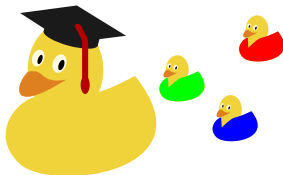


Matematika 1 (5. listopada 2026.)

Franka Miriam Brückler



Osnove teorije vjerojatnosti

Ovdje razmatramo isključivo slučajeve kad postoji *konačno mnogo* mogućih ishoda. U tom slučaju vjerojatnost 1 predstavlja sigurnost, a vjerojatnost 0 predstavlja nemogućnost.

Osnove teorije vjerojatnosti

Ovdje razmatramo isključivo slučajeve kad postoji *konačno mnogo* mogućih ishoda. U tom slučaju vjerojatnost 1 predstavlja sigurnost, a vjerojatnost 0 predstavlja nemogućnost.

Novčić može pasti na pismo ili glavu, dakle sigurno će pasti ili P ili G.

Osnove teorije vjerojatnosti

Ovdje razmatramo isključivo slučajeve kad postoji *konačno mnogo* mogućih ishoda. U tom slučaju vjerojatnost 1 predstavlja sigurnost, a vjerojatnost 0 predstavlja nemogućnost.

Novčić može pasti na pismo ili glavu, dakle sigurno će pasti ili P ili G. Elementarni događaji u ovom slučajnom pokusu su P i G.

Budući da će sigurno nastupiti neki elementarni događaj, zbroj vjerojatnosti svih elementarnih događaja mora iznositi 1. Dakle:

$$P(P) + P(G) = 100\%.$$

Osnove teorije vjerojatnosti

Ovdje razmatramo isključivo slučajeve kad postoji *konačno mnogo* mogućih ishoda. U tom slučaju vjerojatnost 1 predstavlja sigurnost, a vjerojatnost 0 predstavlja nemogućnost.

Novčić može pasti na pismo ili glavu, dakle sigurno će pasti ili P ili G. Elementarni događaji u ovom slučajnom pokusu su P i G.

Budući da će sigurno nastupiti neki elementarni događaj, zbroj vjerojatnosti svih elementarnih događaja mora iznositi 1. Dakle:

$$P(P) + P(G) = 100\%.$$

Novčić smatramo pravednim ako je jednako vjerojatno da padne pismo ili glava, tj. ako je $P(P) = P(G)$. Uvrstimo li to u gornju jednakost dobivamo: Vjerojatnost da padne P, ili G, u pojedinom bacanju novčića je $\frac{1}{2} = 50\%$.

Osnove teorije vjerojatnosti

Ovdje razmatramo isključivo slučajeve kad postoji *konačno mnogo* mogućih ishoda. U tom slučaju vjerojatnost 1 predstavlja sigurnost, a vjerojatnost 0 predstavlja nemogućnost.

Novčić može pasti na pismo ili glavu, dakle sigurno će pasti ili P ili G. Elementarni događaji u ovom slučajnom pokusu su P i G.

Budući da će sigurno nastupiti neki elementarni događaj, zbroj vjerojatnosti svih elementarnih događaja mora iznositi 1. Dakle:

$$P(P) + P(G) = 100\%.$$

Novčić smatramo pravednim ako je jednako vjerojatno da padne pismo ili glava, tj. ako je $P(P) = P(G)$. Uvrstimo li to u gornju jednakost dobivamo: Vjerojatnost da padne P, ili G, u pojedinom bacanju novčića je $\frac{1}{2} = 50\%$. Ako bacamo pravednu kockicu s n različito označenih strana, vjerojatnost svakog pojedinačnog ishoda je $\frac{1}{n}$.

Kad zbrajamo vjerojatnosti?



Primjer

Kockica A na 5 od svojih 6 strana ima napisano 3, a na zadnjoj piše 6. Bacanje takve kockice je slučajan pokus s dva elementarna događaja, 3 i 6, od kojih prvi ima vjerojatnost $\frac{5}{6}$, a drugi $\frac{1}{6}$.

