 \cdot 10 + 5 = 7 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10^1 + 5 \cdot 10^0$$

Primjer

Trebam jednog dobrovoljca za jedan trik! Kako sam pogodila rezultat?

Broj i (decimalna) brojka

Koja je razlika između broja, brojke i znamenke?

Broj i brojka

Brojevi se zapisuju brojkama, a brojke se sastoje od pojedinačnih simbola koje zovemo znamenkama. Danas uobičajeni zapis brojeva je decimalni (dekadski) zapis, tj. zapis u kojem su pojedine znamenke brojke svojom pozicijom vezane za tu poziciju odgovarajuću potenciju broja deset. Taj je zapis toliko uobičajen da se često govori o decimalnim brojevima (a ne brojkama).

$$725 = 7 \cdot 100 + 2 \cdot 10 + 5 = 7 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10^1 + 5 \cdot 10^0$$

Primjer

Trebam jednog dobrovoljca za jedan trik! Kako sam pogodila rezultat? $(abc)_{10} = 100a + 10b + c$, $a \neq c$;

Broj i (decimalna) brojka

Koja je razlika između broja, brojke i znamenke?

Broj i brojka

Brojevi se zapisuju brojkama, a brojke se sastoje od pojedinačnih simbola koje zovemo znamenkama. Danas uobičajeni zapis brojeva je decimalni (dekadski) zapis, tj. zapis u kojem su pojedine znamenke brojke svojom pozicijom vezane za tu poziciju odgovarajuću potenciju broja deset. Taj je zapis toliko uobičajen da se često govori o decimalnim brojevima (a ne brojkama).

$$725 = 7 \cdot 100 + 2 \cdot 10 + 5 = 7 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10^1 + 5 \cdot 10^0$$

Primjer

Trebam jednog dobrovoljca za jedan trik! Kako sam pogodila rezultat? $(abc)_{10} = 100a + 10b + c$, $a \neq c$; $a > c$

$$\begin{aligned}(abc)_{10} - (cba)_{10} &= (100a + 10b + c) - (100c + 10b + a) = \\ &= 100(a - c) + c - a\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(abc)_{10} - (cba)_{10} &= (100a + 10b + c) - (100c + 10b + a) = \\ &= 100(a - c) + c - a = (a - c - 1, 9, 10 + c - a)_{10}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(abc)_{10} - (cba)_{10} &= (100a + 10b + c) - (100c + 10b + a) = \\ &= 100(a - c) + c - a = (a - c - 1, 9, 10 + c - a)_{10}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&(a - c - 1, 9, 10 + c - a)_{10} + (10 + c - a, 9, a - c - 1)_{10} = \\ &= 100(a - c - 1) + 90 + (10 + c - a) + 100(10 + c - a) + 90 + (a - c - 1) = 1089\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(abc)_{10} - (cba)_{10} &= (100a + 10b + c) - (100c + 10b + a) = \\ &= 100(a - c) + c - a = (a - c - 1, 9, 10 + c - a)_{10}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&(a - c - 1, 9, 10 + c - a)_{10} + (10 + c - a, 9, a - c - 1)_{10} = \\ &= 100(a - c - 1) + 90 + (10 + c - a) + 100(10 + c - a) + 90 + (a - c - 1) = 1089\end{aligned}$$

Za ne-cijele brojeve cijeli dio se od razlomljenog dijela u decimalnom zapisu odvaja **decimalnim zarezom** (ili decimalnom točkom), a znamenke iza decimalnog zareza odgovaraju redom potencijama -1 , -2 i t.d. broja deset. Broj znamenaka iza decimalnog zareza u decimalnom zapisu broja naziva se njegovim **brojem decimala**. Npr., 21,47 ima dvije decimale, 21 cijeli dio, a 0,47 razlomljeni dio, odnosno ovaj broj je broj $2 \cdot 10^1 + 1 \cdot 10^0 + 4 \cdot 10^{-1} + 7 \cdot 10^{-2}$.

$$\begin{aligned}(abc)_{10} - (cba)_{10} &= (100a + 10b + c) - (100c + 10b + a) = \\ &= 100(a - c) + c - a = (a - c - 1, 9, 10 + c - a)_{10}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&(a - c - 1, 9, 10 + c - a)_{10} + (10 + c - a, 9, a - c - 1)_{10} = \\ &= 100(a - c - 1) + 90 + (10 + c - a) + 100(10 + c - a) + 90 + (a - c - 1) = 1089\end{aligned}$$

Za ne-cijele brojeve cijeli dio se od razlomljenog dijela u decimalnom zapisu odvajava **decimalnim zarezom** (ili decimalnom točkom), a znamenke iza decimalnog zareza odgovaraju redom potencijama -1 , -2 i t.d. broja deset. Broj znamenaka iza decimalnog zareza u decimalnom zapisu broja naziva se njegovim **brojem decimala**. Npr., 21,47 ima dvije decimale, 21 cijeli dio, a 0,47 razlomljeni dio, odnosno ovaj broj je broj $2 \cdot 10^1 + 1 \cdot 10^0 + 4 \cdot 10^{-1} + 7 \cdot 10^{-2}$. Svaki konačni decimalni zapis možemo shvatiti kao beskonačan, ali obrat ne vrijedi.

Decimalni zapis racionalnog broja

Racionalni brojevi mogu i ne moraju imati konačan decimalni zapis. No, decimalni zapis racionalnog broja je uvijek periodičan, tj. počevši od nekog mjesta se neki dio zapisa počinje ponavljati.

$$\frac{1}{4} = 0,25 = 0,250000 \dots = 0,25\dot{0}$$

$$\frac{1}{17} = 0,058823529411764705882352941 \dots = 0,\overline{0588235294117647}$$

Zadatak

Odredite dva razlomka čiji decimalni zapis je $1,\overline{230}$.

Decimalni zapis racionalnog broja

Racionalni brojevi mogu i ne moraju imati konačan decimalni zapis. No, decimalni zapis racionalnog broja je uvijek periodičan, tj. počevši od nekog mjesta se neki dio zapisa počinje ponavljati.

$$\frac{1}{4} = 0,25 = 0,250000 \dots = 0,25\dot{0}$$

$$\frac{1}{17} = 0,058823529411764705882352941 \dots = 0,\overline{0588235294117647}$$

Zadatak

Odredite dva razlomka čiji decimalni zapis je

$$1,\overline{230}.x = 1 + 0,\overline{230} = 1 + y; 1000y = 230 + y$$

Decimalni zapis racionalnog broja

Racionalni brojevi mogu i ne moraju imati konačan decimalni zapis. No, decimalni zapis racionalnog broja je uvijek periodičan, tj. počevši od nekog mjesta se neki dio zapisa počinje ponavljati.

$$\frac{1}{4} = 0,25 = 0,250000 \dots = 0,25\overline{0}$$

$$\frac{1}{17} = 0,058823529411764705882352941 \dots = 0,\overline{0588235294117647}$$

Zadatak

Odredite dva razlomka čiji decimalni zapis je

$$1,\overline{230}.x = 1 + 0,\overline{230} = 1 + y; 1000y = 230 + y \Rightarrow y = \frac{230}{999}$$
$$\Rightarrow x = \frac{1229}{999} = \frac{2458}{1998}$$

Primjer

$$0,04^{-2} = \left(\frac{1}{25}\right)^{-2} = 25^2 = 625.$$

Zadatak

Opet trebam dobrovoljca!

Zadatak

Opet trebam dobrovoljca!

Zapišite proizvoljan pozitivan decimalni broj manji od 1, recimo s tri decimale.

Zadatak

Opet trebam dobrovoljca!

Zapišite proizvoljan pozitivan decimalni broj manji od 1, recimo s tri decimale. Sad ću ja zapisati jedan takav ispod, onda Vi proizvoljan isto s tri znamenke, onda ja, onda Vi još jedan.

Zadatak

Opet trebam dobrovoljca!

Zapišite proizvoljan pozitivan decimalni broj manji od 1, recimo s tri decimale. Sad ću ja zapisati jedan takav ispod, onda Vi proizvoljan isto s tri znamenke, onda ja, onda Vi još jedan. Zbrojite sve brojeve, a ja ću nekom u prvom redu dati rezultat!

Zadatak

Opet trebam dobrovoljca!

Zapišite proizvoljan pozitivan decimalni broj manji od 1, recimo s tri decimale. Sad ću ja zapisati jedan takav ispod, onda Vi proizvoljan isto s tri znamenke, onda ja, onda Vi još jedan. Zbrojite sve brojeve, a ja ću nekom u prvom redu dati rezultat! Kako sam toliko brzo zbrojila?

Zadatak

Opet trebam dobrovoljca!

Zapišite proizvoljan pozitivan decimalni broj manji od 1, recimo s tri decimale. Sad ću ja zapisati jedan takav ispod, onda Vi proizvoljan isto s tri znamenke, onda ja, onda Vi još jedan. Zbrojite sve brojeve, a ja ću nekom u prvom redu dati rezultat! Kako sam toliko brzo zbrojila?

Kad sam dopisivala svoje brojeve pazila sam da budu takvi da zbrojeni s prethodnim daju 0,999. Stoga je zbroj prva četiri broja i to znam unaprijed jednak $1,998 = 2 - 0,002$. Dakle, konačni zbroj dobijem tako da zadnjem broju oduzmem 0,002 i onda pribrojim 2.

Zadatak

Opet trebam dobrovoljca!

Zapišite proizvoljan pozitivan decimalni broj manji od 1, recimo s tri decimale. Sad ću ja zapisati jedan takav ispod, onda Vi proizvoljan isto s tri znamenke, onda ja, onda Vi još jedan. Zbrojite sve brojeve, a ja ću nekom u prvom redu dati rezultat! Kako sam toliko brzo zbrojila?

Kad sam dopisivala svoje brojeve pazila sam da budu takvi da zbrojeni s prethodnim daju 0,999. Stoga je zbroj prva četiri broja i to znam unaprijed jednak $1,998 = 2 - 0,002$. Dakle, konačni zbroj dobijem tako da zadnjem broju oduzmem 0,002 i onda pribrojim 2. Općenito, za n decimala imamo $n \cdot \underbrace{0,99 \dots 9}_n = n - 0,0 \dots 0n$ pa treba oduzeti n zadnjem broju na zadnjoj znamenki i svemu pribrojiti broj n .

Znanstvena notacija brojeva

Podaci dobiveni mjerenjem uvijek su racionalni brojevi, čak i ako mjerimo iznose koji nisu racionalni — zašto?

Znanstvena notacija brojeva

Podaci dobiveni mjerenjem uvijek su racionalni brojevi, čak i ako mjerimo iznose koji nisu racionalni — zašto?

Sve sigurne i prva nesigurna znamenka su značajne. U značajne znamenke se ne ubrajaju nule na početku zapisa, nule na kraju se zanemaruju osim ako nisu iza decimalnog zareza, a sve ostale znamenke su značajne. Uočimo da to znači da su rezultati mjerenja uvijek racionalni brojevi. Egzaktni brojevi imaju beskonačno mnogo značajnih znamenki.

Znanstveni zapis i red veličine

Znanstvena notacija (realnog) broja x je zapis tog broja u obliku $x = m \cdot 10^k$ gdje je (realni) broj m ($1 \leq m < 10$), tzv. mantisa ili koeficijent od x (u pravilu zapisan decimalno, sa svim značajnim znamenkama), a cijeli broj k je karakteristika (ili eksponent) broja x . Potencija 10^k naziva se redom veličine od x .

Primjer

Broj $2,1 \cdot 10^{-5}$ je za 8 redova veličine manji od $5,345 \cdot 10^3$.

Primjer

Avogadrova konstanta iznosi $602214076000000000000000 \text{ mol}^{-1}$, no u računima se obično zaokružuje na prve četiri značajne znamenke, tj. na $N_A = 6,022 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}$. Naboj elektrona iznosi $-0,0000000000000000001602176634 \text{ C}$, što se u standardnijim računima obično zaokružuje na prve četiri značajne znamenke, tj. na $e = -1,602 \cdot 10^{-19} \text{ C}$.

Primjer

Broj udaha tijekom ljudskog života je reda veličine kao $15 \cdot 60 \cdot 24 \cdot 365 \cdot 70 = 1,5 \cdot 6 \cdot 2,4 \cdot 3,65 \cdot 7 \cdot 10^6$, što je reda veličine 10^8 .

Omjeri, razmjeri, proporcionalnost

Omjeri, razmjeri, proporcionalnost

Omjer dviju skalarnih veličina je njihov odnos poistovjećen s njihovim količnikom, a razmjer je jednakost dvaju omjera. Dvije (promjenjive, skalarne) veličine su proporcionalne (razmjerne) ako im je omjer međusobno odgovarajućih iznosa uvijek isti (osim kad neka od njih ima iznos nula). Taj omjer zove se koeficijent proporcionalnosti.

Ako su dvije veličine x i y proporcionalne te ako znamo da kad x iznosi a , y iznosi b , a kad x iznosi c , onda y iznosi d , onda je zadovoljen razmjer $a : b = c : d$. Iznimno, ako je x iznosa 0, kod proporcionalnih veličina y može poprimiti bilo koji iznos i obrnuto. Primijetimo i da ako je jedna veličina proporcionalna drugoj, a druga trećoj, onda je i prva proporcionalna trećoj.

Primjer

Ako je $a : b = c : d$, množenje s b i d daje da vrijedi i $ad = bc$, a onda dijeljenje s a i c daje da vrijedi i $d : c = b : a$ (uz uvjet $a, b, c, d \neq 0$).

Primjer

Ako je $a : b = c : d$, množenje s b i d daje da vrijedi i $a d = b c$, a onda dijeljenje s a i c daje da vrijedi i $d : c = b : a$ (uz uvjet $a, b, c, d \neq 0$).

Primjer

$$1 \text{ lb} = 16 \text{ oz} = 453,59237 \text{ g}.$$

S kojim faktorom treba množiti masu izraženu u uncama da dobijemo iznos iste mase izražene u kilogramima?

Primjer

Ako je $a : b = c : d$, množenje s b i d daje da vrijedi i $a d = b c$, a onda dijeljenje s a i c daje da vrijedi i $d : c = b : a$ (uz uvjet $a, b, c, d \neq 0$).

Primjer

$$1 \text{ lb} = 16 \text{ oz} = 453,59237 \text{ g}.$$

S kojim faktorom treba množiti masu izraženu u uncama da dobijemo iznos iste mase izražene u kilogramima? Iz definicije je

$$1 \text{ g} = \frac{16}{453,59237} \text{ oz}, \text{ a znamo da je } 1 \text{ kg} = 1000 \text{ g}, \text{ dakle je}$$

$$1 \text{ kg} = \frac{16000}{453,59237} \text{ oz} = 35,27396 \text{ oz}.$$

Primjer

Ako je $a : b = c : d$, množenje s b i d daje da vrijedi i $a d = b c$, a onda dijeljenje s a i c daje da vrijedi i $d : c = b : a$ (uz uvjet $a, b, c, d \neq 0$).

Primjer

$$1 \text{ lb} = 16 \text{ oz} = 453,59237 \text{ g}.$$

S kojim faktorom treba množiti masu izraženu u uncama da dobijemo iznos iste mase izražene u kilogramima? Iz definicije je

$$1 \text{ g} = \frac{16}{453,59237} \text{ oz}, \text{ a znamo da je } 1 \text{ kg} = 1000 \text{ g}, \text{ dakle je}$$

$$1 \text{ kg} = \frac{16000}{453,59237} \text{ oz} = 35,27396 \text{ oz}.$$

Primjer

Kokoš i pol snese jaje i pol za dan i pol. Koliko jaja snese šest kokoši za šest dana?

Primjer

Kokoš i pol snese jaje i pol za dan i pol. Koliko jaja snese šest kokoši za šest dana?

Najlakše je razmotriti sličan zadatak, ali s očiglednim rješenjem: Ako 1 kokoš u 1 danu izlegne 1 jaje, onda 6 kokoši u 1 danu izlegu 6 jaja jer je učestalost lijeganja jaja iz prve rečenice jednaka $\frac{1 \cdot j.}{1 d.} = 1 \frac{j.}{d.}$ po kokoši, dakle je brzina izlijeganja jaja u tom slučaju $1 \frac{j.}{d \cdot k.}$. Vidljivo je da imamo proporcionalnost između broja jaja i umnoška vremena i broja kokoši.

Primjer

Kokoš i pol snese jaje i pol za dan i pol. Koliko jaja snese šest kokoši za šest dana?

Najlakše je razmotriti sličan zadatak, ali s očiglednim rješenjem: Ako 1 kokoš u 1 danu izlegne 1 jaje, onda 6 kokoši u 1 danu izlegu 6 jaja jer je učestalost lijeganja jaja iz prve rečenice jednaka $\frac{1 \cdot j.}{1 d.} = 1 \frac{j.}{d.}$ po kokoši, dakle je brzina izlijeganja jaja u tom slučaju $1 \frac{j.}{d. k.}$. Vidljivo je da imamo proporcionalnost između broja jaja i umnoška vremena i broja kokoši.