Kad zbrajamo vjerojatnosti?



Primjer

Kockica A na 5 od svojih 6 strana ima napisano 3, a na zadnjoj piše 6. Bacanje takve kockice je slučajani pokus s dva elementarna događaja, 3 i 6, od kojih prvi ima vjerojatnost $\frac{5}{6}$, a drugi $\frac{1}{6}$.

Događaji koji se međusobno isključuju

Ako se događaji $A, B, \dots$ međusobno isključuju, tj. nikoja dva se ne mogu istovremeno dogoditi, onda je vjerojatnost $P(A \cup B)$ da se dogodio bar jedan od događaja $A, B, \dots$ jednaka zbroju vjerojatnosti od $A, B, \dots$: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) + \dots$

Kad zbrajamo vjerojatnosti?



Primjer

Kockica A na 5 od svojih 6 strana ima napisano 3, a na zadnjoj piše 6. Bacanje takve kockice je slučajan pokus s dva elementarna događaja, 3 i 6, od kojih prvi ima vjerojatnost $\frac{5}{6}$, a drugi $\frac{1}{6}$.

Događaji koji se međusobno isključuju

Ako se događaji $A, B, \dots$ međusobno isključuju, tj. nikoja dva se ne mogu istovremeno dogoditi, onda je vjerojatnost $P(A \cup B)$ da se dogodio bar jedan od događaja $A, B, \dots$ jednaka zbroju vjerojatnosti od $A, B, \dots$: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) + \dots$

Primjer

Vjerojatnost da pri bacanju dodekaedarske kockice padne prost broj je $\frac{1}{12} + \frac{1}{12} + \frac{1}{12} + \frac{1}{12} + \frac{1}{12} = \frac{5}{12}$.

Klasična vjerojatnost a priori

Ako slučajni pokus ima samo konačno mnogo, n , mogućih i jednako vjerojatnih ishoda (elementarnih događaja), vjerojatnost događaja A je količnik broja za A povoljnih elementarnih događaja i broja n .

Klasična vjerojatnost a priori

Ako slučajni pokus ima samo konačno mnogo, n , mogućih i jednako vjerojatnih ishoda (elementarnih događaja), vjerojatnost događaja A je količnik broja za A povoljnih elementarnih događaja i broja n .

Zadatak

Koji su elementarni događaji i koje su im vjerojatnosti za kockicu B koja na tri strane ima napisano 2 i na tri strane 5? A za kockicu C koja na jednoj strani ima 1 i na pet strana 4?

Klasična vjerojatnost a priori

Ako slučajni pokus ima samo konačno mnogo, n , mogućih i jednako vjerojatnih ishoda (elementarnih događaja), vjerojatnost događaja A je količnik broja za A povoljnih elementarnih događaja i broja n .

Zadatak

Koji su elementarni događaji i koje su im vjerojatnosti za kockicu B koja na tri strane ima napisano 2 i na tri strane 5? A za kockicu C koja na jednoj strani ima 1 i na pet strana 4?

Za prvu: 2 i 5, oba imaju vjerojatnost 50 %.

Klasična vjerojatnost a priori

Ako slučajni pokus ima samo konačno mnogo, n , mogućih i jednako vjerojatnih ishoda (elementarnih događaja), vjerojatnost događaja A je količnik broja za A povoljnih elementarnih događaja i broja n .

Zadatak

Koji su elementarni događaji i koje su im vjerojatnosti za kockicu B koja na tri strane ima napisano 2 i na tri strane 5? A za kockicu C koja na jednoj strani ima 1 i na pet strana 4?

Za prvu: 2 i 5, oba imaju vjerojatnost 50 %. Za drugu: 1 i 4 s vjerojatnostima $\frac{1}{6}$ i $\frac{5}{6}$.

Klasična vjerojatnost a priori

Ako slučajni pokus ima samo konačno mnogo, n , mogućih i jednako vjerojatnih ishoda (elementarnih događaja), vjerojatnost događaja A je količnik broja za A povoljnih elementarnih događaja i broja n .