U zadatku stoga imamo učestalost lijeganja jaja

$$v = \frac{1,5 j.}{1,5 d. \cdot 1,5 k.} = \frac{2}{3} \frac{j.}{d. k.} \Rightarrow$$

$$N_{jaja} = N_k t v = 6 k. \cdot 6 d. \cdot \frac{2}{3} \frac{j.}{d. k.} = 24 j.$$

Zadatak

Vaši kolege su u računima koristili procjene iznosa raznih veličina. Koje od sljedećih procjena su smislene? Kojim izračunima biste ih provjerili?

- Boca vode sadrži 50 cl vode. Punim rupu kvadratnog presjeka ($50\text{ cm} \times 50\text{ cm}$) i dubine 1 m ulijevajući u nju vodu iz takvih boca. Procjenjujem da mi za to treba 500 boca vode.

Zadatak

Vaši kolege su u računima koristili procjene iznosa raznih veličina. Koje od sljedećih procjena su smislene? Kojim izračunima biste ih provjerili?

- Boca vode sadrži 50 cl vode. Punim rupu kvadratnog presjeka ($50 \text{ cm} \times 50 \text{ cm}$) i dubine 1 m ulijevajući u nju vodu iz takvih boca. Procjenjujem da mi za to treba 500 boca vode. Da.
 $500 \cdot 50 \text{ cl} = 25000 \text{ cl} = 250 \text{ L} = 1 \text{ m} \cdot 50 \text{ cm} \cdot 50 \text{ cm} = 250 \text{ dm}^3$.
- Danas sam kao i svaki dan u pauzi između predavanja pojela paketić od 30 g zobenih pahuljica. Procjenjujem da godišnje pojedem oko 11 kilograma zobenih pahuljica.

Zadatak

Vaši kolege su u računima koristili procjene iznosa raznih veličina. Koje od sljedećih procjena su smislene? Kojim izračunima biste ih provjerili?

- Boca vode sadrži 50 cl vode. Punim rupu kvadratnog presjeka ($50 \text{ cm} \times 50 \text{ cm}$) i dubine 1 m ulijevajući u nju vodu iz takvih boca. Procjenjujem da mi za to treba 500 boca vode. Da.
 $500 \cdot 50 \text{ cl} = 25000 \text{ cl} = 250 \text{ L} = 1 \text{ m} \cdot 50 \text{ cm} \cdot 50 \text{ cm} = 250 \text{ dm}^3$.
- Danas sam kao i svaki dan u pauzi između predavanja pojela paketić od 30 g zobnih pahuljica. Procjenjujem da godišnje pojedem oko 11 kilograma zobnih pahuljica. Ne. Iako je $365 \cdot 30 \text{ g} = 10,95 \text{ kg}$, to bi bio krivi račun jer se pitanje odnosi samo na nastavne dane. Godišnje imamo 30 tjedana predavanja, dakle bi pravilan račun bio $210 \cdot 30 \text{ g} = 6,3 \text{ kg}$.

Izvor

Pojednostavljivanje omjera

Proporcionalnost i (produljeni) omjeri često se koriste u stehiometriji.

- Ako se u (produljenom) omjeru $a : b : \dots$ u svim članovima pojavljuje isti faktor, primjerice ista mjerna jedinica, taj faktor se može pokratiti u cijelom omjeru.

Pojednostavljivanje omjera

Proporcionalnost i (produljeni) omjeri često se koriste u stehiometriji.

- Ako se u (produljenom) omjeru $a : b : \dots$ u svim članovima pojavljuje isti faktor, primjerice ista mjerna jedinica, taj faktor se može pokratiti u cijelom omjeru.
- Ako (produljeni) omjer $a : b : \dots$ želimo pojednostaviti na njemu približno jednaki omjer $a' : b' : \dots$, primjerice jer su u prvom veliki brojevi i želimo ga svesti na omjer malih prirodnih brojeva, obično se prvo svi brojevi zaokruže na manje, pokratimo sve eventualne zajedničke faktore pa podijelimo sve članove s najmanjim brojem i opet zaokružimo, npr.

$$4612526 : 243955 \approx 4613 : 244 = \frac{4613}{244} : 1 \approx 18,9 : 1 \approx 19 : 1.$$

Oprez!!! Svođenje najmanjeg broja na 1 ne mora dati dobru aproksimaciju, primjerice

$$401 : 275 : 633 = \frac{401}{275} : 1 : \frac{633}{275} \approx 1,46 : 10 : 2,30$$

pa bi „slijepo“ držanje gornjeg pravila dalo očigledno lošu aproksimaciju $1 : 1 : 2$.

Oprez!!! Svođenje najmanjeg broja na 1 ne mora dati dobru aproksimaciju, primjerice

$$401 : 275 : 633 = \frac{401}{275} : 1 : \frac{633}{275} \approx 1,46 : 10 : 2,30$$

pa bi „slijepo“ držanje gornjeg pravila dalo očigledno lošu aproksimaciju $1 : 1 : 2$.

U ovakvim slučajevima možemo ponoviti postupak:

$$1,46 : 1 : 2,30 = 146 : 100 : 230 \approx 14,6 : 10 : 23 \approx 1,5 : 1 : 2,3 = 3 : 2 : 4$$

Uočimo da $3 : 2 : 5$ nije loša aproksimacija,

Oprez!!! Svođenje najmanjeg broja na 1 ne mora dati dobru aproksimaciju, primjerice

$$401 : 275 : 633 = \frac{401}{275} : 1 : \frac{633}{275} \approx 1,46 : 10 : 2,30$$

pa bi „slijepo“ držanje gornjeg pravila dalo očigledno lošu aproksimaciju $1 : 1 : 2$.

U ovakvim slučajevima možemo ponoviti postupak:

$$1,46 : 1 : 2,30 = 146 : 100 : 230 \approx 14,6 : 10 : 23 \approx 1,5 : 1 : 2,3 = 3 : 2 : 4$$

Uočimo da $3 : 2 : 5$ nije loša aproksimacija, ali da je bolja $6 : 4 : 9$ koju bismo dobili tako da omjer $1,458 : 1 : 2,302$ množimo redom s faktorima 2, 3, ... dok ne dobijemo omjer u kojemu su svi članovi blizu cijelih brojeva: Pomnoženo s 2 dobijemo $2,92 : 2 : 4,60$ (zadnji broj ni približno nije cijeli), pomnoženo s 3 dobijemo $4,37 : 3 : 6,91$ (prvi broj ni približno nije cijeli), pomnoženo s 4 dobijemo $5,83 : 4 : 9,21 \approx 6 : 4 : 9$.

Primjer

Odredimo empirijsku formulu spoja kisika, natrija i sumpora u kojem su njihovi maseni udjeli redom $w(\text{O}) = 45,02\%$, $w(\text{Na}) = 32,40\%$ i $w(\text{S}) = 22,58\%$.

Primjer

Odredimo empirijsku formulu spoja kisika, natrija i sumpora u kojem su njihovi maseni udjeli redom $w(\text{O}) = 45,02\%$, $w(\text{Na}) = 32,40\%$ i $w(\text{S}) = 22,58\%$. Naš spoj ima empirijsku formulu $\text{Na}_i\text{S}_j\text{O}_k$ s maksimalno skraćenim prirodnim brojevima i , j i k takvim da je:

$$\begin{aligned} i : j : k &= \frac{w(\text{Na})}{M_{\text{Na}}} : \frac{w(\text{S})}{M_{\text{S}}} : \frac{w(\text{O})}{M_{\text{O}}} = \\ &= \frac{32,40\%}{22,990 \text{ g mol}^{-1}} : \frac{22,58\%}{32,065 \text{ g mol}^{-1}} : \frac{45,02\%}{15,999 \text{ g mol}^{-1}} \end{aligned}$$

Primjer

Odredimo empirijsku formulu spoja kisika, natrija i sumpora u kojem su njihovi maseni udjeli redom $w(\text{O}) = 45,02\%$, $w(\text{Na}) = 32,40\%$ i $w(\text{S}) = 22,58\%$. Naš spoj ima empirijsku formulu $\text{Na}_i\text{S}_j\text{O}_k$ s maksimalno skraćenim prirodnim brojevima i , j i k takvim da je:

$$\begin{aligned} i : j : k &= \frac{w(\text{Na})}{M_{\text{Na}}} : \frac{w(\text{S})}{M_{\text{S}}} : \frac{w(\text{O})}{M_{\text{O}}} = \\ &= \frac{32,40\%}{22,990 \text{ g mol}^{-1}} : \frac{22,58\%}{32,065 \text{ g mol}^{-1}} : \frac{45,02\%}{15,999 \text{ g mol}^{-1}} = \\ &= \frac{32,40}{22,990} : \frac{22,58}{32,065} : \frac{45,02}{15,999} = 1,409 : 0,7042 : 2,814 = \\ &14090 : 7042 : 28140 \approx 2 : 1 : 4 \end{aligned}$$

pa je tražena empirijska formula Na_2SO_4 .

Zadatak

Alkemičar Wladolphus kuha napitak za sposobnost instant-polaganje ispita iz Matematike 1. Recept zahtijeva zmajevu krv, žablje suze i znoj šišmiša u omjeru 2 : 3 : 5. Alkemičar je u mješavinu zabunom ulio 12 mjerica žabljih suza više nego je trebao. Da bi popravio napitak, dodao je točno onoliko zmajeve krvi i znoja šišmiša koliko je bilo potrebno da omjer ponovno bude točan i svoj napitak će pokloniti svakom studentu koji mu ispravno odgovori koliko je zmajeve krvi i šišmišovog znoja dodao. Koliko je to bilo?

Zadatak

Alkemičar Wladolphus kuha napitak za sposobnost instant-polaganje ispita iz Matematike 1. Recept zahtijeva zmajevu krv, žablje suze i znoj šišmiša u omjeru 2 : 3 : 5. Alkemičar je u mješavinu zabunom ulio 12 mjerica žabljih suza više nego je trebao. Da bi popravio napitak, dodao je točno onoliko zmajeve krvi i znoja šišmiša koliko je bilo potrebno da omjer ponovno bude točan i svoj napitak će pokloniti svakom studentu koji mu ispravno odgovori koliko je zmajeve krvi i šišmišovog znoja dodao. Koliko je to bilo?

$$K : S : Z = 2 : 3 : 5$$

$$K = 2x, S = 3x, Z = 5x \quad S' = 3x + 12 = 3y$$

Zadatak

Alkemičar Wladolphus kuha napitak za sposobnost instant-polaganje ispita iz Matematike 1. Recept zahtijeva zmajevu krv, žablje suze i znoj šišmiša u omjeru 2 : 3 : 5. Alkemičar je u mješavinu zabunom ulio 12 mjerica žabljih suza više nego je trebao. Da bi popravio napitak, dodao je točno onoliko zmajeve krvi i znoja šišmiša koliko je bilo potrebno da omjer ponovno bude točan i svoj napitak će pokloniti svakom studentu koji mu ispravno odgovori koliko je zmajeve krvi i šišmišovog znoja dodao. Koliko je to bilo?

$$K : S : Z = 2 : 3 : 5$$

$$K = 2x, S = 3x, Z = 5x \quad S' = 3x + 12 = 3y \Rightarrow y = x + 4$$

Zadatak

Alkemičar Wladolphus kuha napitak za sposobnost instant-polaganje ispita iz Matematike 1. Recept zahtijeva zmajevu krv, žablje suze i znoj šišmiša u omjeru 2 : 3 : 5. Alkemičar je u mješavinu zabunom ulio 12 mjerica žabljih suza više nego je trebao. Da bi popravio napitak, dodao je točno onoliko zmajeve krvi i znoja šišmiša koliko je bilo potrebno da omjer ponovno bude točan i svoj napitak će pokloniti svakom studentu koji mu ispravno odgovori koliko je zmajeve krvi i šišmišovog znoja dodao. Koliko je to bilo?

$$K : S : Z = 2 : 3 : 5$$

$$K = 2x, S = 3x, Z = 5x \quad S' = 3x + 12 = 3y \Rightarrow y = x + 4 \Rightarrow$$

treba dodati 8 mjerica zmajeve krvi i 20 mjerica znoja šišmiša.

Nije sve proporcionalno ...

Primjer

Ako znamo da je temperatura od 10°C jednaka 50°F , to ne znači da je temperatura od 20°C jednaka 100°F . Iznosi temperature u $^{\circ}\text{C}$ i $^{\circ}\text{F}$ nisu proporcionalni, nego se iznos u $^{\circ}\text{F}$ dobiva množenjem temperature u $^{\circ}\text{C}$ s $\frac{9}{5}$ (proporcionalnost) uvećan za 32°F (ovo pribrajanje „kvari“) proporcionalnost.

Nije sve proporcionalno ...

Primjer

Ako znamo da je temperatura od 10°C jednaka 50°F , to ne znači da je temperatura od 20°C jednaka 100°F . Iznosi temperature u $^{\circ}\text{C}$ i $^{\circ}\text{F}$ nisu proporcionalni, nego se iznos u $^{\circ}\text{F}$ dobiva množenjem temperature u $^{\circ}\text{C}$ s $\frac{9}{5}$ (proporcionalnost) uvećan za 32°F (ovo pribrajanje „kvari“) proporcionalnost.

Zadatak

Ako prodaješ jednu bocu nekog vina za 20 florina, na 100 prodanih boca zaradit ćeš 30 Fl. Koliko ćeš dakle zaraditi prodavši ih 600 po 24 Fl. svaku?

Nije sve proporcionalno ...

Primjer

Ako znamo da je temperatura od 10°C jednaka 50°F , to ne znači da je temperatura od 20°C jednaka 100°F . Iznosi temperature u $^{\circ}\text{C}$ i $^{\circ}\text{F}$ nisu proporcionalni, nego se iznos u $^{\circ}\text{F}$ dobiva množenjem temperature u $^{\circ}\text{C}$ s $\frac{9}{5}$ (proporcionalnost) uvećan za 32°F (ovo pribrajanje „kvari“) proporcionalnost.

Zadatak

Ako prodaješ jednu bocu nekog vina za 20 florina, na 100 prodanih boca zaradit ćeš 30 Fl. Koliko ćeš dakle zaraditi prodavši ih 600 po 24 Fl. svaku?

30 florina je prihod od 2000 florina umanjen za trošak, dakle je trošak proizvodnje 100 boca jednak 1970 Fl.

Nije sve proporcionalno ...

Primjer

Ako znamo da je temperatura od 10°C jednaka 50°F , to ne znači da je temperatura od 20°C jednaka 100°F . Iznosi temperature u $^{\circ}\text{C}$ i $^{\circ}\text{F}$ nisu proporcionalni, nego se iznos u $^{\circ}\text{F}$ dobiva množenjem temperature u $^{\circ}\text{C}$ s $\frac{9}{5}$ (proporcionalnost) uvećan za 32°F (ovo pribrajanje „kvari“) proporcionalnost.

Zadatak

Ako prodaješ jednu bocu nekog vina za 20 florina, na 100 prodanih boca zaradit ćeš 30 Fl. Koliko ćeš dakle zaraditi prodavši ih 600 po 24 Fl. svaku?

30 florina je prihod od 2000 florina umanjen za trošak, dakle je trošak proizvodnje 100 boca jednak 1970 Fl. Trošak proizvodnje jedne boce je stoga 19,7 Fl., dakle za 600 boca profit je $600 \cdot (24 - 19,7) = 2580$ florina.

Postotci

Postotak

Postotak je racionalan broj izražen u mjernoj jedinici $\% = \frac{1}{100}$. Postoci se koriste za izražavanje udjela u nekoj cjelini, kao koeficijenti proporcionalnosti i za izražavanje vjerojatnosti. Ako se neki iznos poveća odnosno smanji za $p\%$, novi iznos je $1 \pm \frac{p}{100}$ puta stari iznos.

Primjer

1 % volumena je jedna stotina volumena, dok broj jedna stotinka pišemo i dalje $\frac{1}{100} = 0,01$, a ne kao 1 %.

Postotci

Postotak

Postotak je racionalan broj izražen u mjernoj jedinici $\% = \frac{1}{100}$. Postoci se koriste za izražavanje udjela u nekoj cjelini, kao koeficijenti proporcionalnosti i za izražavanje vjerojatnosti. Ako se neki iznos poveća odnosno smanji za $p\%$, novi iznos je $1 \pm \frac{p}{100}$ puta stari iznos.

Primjer

1 % volumena je jedna stotina volumena, dok broj jedna stotinka pišemo i dalje $\frac{1}{100} = 0,01$, a ne kao 1 %.

Kad kažemo da se nešto uveća ili umanjuje za neki iznos, to znači pribrajanje odnosno oduzimanje tog iznosa. Kad pak kažemo da se nešto promijenilo za određeni postotak, podrazumijeva se proporcionalnost s faktorom danim tim postotkom.

Primjer

Cijena smanjena za 5 eura je stara cijena minus 5 eura, a cijena smanjena za 5 % je 0,95 stare cijene.

Primjer

Cijena smanjena za 5 eura je stara cijena minus 5 eura, a cijena smanjena za 5 % je 0,95 stare cijene.

Primjer

U nekoj pekari tijekom prošle godine cijena bijelog kruha porasla je za 10 %. Danas nude bijeli kruh uz sniženje cijene za 10 %. Je li danas taj kruh jeftiniji, skuplji ili jednako skup kao lani?

Primjer

Cijena smanjena za 5 eura je stara cijena minus 5 eura, a cijena smanjena za 5 % je 0,95 stare cijene.