Zadatak

Koji su elementarni događaji i koje su im vjerojatnosti za kockicu B koja na tri strane ima napisano 2 i na tri strane 5? A za kockicu C koja na jednoj strani ima 1 i na pet strana 4?

Za prvu: 2 i 5, oba imaju vjerojatnost 50 %. Za drugu: 1 i 4 s vjerojatnostima $\frac{1}{6}$ i $\frac{5}{6}$.

Ako razmatramo slučajni događaj A („dogodilo se A ”), s A^c označavamo njegov **suprotni događaj** („nije se dogodio A ”).

Klasična vjerojatnost a priori

Ako slučajni pokus ima samo konačno mnogo, n , mogućih i jednako vjerojatnih ishoda (elementarnih događaja), vjerojatnost događaja A je količnik broja za A povoljnih elementarnih događaja i broja n .

Zadatak

Koji su elementarni događaji i koje su im vjerojatnosti za kockicu B koja na tri strane ima napisano 2 i na tri strane 5? A za kockicu C koja na jednoj strani ima 1 i na pet strana 4?

Za prvu: 2 i 5, oba imaju vjerojatnost 50 %. Za drugu: 1 i 4 s vjerojatnostima $\frac{1}{6}$ i $\frac{5}{6}$.

Ako razmatramo slučajni događaj A („dogodilo se A ”), s A^c označavamo njegov **suprotni događaj** („nije se dogodio A ”).

Sigurno se A ili dogodi ili ne dogodi pa vrijedi $P(A) + P(A^c) = 1$.

Dakle, vrijedi sljedeća **formula za vjerojatnost suprotnog događaja**:

Vjerojatnost suprotnog događaja

$$P(A^c) = 1 - P(A)$$

Primjer

Vjerojatnost prolaska ispita jednaka je 100% – vjerojatnost pada ispita.

Vjerojatnost suprotnog događaja

$$P(A^c) = 1 - P(A)$$

Primjer

Vjerojatnost prolaska ispita jednaka je 100 % – vjerojatnost pada ispita.

Primjer

U televizijskom natjecanju glavna nagrada, auto, skrivena je iza jednih od triju vrata. Iza drugih dvaju vrata su utješne nagrade, po jedna koza. Voditelj zna gdje je što, a natjecatelj pogađa. Nakon što natjecatelj odabere jedna vrata, voditelj otvara jedno od preostalih dvaju i otkriva kozu. Natjecatelj, koji želi osvojiti auto, a ne kozu, sad ima pravo predomisli se ili ostati pri prvom odabiru. Što je pametnije, u smislu povećanja vjerojatnosti osvajanja auta?

Vjerojatnost suprotnog događaja

$$P(A^c) = 1 - P(A)$$

Primjer

Vjerojatnost prolaska ispita jednaka je 100 % – vjerojatnost pada ispita.

Primjer

U televizijskom natjecanju glavna nagrada, auto, skrivena je iza jednih od triju vrata. Iza drugih dvaju vrata su utješne nagrade, po jedna koza. Voditelj zna gdje je što, a natjecatelj pogađa. Nakon što natjecatelj odabere jedna vrata, voditelj otvara jedno od preostalih dvaju i otkriva kozu. Natjecatelj, koji želi osvojiti auto, a ne kozu, sad ima pravo predomisliti se ili ostati pri prvom odabiru. Što je pametnije, u smislu povećanja vjerojatnosti osvajanja auta? Vjerojatnost dobitka auta promjenom odabira možemo smanjiti samo ako smo na početku bili pogodili vrata, dakle s vjerojatnosti $1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$ promjena je bolja odluka.

Kad množimo vjerojatnosti?

Slučajni pokusi se u pravilu ponavljaju uzastopno, više puta (ili više puta odjednom ekvivalentni pokus). Ako su izvođenja međusobno *nezavisna* (nijedan pokus ne utječe na rezultat drugog), iz poznavanja vjerojatnosti za događaje u pojedinačnom izvođenju pokusa vjerojatnosti da se desi neki slijed događaja dobivamo množenjem.