Primjer

U nekoj pekari tijekom prošle godine cijena bijelog kruha porasla je za 10 %. Danas nude bijeli kruh uz sniženje cijene za 10 %. Je li danas taj kruh jeftiniji, skuplji ili jednako skup kao lani? Ako je lanijska cijena bila C , znači da je redovna trenutna cijena $(1 + \frac{10}{100})C = 1,1C$. Danas imamo popus na tu cijenu, dakle danas je cijena $(1 - \frac{10}{100}) \cdot 1,1C = 0,9 \cdot 1,1C = 0,99C$.

Primjer

Cijena smanjena za 5 eura je stara cijena minus 5 eura, a cijena smanjena za 5 % je 0,95 stare cijene.

Primjer

U nekoj pekari tijekom prošle godine cijena bijelog kruha porasla je za 10 %. Danas nude bijeli kruh uz sniženje cijene za 10 %. Je li danas taj kruh jeftiniji, skuplji ili jednako skup kao lani? Ako je lanijska cijena bila C , znači da je redovna trenutna cijena $(1 + \frac{10}{100})C = 1,1C$. Danas imamo popus na tu cijenu, dakle danas je cijena $(1 - \frac{10}{100}) \cdot 1,1C = 0,9 \cdot 1,1C = 0,99C$.

Primjer

Pratite rezultate predsjedničkih izbora. Trenutno kandidat koji vas zanima ima $p\%$ od prebrojanih $q\%$ od N glasačkih listića. Onda on na kraju prebrojavanja može imati najviše $p\% \cdot q\% + (100 - q)\% = (\frac{pq}{100} + 100 - q)\%$ glasova.

Za brzo izračunavanje postotaka povremeno dobro dođe sljedeći „trik“: $p\%$ od x isto što i $x\%$ od p .

Za brzo izračunavanje postotaka povremeno dobro dođe sljedeći „trik“: $p\%$ od x isto što i $x\%$ od p .

Primjer

Izračunati 4% od 75 ide brže ako to gledamo kao $75\% = \frac{3}{4}$ od 4 , dakle 4% od 75 je jednako 3 .

Za brzo izračunavanje postotaka povremeno dobro dođe sljedeći „trik“: $p\%$ od x isto što i $x\%$ od p .

Primjer

Izračunati 4% od 75 ide brže ako to gledamo kao $75\% = \frac{3}{4}$ od 4, dakle 4% od 75 je jednako 3.

Zadatak

Ako uložite 1000 eura, koliko vremena bi trebalo da Vam se ulog udvostruči uz jednostavno ukamaćivanje uz kamate od 10% godišnje? A uz složeno ukamaćivanje jednom godišnje uz istu kamatu?

Za brzo izračunavanje postotaka povremeno dobro dođe sljedeći „trik“: $p\%$ od x isto što i $x\%$ od p .

Primjer

Izračunati 4% od 75 ide brže ako to gledamo kao $75\% = \frac{3}{4}$ od 4, dakle 4% od 75 je jednako 3.

Zadatak

Ako uložite 1000 eura, koliko vremena bi trebalo da Vam se ulog udvostruči uz jednostavno ukamaćivanje uz kamate od 10% godišnje? A uz složeno ukamaćivanje jednom godišnje uz istu kamatu?

Jednostavno ukamaćivanje znači da se kamata obračunava samo na početnu glavnicu: 1000, 1100, 1200, ...

Za brzo izračunavanje postotaka povremeno dobro dođe sljedeći „trik“: $p\%$ od x isto što i $x\%$ od p .

Primjer

Izračunati 4% od 75 ide brže ako to gledamo kao $75\% = \frac{3}{4}$ od 4, dakle 4% od 75 je jednako 3.

Zadatak

Ako uložite 1000 eura, koliko vremena bi trebalo da Vam se ulog udvostruči uz jednostavno ukamaćivanje uz kamate od 10% godišnje? A uz složeno ukamaćivanje jednom godišnje uz istu kamatu?

Jednostavno ukamaćivanje znači da se kamata obračunava samo na početnu glavnicu: 1000, 1100, 1200, ... Nakon n godina imamo $1000 + 100n$ eura, dakle $n = 10$.

Za brzo izračunavanje postotaka povremeno dobro dođe sljedeći „trik“: $p\%$ od x isto što i $x\%$ od p .

Primjer

Izračunati 4% od 75 ide brže ako to gledamo kao $75\% = \frac{3}{4}$ od 4, dakle 4% od 75 je jednako 3.

Zadatak

Ako uložite 1000 eura, koliko vremena bi trebalo da Vam se ulog udvostruči uz jednostavno ukamaćivanje uz kamate od 10% godišnje? A uz složeno ukamaćivanje jednom godišnje uz istu kamatu?

Jednostavno ukamaćivanje znači da se kamata obračunava samo na početnu glavniciu: 1000, 1100, 1200, ... Nakon n godina imamo $1000 + 100n$ eura, dakle $n = 10$. Složeno ukamaćivanje znači da se kamata svaki put pripisuje glavnici: 1000, 1100, 1111, ...

Za brzo izračunavanje postotaka povremeno dobro dođe sljedeći „trik“: $p\%$ od x isto što i $x\%$ od p .

Primjer

Izračunati 4% od 75 ide brže ako to gledamo kao $75\% = \frac{3}{4}$ od 4, dakle 4% od 75 je jednako 3.

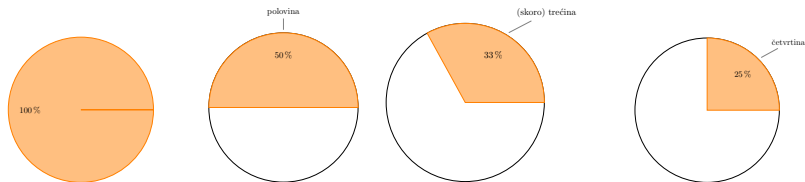
Zadatak

Ako uložite 1000 eura, koliko vremena bi trebalo da Vam se ulog udvostruči uz jednostavno ukamaćivanje uz kamate od 10% godišnje? A uz složeno ukamaćivanje jednom godišnje uz istu kamatu?

Jednostavno ukamaćivanje znači da se kamata obračunava samo na početnu glavniciu: 1000, 1100, 1200, ... Nakon n godina imamo $1000 + 100n$ eura, dakle $n = 10$. Složeno ukamaćivanje znači da se kamata svaki put pripisuje glavnici: 1000, 1100, 1111, ... Nakon n godina imamo $1000 \cdot 1,1^n$ eura, dakle $n = 8$.

Kružni dijagrami

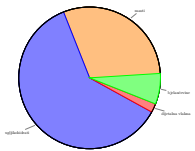
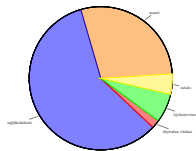
Udjeli u danoj cjelini često se prikazuju koristeći **kružne dijagrame**. U tim dijagramima cijeli krug predstavlja cjelinu, odnosno 100 %, a pojedini kružni isječki su takvi da njihove površine u odnosu na površinu kruga odgovaraju udjelima koje predstavljaju.



Zadatak

Sastojci	u 100 g	u 33,3 g
Energija	2225 kJ / 530 kcal	742 kJ / 177 kcal
Masti	29,5 g	9,9 g
Od čega zasićene masne kiseline	17,5 g	5,9 g
Ugljikohidrati	58,5 g	19,5 g
Od čega šećer	58,0 g	19,5 g
Dijetalna vlakna	1,9 g	0,6 g
Bjelančevine	6,5 g	2,2 g

Koji od kružnih dijagrama odgovara podacima?

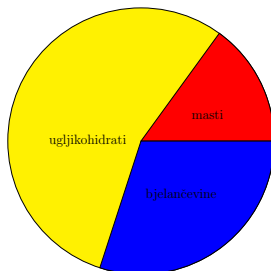


Primjer

Na slici je prikazan kružni dijagram s preporučenim udjelima hranjivih tvari u dnevnoj prehrani za odrasle osobe. Koji su iznosi tih udjela?

Očito je $U > 50\%$ i $B > 25\%$, $B \approx 2M$ & $U + B + M = 1 = 100\%$

To nije dovoljno da jednoznačno odredimo koji su to preporučeni udjeli!



Greške aproksimacija

Apsolutna i relativna greška aproksimacije

Relativna greška aproksimacije se definira kao kvocijent apsolutne greške i egzaktne vrijednosti, pri čemu je apsolutna greška aproksimacije apsolutna vrijednost razlike između aproksimacije i greške. Apsolutna vrijednost broja jednaka je tom broju ako je on nenegativan, a inače je jednaka njegovom suprotnom broju.

Greške aproksimacija

Apsolutna i relativna greška aproksimacije

Relativna greška aproksimacije se definira kao kvocijent apsolutne greške i egzaktnе vrijednosti, pri čemu je apsolutna greška aproksimacije apsolutna vrijednost razlike između aproksimacije i greške. Apsolutna vrijednost broja jednaka je tom broju ako je on nenegativan, a inače je jednaka njegovom suprotnom broju.

Primjer

Ako zaokružimo jednu trećinu na $33\% = 0,33$, apsolutna greška je $|\frac{1}{3} - 0,33| = 0,00\dot{3} = \frac{1}{300}$ pa je relativna greška $\frac{1/300}{1/3} = 1\%$.

Greške aproksimacija

Apsolutna i relativna greška aproksimacije

Relativna greška aproksimacije se definira kao kvocijent apsolutne greške i egzaktne vrijednosti, pri čemu je apsolutna greška aproksimacije apsolutna vrijednost razlike između aproksimacije i greške. Apsolutna vrijednost broja jednaka je tom broju ako je on nenegativan, a inače je jednaka njegovom suprotnom broju.

Primjer

Ako zaokružimo jednu trećinu na $33\% = 0,33$, apsolutna greška je $|\frac{1}{3} - 0,33| = 0,00\dot{3} = \frac{1}{300}$ pa je relativna greška $\frac{1/300}{1/3} = 1\%$. Ako zaokružimo jednu šestinu na $16,67\% = 0,1667$, apsolutna greška je $|\frac{1}{6} - 0,1667| = \frac{1}{30000}$ pa je relativna greška $\frac{1/30000}{1/3} = 0,1\%$.

Greška mjerenja nije isto što i greška aproksimacije uslijed uzimanja kraćeg decimalnog zapisa!!! Za račun s izmjerenim podacima držimo se pravila računa sa značajnim znamenkama.

Osnove vjerojatnosti

Vjerojatnost je matematička forma izražavanja stupnja uvjerenja u neki ishod za koji nije sigurno da će se dogoditi (ili da se dogodio), ali su poznati svi mogući drugi ishodi tzv. **slučajnog pokusa** (aktivnosti čiji ishod nije moguće unaprijed predvidjeti ili se desila u prošlosti, ali joj nije poznat ishod). Pojedinačni mogući ishodi slučajnog pokusa zovu se **elementarni događaji**. **Slučajni događaji** su mogući ishodi slučajnog pokusa.

Zadatak

Zašto izjava Luke Modrića da VAR treba „intervenirati samo ako je riječ o 300 posto očitoj pogrešci“ dobro zvuči, ali nije smisljena? Koji alternativni izraz biste Vi upotrijebili na njegovom mjestu?

Osnove vjerojatnosti

Vjerojatnost je matematička forma izražavanja stupnja uvjerenja u neki ishod za koji nije sigurno da će se dogoditi (ili da se dogodio), ali su poznati svi mogući drugi ishodi tzv. **slučajnog pokusa** (aktivnosti čiji ishod nije moguće unaprijed predvidjeti ili se desila u prošlosti, ali joj nije poznat ishod). Pojedinačni mogući ishodi slučajnog pokusa zovu se **elementarni događaji**. **Slučajni događaji** su mogući ishodi slučajnog pokusa.

Zadatak

Zašto izjava Luke Modrića da VAR treba „intervenirati samo ako je riječ o 300 posto očitoj pogrešci“ dobro zvuči, ali nije smisljena? Koji alternativni izraz biste Vi upotrijebili na njegovom mjestu?

Osnovno svojstvo vjerojatnosti

Vjerojatnost $P(A)$ svakog događaja A je uvijek broj između (uključivo) $0 = 0\%$ i $1 = 100\%$.

Ovdje ćemo razmatrati isključivo slučajeve kad postoji *konačno mnogo* mogućih ishoda. U tom slučaju vjerojatnost 1 predstavlja sigurnost, a vjerojatnost 0 predstavlja nemogućnost.

Ovdje ćemo razmatrati isključivo slučajeve kad postoji *konačno mnogo* mogućih ishoda. U tom slučaju vjerojatnost 1 predstavlja sigurnost, a vjerojatnost 0 predstavlja nemogućnost. Novčić može pasti na pismo ili glavu, dakle sigurno će pasti ili pismo ili glava.

Ovdje ćemo razmatrati isključivo slučajeve kad postoji *konačno mnogo* mogućih ishoda. U tom slučaju vjerojatnost 1 predstavlja sigurnost, a vjerojatnost 0 predstavlja nemogućnost.

Novčić može pasti na pismo ili glavu, dakle sigurno će pasti ili pismo ili glava. Elementarni događaji u ovom slučajnom pokusu su pismo i glava. Budući da će sigurno nastupiti neki elementarni događaj, zbroj vjerojatnosti svih elementarnih događaja mora iznositi 1. Dakle:

$$P(\text{pismo}) + P(\text{glava}) = 100\%.$$

Ovdje ćemo razmatrati isključivo slučajeve kad postoji *konačno mnogo* mogućih ishoda. U tom slučaju vjerojatnost 1 predstavlja sigurnost, a vjerojatnost 0 predstavlja nemogućnost.

Novčić može pasti na pismo ili glavu, dakle sigurno će pasti ili pismo ili glava. Elementarni događaji u ovom slučajnom pokusu su pismo i glava. Budući da će sigurno nastupiti neki elementarni događaj, zbroj vjerojatnosti svih elementarnih događaja mora iznositi 1. Dakle:

$$P(\text{pismo}) + P(\text{glava}) = 100\%.$$

Novčić smatramo pravednim ako je jednako vjerojatno da padne pismo ili glava, tj. ako je $P(\text{pismo}) = P(\text{glava})$. Uvrstimo li to u gornju jednakost dobivamo: Vjerojatnost da padne pismo, ili glava, u pojedinom bacanju novčića je $\frac{1}{2} = 50\%$.

Ovdje ćemo razmatrati isključivo slučajeve kad postoji *konačno mnogo* mogućih ishoda. U tom slučaju vjerojatnost 1 predstavlja sigurnost, a vjerojatnost 0 predstavlja nemogućnost.

Novčić može pasti na pismo ili glavu, dakle sigurno će pasti ili pismo ili glava. Elementarni događaji u ovom slučajnom pokusu su pismo i glava. Budući da će sigurno nastupiti neki elementarni događaj, zbroj vjerojatnosti svih elementarnih događaja mora iznositi 1. Dakle:

$$P(\text{pismo}) + P(\text{glava}) = 100\%.$$

Novčić smatramo pravednim ako je jednako vjerojatno da padne pismo ili glava, tj. ako je $P(\text{pismo}) = P(\text{glava})$. Uvrstimo li to ju gornju jednakost dobivamo: Vjerojatnost da padne pismo, ili glava, u pojedinom bacanju novčića je $\frac{1}{2} = 50\%$. Općenito, ako bacamo pravednu kockicu s n različito označenih strana, vjerojatnost svakog pojedinačnog ishoda bit će $\frac{1}{n}$.

Primjer

Kockica A na 5 od svojih 6 strana ima napisano 3, a na zadnjoj piše 6. Bacanje takve kockice je slučajan pokus s dva elementarna događaja, 3 i 6, od kojih prvi ima vjerojatnost $\frac{5}{6}$, a drugi $\frac{1}{6}$.

Primjer

Kockica A na 5 od svojih 6 strana ima napisano 3, a na zadnjoj piše 6. Bacanje takve kockice je slučajan pokus s dva elementarna događaja, 3 i 6, od kojih prvi ima vjerojatnost $\frac{5}{6}$, a drugi $\frac{1}{6}$.

Događaji koji se međusobno isključuju

Ako se događaji $A, B, \dots$ međusobno isključuju, tj. nikoja dva se ne mogu istovremeno dogoditi, onda je vjerojatnost $P(A \cup B)$ da se dogodio bar jedan od događaja $A, B, \dots$ jednaka zbroju vjerojatnosti od $A, B, \dots$: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) + \dots$

Primjer

Kockica A na 5 od svojih 6 strana ima napisano 3, a na zadnjoj piše 6. Bacanje takve kockice je slučajan pokus s dva elementarna događaja, 3 i 6, od kojih prvi ima vjerojatnost $\frac{5}{6}$, a drugi $\frac{1}{6}$.

Događaji koji se međusobno isključuju

Ako se događaji $A, B, \dots$ međusobno isključuju, tj. nikoja dva se ne mogu istovremeno dogoditi, onda je vjerojatnost $P(A \cup B)$ da se dogodio bar jedan od događaja $A, B, \dots$ jednaka zbroju vjerojatnosti od $A, B, \dots$: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) + \dots$

Primjer

Vjerojatnost da pri bacanju dodekaedarske kockice padne prost broj je $\frac{1}{12} + \frac{1}{12} + \frac{1}{12} + \frac{1}{12} + \frac{1}{12} = \frac{5}{12}$.