Kad množimo vjerojatnosti?

Slučajni pokusi se u pravilu ponavljaju uzastopno, više puta (ili više puta odjednom ekvivalentni pokus). Ako su izvođenja međusobno *nezavisna* (nijedan pokus ne utječe na rezultat drugog), iz poznavanja vjerojatnosti za događaje u pojedinačnom izvođenju pokusa vjerojatnosti da se desi neki slijed događaja dobivamo množenjem.

Zadatak

Veliki matematičar J. L. R. D'Alembert tvrdio je da je vjerojatnost bar jedne glave u dva bacanja novčića jednaka $\frac{2}{3}$, argumentirajući da ako je već u prvom bacanju pala glava, nije potrebno igrati dalje pa imamo tri moguća elementarna događaja: G, PG, PP?!

D'Alembert je prenio jednakost vjerojatnosti elementarnih događaja na nepravilan popis istih. Elementarni događaji su GG, GP, PG i PP. Oni jesu jednako vjerojatni.

Možemo to gledati i ovako: Suprotni događaj od „pala je bar jedna glava“ je „nije pala glava“, tj. uzastopno su pala dva pisma. Dakle, vjerojatnost da padne bar jedan glava u dva bacanja je

$$1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{4}.$$

Možemo to gledati i ovako: Suprotni događaj od „pala je bar jedna glava“ je „nije pala glava“, tj. uzastopno su pala dva pisma. Dakle, vjerojatnost da padne bar jedan glava u dva bacanja je $1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{4}$.

Primjer

Ako bacamo par kockica i zanima nas hoće li u jednom bacanju pasti , vjerojatnost da se to desi u pojedinom bacanju je $\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{36} \approx 2,78\%$. Ako nas zanima vjerojatnost da u tri bacanja para kockicom zaredom padne par , vjerojatnost je

$$\frac{1}{36} \cdot \frac{1}{36} \cdot \frac{1}{36} = \frac{1}{36^3} = \frac{1}{6^6} \approx 0,0021\%.$$

Možemo to gledati i ovako: Suprotni događaj od „pala je bar jedna glava“ je „nije pala glava“, tj. uzastopno su pala dva pisma. Dakle, vjerojatnost da padne bar jedan glava u dva bacanja je $1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{4}$.

Primjer

Ako bacamo par kockica i zanima nas hoće li u jednom bacanju pasti , vjerojatnost da se to desi u pojedinom bacanju je $\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{36} \approx 2,78\%$. Ako nas zanima vjerojatnost da u tri bacanja para kockicom zaredom padne par , vjerojatnost je

$$\frac{1}{36} \cdot \frac{1}{36} \cdot \frac{1}{36} = \frac{1}{36^3} = \frac{1}{6^6} \approx 0,0021\%.$$

Vjerojatnost da u jednom bacanju para kockica ne padne  je

Možemo to gledati i ovako: Suprotni događaj od „pala je bar jedna glava“ je „nije pala glava“, tj. uzastopno su pala dva pisma. Dakle, vjerojatnost da padne bar jedan glava u dva bacanja je $1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{4}$.

Primjer

Ako bacamo par kockica i zanima nas hoće li u jednom bacanju pasti , vjerojatnost da se to desi u pojedinom bacanju je $\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{36} \approx 2,78\%$. Ako nas zanima vjerojatnost da u tri bacanja para kockicom zaredom padne par , vjerojatnost je

$$\frac{1}{36} \cdot \frac{1}{36} \cdot \frac{1}{36} = \frac{1}{36^3} = \frac{1}{6^6} \approx 0,0021\%.$$

Vjerojatnost da u jednom bacanju para kockica ne padne  je $1 - \frac{1}{36} = \frac{35}{36}$ pa je vjerojatnost da u tri bacanja zaredom nijednom ne padne  jednaka

Možemo to gledati i ovako: Suprotni događaj od „pala je bar jedna glava“ je „nije pala glava“, tj. uzastopno su pala dva pisma. Dakle, vjerojatnost da padne bar jedan glava u dva bacanja je $1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{4}$.