Klasična vjerojatnost a priori

Ako slučajni pokus ima samo konačno mnogo, n , mogućih i jednako vjerojatnih ishoda (elementarnih događaja), vjerojatnost događaja A je količnik broja za A povoljnih elementarnih događaja i broja n .

Klasična vjerojatnost a priori

Ako slučajni pokus ima samo konačno mnogo, n , mogućih i jednako vjerojatnih ishoda (elementarnih događaja), vjerojatnost događaja A je količnik broja za A povoljnih elementarnih događaja i broja n .

Zadatak

Koji su elementarni događaji i koje su im vjerojatnosti za kockicu B koja na tri strane ima napisano 2 i na tri strane 5? A za kockicu C koja na jednoj strani ima 1 i na pet strana 4?

Klasična vjerojatnost a priori

Ako slučajni pokus ima samo konačno mnogo, n , mogućih i jednako vjerojatnih ishoda (elementarnih događaja), vjerojatnost događaja A je količnik broja za A povoljnih elementarnih događaja i broja n .

Zadatak

Koji su elementarni događaji i koje su im vjerojatnosti za kockicu B koja na tri strane ima napisano 2 i na tri strane 5? A za kockicu C koja na jednoj strani ima 1 i na pet strana 4?

Za prvu: 2 i 5, oba imaju vjerojatnost 50 %.

Klasična vjerojatnost a priori

Ako slučajni pokus ima samo konačno mnogo, n , mogućih i jednako vjerojatnih ishoda (elementarnih događaja), vjerojatnost događaja A je količnik broja za A povoljnih elementarnih događaja i broja n .

Zadatak

Koji su elementarni događaji i koje su im vjerojatnosti za kockicu B koja na tri strane ima napisano 2 i na tri strane 5? A za kockicu C koja na jednoj strani ima 1 i na pet strana 4?

Za prvu: 2 i 5, oba imaju vjerojatnost 50 %. Za drugu: 1 i 4 s vjerojatnostima $\frac{1}{6}$ i $\frac{5}{6}$.

Klasična vjerojatnost a priori

Ako slučajni pokus ima samo konačno mnogo, n , mogućih i jednako vjerojatnih ishoda (elementarnih događaja), vjerojatnost događaja A je količnik broja za A povoljnih elementarnih događaja i broja n .

Zadatak

Koji su elementarni događaji i koje su im vjerojatnosti za kockicu B koja na tri strane ima napisano 2 i na tri strane 5? A za kockicu C koja na jednoj strani ima 1 i na pet strana 4?

Za prvu: 2 i 5, oba imaju vjerojatnost 50 %. Za drugu: 1 i 4 s vjerojatnostima $\frac{1}{6}$ i $\frac{5}{6}$.

Zadatak

Veliki matematičar J. L. R. D'Alembert tvrdio je da je vjerojatnost bar jedne glave u dva bacanja novčića jednaka $\frac{2}{3}$, argumentirajući da ako je već u prvom bacanju pala glava, nije potrebno igrati dalje pa imamo tri moguća elementarna događaja: G, PG, PP?!

D'Alembert je prenio jednakost vjerojatnosti elementarnih događaja na nepravilan popis istih. Elementarni događaji su GG, GP, PG i PP. Oni jesu jednako vjerojatni.

D'Alembert je prenio jednakost vjerojatnosti elementarnih događaja na nepravilan popis istih. Elementarni događaji su GG, GP, PG i PP. Oni jesu jednako vjerojatni.

Primjer

U televizijskom natjecanju glavna nagrada, auto, skrivena je iza jednih od triju vrata. Iza drugih dvaju vrata su utješne nagrade, po jedna koza. Voditelj zna gdje je što, a natjecatelj pogađa. Nakon što natjecatelj odabere jedna vrata, voditelj otvara jedno od preostalih dvaju i otkriva kozu. Natjecatelj, koji želi osvojiti auto, a ne kozu, sad ima pravo predomisli se ili ostati pri prvom odabiru. Što je pametnije, u smislu povećanja vjerojatnosti osvajanja auta?

D'Alembert je prenio jednakost vjerojatnosti elementarnih događaja na nepravilan popis istih. Elementarni događaji su GG, GP, PG i PP. Oni jesu jednako vjerojatni.

Primjer

U televizijskom natjecanju glavna nagrada, auto, skrivena je iza jednih od triju vrata. Iza drugih dvaju vrata su utješne nagrade, po jedna koza. Voditelj zna gdje je što, a natjecatelj pogađa. Nakon što natjecatelj odabere jedna vrata, voditelj otvara jedno od preostalih dvaju i otkriva kozu. Natjecatelj, koji želi osvojiti auto, a ne kozu, sad ima pravo predomisli se ili ostati pri prvom odabiru. Što je pametnije, u smislu povećanja vjerojatnosti osvajanja auta? Vjerojatnost dobivanja auta promjenom odabira možemo smanjiti samo ako smo na početku bili pogodili vrata, dakle s vjerojatnosti $\frac{2}{3}$ promjena je bolja odluka.

Više o uvjetnoj vjerojatnosti: [Math is Fun: Conditional Probability](#)

Kad množimo vjerojatnosti?

Slučajni pokusi se u pravilu ponavljaju uzastopno, više puta (ili više puta odjednom ekvivalentni pokus). Ako su izvođenja međusobno *nezavisna* (nijedan pokus ne utječe na rezultat drugog), iz poznavanja vjerojatnosti za događaje u pojedinačnom izvođenju pokusa vjerojatnosti da se desi neki slijed događaja dobivamo množenjem.

Kad množimo vjerojatnosti?

Slučajni pokusi se u pravilu ponavljaju uzastopno, više puta (ili više puta odjednom ekvivalentni pokus). Ako su izvođenja međusobno *nezavisna* (nijedan pokus ne utječe na rezultat drugog), iz poznavanja vjerojatnosti za događaje u pojedinačnom izvođenju pokusa vjerojatnosti da se desi neki slijed događaja dobivamo množenjem.

Primjer

Ako bacamo par kockica i zanima nas hoće li u jednom bacanju pasti , vjerojatnost da se to desi u pojedinom bacanju je $\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{36} \approx 2,78\%$. Ako nas zanima vjerojatnost da u tri bacanja para kockicom zaredom padne par , vjerojatnost je

$$\frac{1}{36} \cdot \frac{1}{36} \cdot \frac{1}{36} = \frac{1}{36^3} = \frac{1}{6^6} \approx 0,0021\%.$$

Primjer

Koja je vjerojatnost da u jednom krugu u kojem jedan igrač baca kockicu A, a drugi kockicu B, pobijedi (dobije veći broj) prvi igrač?

Primjer

Koja je vjerojatnost da u jednom krugu u kojem jedan igrač baca kockicu A, a drugi kockicu B, pobijedi (dobije veći broj) prvi igrač? Imamo četiri elementarna događaja:

		3_A	6_A
		$5/6$	$1/6$
2_B	$1/2$	A	A
5_B	$1/2$	B	A

Dakle,

Primjer

Koja je vjerojatnost da u jednom krugu u kojem jedan igrač baca kockicu A, a drugi kockicu B, pobijedi (dobije veći broj) prvi igrač? Imamo četiri elementarna događaja:

		3_A	6_A
		$5/6$	$1/6$
2_B	$1/2$	A	A
5_B	$1/2$	B	A

Dakle, prvi pobjeđuje s vjerojatnosti

$$\frac{5}{6} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2} = \frac{7}{12}.$$

Zadatak

Nastavite primjer izračunavanjem vjerojatnosti da igrač koji igra s kockicom B pobijedi onog s kockicom C i vjerojatnosti da igrač koji igra s kockicom C pobijedi onog koji igra s kockicom A.

Zadatak

Nastavite primjer izračunavanjem vjerojatnosti da igrač koji igra s kockicom B pobijedi onog s kockicom C i vjerojatnosti da igrač koji igra s kockicom C pobijedi onog koji igra s kockicom A.

		1 _C	4 _C
		1/6	5/6
2 _B	1/2	B	C
5 _B	1/2	B	B

		3 _A	6 _A
		5/6	1/6
1 _C	1/6	A	A
4 _C	5/6	C	A

Vjerojatnost da B pobijedi C je $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6} + \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{6} = \frac{1}{2} \cdot \frac{7}{6} = \frac{7}{12}$.

Vjerojatnost da C pobijedi A je $\frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} = \frac{25}{36}$.

Više o ovakvim kockicama: [ovdje](#)

Vjerojatnost suprotnog događaja

Ako razmatramo slučajni događaj A („dogodilo se A ”), s A^c označavamo njegov **suprotni događaj** („nije se dogodio A ”).

Vjerojatnost suprotnog događaja

Ako razmatramo slučajni događaj A („dogodilo se A ”), s A^c označavamo njegov **suprotni događaj** („nije se dogodio A ”). Sigurno se A ili dogodi ili ne dogodi pa vrijedi $P(A) + P(A^c) = 1$. Dakle, vrijedi sljedeća **formula za vjerojatnost suprotnog događaja**:

$$P(A^c) = 1 - P(A).$$

Primjer

Vjerojatnost da u jednom bacanju para kockica ne padne  je

Vjerojatnost suprotnog događaja

Ako razmatramo slučajni događaj A („dogodilo se A ”), s A^c označavamo njegov **suprotni događaj** („nije se dogodio A ”). Sigurno se A ili dogodi ili ne dogodi pa vrijedi $P(A) + P(A^c) = 1$. Dakle, vrijedi sljedeća **formula za vjerojatnost suprotnog događaja**:

$$P(A^c) = 1 - P(A).$$

Primjer

Vjerojatnost da u jednom bacanju para kockica ne padne  je $1 - \frac{1}{36} = \frac{35}{36}$ pa je vjerojatnost da u tri bacanja zaredom nijednom ne padne  jednaka

Vjerojatnost suprotnog događaja

Ako razmatramo slučajni događaj A („dogodilo se A ”), s A^c označavamo njegov **suprotni događaj** („nije se dogodio A ”). Sigurno se A ili dogodi ili ne dogodi pa vrijedi $P(A) + P(A^c) = 1$. Dakle, vrijedi sljedeća **formula za vjerojatnost suprotnog događaja**:

$$P(A^c) = 1 - P(A).$$

Primjer

Vjerojatnost da u jednom bacanju para kockica ne padne  je $1 - \frac{1}{36} = \frac{35}{36}$ pa je vjerojatnost da u tri bacanja zaredom nijednom ne padne  jednaka $\left(\frac{35}{36}\right)^3 = \frac{42875}{46656} \approx 91,90\%$. Zašto zbroj te vjerojatnosti i vjerojatnosti da u tri bacanja zaredom padne par šestica nije 100%?

Primjer

Radite na trećem katu u neboderu s 20 katova i jednim dizalom. Prijatelj Vam radi na 5. katu pa u pauzama za kavu rado odlazite na 17. kat. No, imate dojam da kad pozovete dizalo, puno češće ide dolje nego gore i obratno, kad se vraćate na svoj kat imate osjećaj da još češće ide prema gore nego prema dolje. Imate li stvarno peh?

Primjer

Radite na trećem katu u neboderu s 20 katova i jednim dizalom. Prijatelj Vam radi na 5. katu pa u pauzama za kavu rado odlazite na 17. kat. No, imate dojam da kad pozovete dizalo, puno češće ide dolje nego gore i obratno, kad se vraćate na svoj kat imate osjećaj da još češće ide prema gore nego prema dolje. Imate li stvarno peh?

Imamo dakle ukupno 19 katova za koje je moguće da dizalo ide prema dolje. Ako ste na 5. katu, dizalo će ići prema dolje ako je u trenutku poziva bilo na nekom od 15 katova iznad Vas, tj. s vjerojatnosti $\frac{15}{19} \approx 78,95\%$.

Primjer

Radite na trećem katu u neboderu s 20 katova i jednim dizalom. Prijatelj Vam radi na 5. katu pa u pauzama za kavu rado odlazite na 17. kat. No, imate dojam da kad pozovete dizalo, puno češće ide dolje nego gore i obratno, kad se vraćate na svoj kat imate osjećaj da još češće ide prema gore nego prema dolje. Imate li stvarno peh?

Imamo dakle ukupno 19 katova za koje je moguće da dizalo ide prema dolje. Ako ste na 5. katu, dizalo će ići prema dolje ako je u trenutku poziva bilo na nekom od 15 katova iznad Vas, tj. s vjerojatnosti $\frac{15}{19} \approx 78,95\%$. Također, imamo ukupno 19 katova za koje je moguće da dizalo ide prema gore. Ako ste na 17. katu, dizalo će ići prema gore ako je u trenutku poziva bilo na nekom od 16 katova ispod Vas, tj. s vjerojatnosti $\frac{16}{19} \approx 84,21\%$.

Općenito, ako ste na m -tom katu ($m > 1$) u zgradi s N katova, vjerojatnost da kad pozovete dizalo ono ide prema dolje/gore je $\frac{N-m}{N-1}$.

Koliko Vas je trenutno ovdje?

Koliko Vas je trenutno ovdje? Tko bi prihvatio okladu u omjeru 1:1 da bar dvoje Vas ima isti dan rođendan? A da netko ima isti rođendan kao ja?

Koliko Vas je trenutno ovdje? Tko bi prihvatio okladu u omjeru 1:1 da bar dvoje Vas ima isti dan rođendan? A da netko ima isti rođendan kao ja? A omjer ...

Koliko Vas je trenutno ovdje? Tko bi prihvatio okladu u omjeru 1:1 da bar dvoje Vas ima isti dan rođendan? A da netko ima isti rođendan kao ja? A omjer ...

Primjer

Na terenu na početku svake nogometne utakmice su 23 osobe: Po 11 igrača svake momčadi i glavni sudac. Isplati li se kladiti, uz omjer 1 : 1, da će dvije od tih osoba imati rođendan na isti dan? Vjerojatnost da dvije osobe nemaju isti dan rođendan je $\frac{364}{365}$;

Koliko Vas je trenutno ovdje? Tko bi prihvatio okladu u omjeru 1:1 da bar dvoje Vas ima isti dan rođendan? A da netko ima isti rođendan kao ja? A omjer ...

Primjer

Na terenu na početku svake nogometne utakmice su 23 osobe: Po 11 igrača svake momčadi i glavni sudac. Isplati li se kladiti, uz omjer 1 : 1, da će dvije od tih osoba imati rođendan na isti dan? Vjerojatnost da dvije osobe nemaju isti dan rođendan je $\frac{364}{365}$; vjerojatnost da tri osobe nemaju isti dan rođendan je $\frac{364}{365} \cdot \frac{363}{365}$;

Koliko Vas je trenutno ovdje? Tko bi prihvatio okladu u omjeru 1:1 da bar dvoje Vas ima isti dan rođendan? A da netko ima isti rođendan kao ja? A omjer ...

Primjer

Na terenu na početku svake nogometne utakmice su 23 osobe: Po 11 igrača svake momčadi i glavni sudac. Isplati li se kladiti, uz omjer 1 : 1, da će dvije od tih osoba imati rođendan na isti dan? Vjerojatnost da dvije osobe nemaju isti dan rođendan je $\frac{364}{365}$; vjerojatnost da tri osobe nemaju isti dan rođendan je $\frac{364}{365} \cdot \frac{363}{365}$; vjerojatnost da od 23 osobe nikoje dvije ne dijele rođendan je $\frac{364 \cdot \dots \cdot 343}{365^{22}}$. Dakle, vjerojatnost da bar dvije dijele rođenda je $1 - \frac{364 \cdot \dots \cdot 343}{365^{22}} \approx 50,73\% > \frac{1}{2}$, dakle za 23 osobe klađenje uz omjer 1 : 1 bi bilo isplativo za Vas jer je vjerojatnije da ste u pravu nego da niste.

Koliko Vas je trenutno ovdje? Tko bi prihvatio okladu u omjeru 1:1 da bar dvoje Vas ima isti dan rođendan? A da netko ima isti rođendan kao ja? A omjer ...

Primjer

Na terenu na početku svake nogometne utakmice su 23 osobe: Po 11 igrača svake momčadi i glavni sudac. Isplati li se kladiti, uz omjer 1 : 1, da će dvije od tih osoba imati rođendan na isti dan? Vjerojatnost da dvije osobe nemaju isti dan rođendan je $\frac{364}{365}$; vjerojatnost da tri osobe nemaju isti dan rođendan je $\frac{364}{365} \cdot \frac{363}{365}$; vjerojatnost da od 23 osobe nikoje dvije ne dijele rođendan je $\frac{364 \cdot \dots \cdot 343}{365^{22}}$. Dakle, vjerojatnost da bar dvije dijele rođenda je $1 - \frac{364 \cdot \dots \cdot 343}{365^{22}} \approx 50,73\% > \frac{1}{2}$, dakle za 23 osobe klađenje uz omjer 1 : 1 bi bilo isplativo za Vas jer je vjerojatnije da ste u pravu nego da niste.

Vjerojatnost da jedna od 22 osobe ima rođendan kad i jedna određena od njih je $1 - \left(\frac{364}{365}\right)^{22} \approx 5,86\%$ (16 : 1).