Primjer

Ako bacamo par kockica i zanima nas hoće li u jednom bacanju pasti , vjerojatnost da se to desi u pojedinom bacanju je $\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{36} \approx 2,78\%$. Ako nas zanima vjerojatnost da u tri bacanja para kockicom zaredom padne par , vjerojatnost je

$$\frac{1}{36} \cdot \frac{1}{36} \cdot \frac{1}{36} = \frac{1}{36^3} = \frac{1}{6^6} \approx 0,0021\%.$$

Vjerojatnost da u jednom bacanju para kockica ne padne  je $1 - \frac{1}{36} = \frac{35}{36}$ pa je vjerojatnost da u tri bacanja zaredom nijednom ne padne  jednaka $\left(\frac{35}{36}\right)^3 = \frac{42875}{46656} \approx 91,90\%$.

Možemo to gledati i ovako: Suprotni događaj od „pala je bar jedna glava“ je „nije pala glava“, tj. uzastopno su pala dva pisma. Dakle, vjerojatnost da padne bar jedan glava u dva bacanja je $1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{4}$.

Primjer

Ako bacamo par kockica i zanima nas hoće li u jednom bacanju pasti , vjerojatnost da se to desi u pojedinom bacanju je $\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{36} \approx 2,78\%$. Ako nas zanima vjerojatnost da u tri bacanja para kockicom zaredom padne par , vjerojatnost je

$$\frac{1}{36} \cdot \frac{1}{36} \cdot \frac{1}{36} = \frac{1}{36^3} = \frac{1}{6^6} \approx 0,0021\%.$$

Vjerojatnost da u jednom bacanju para kockica ne padne  je $1 - \frac{1}{36} = \frac{35}{36}$ pa je vjerojatnost da u tri bacanja zaredom nijednom ne padne  jednaka $\left(\frac{35}{36}\right)^3 = \frac{42875}{46656} \approx 91,90\%$. Zašto zbroj te vjerojatnosti i vjerojatnosti da u tri bacanja zaredom padne par šestica nije 100 %?

Primjer

Koja je vjerojatnost da u jednom krugu u kojem jedan igrač baca kockicu A, a drugi kockicu B, pobijedi (dobije veći broj) prvi igrač?

Primjer

Koja je vjerojatnost da u jednom krugu u kojem jedan igrač baca kockicu A, a drugi kockicu B, pobijedi (dobije veći broj) prvi igrač? Imamo četiri elementarna događaja:

		3_A	6_A
		$5/6$	$1/6$
2_B	$1/2$	A	A
5_B	$1/2$	B	A

Dakle,

Primjer

Koja je vjerojatnost da u jednom krugu u kojem jedan igrač baca kockicu A, a drugi kockicu B, pobijedi (dobije veći broj) prvi igrač? Imamo četiri elementarna događaja:

		3_A	6_A
		$5/6$	$1/6$
2_B	$1/2$	A	A
5_B	$1/2$	B	A

Dakle, prvi pobjeđuje s vjerojatnosti

$$\frac{5}{6} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2} = \frac{7}{12}.$$

Zadatak

Nastavite primjer izračunavanjem vjerojatnosti da igrač koji igra s kockicom B pobijedi onog s kockicom C i vjerojatnosti da igrač koji igra s kockicom C pobijedi onog koji igra s kockicom A.

Zadatak

Nastavite primjer izračunavanjem vjerojatnosti da igrač koji igra s kockicom B pobijedi onog s kockicom C i vjerojatnosti da igrač koji igra s kockicom C pobijedi onog koji igra s kockicom A.

		1 _C	4 _C
		1/6	5/6
2 _B	1/2	B	C
5 _B	1/2	B	B

		3 _A	6 _A
		5/6	1/6
1 _C	1/6	A	A
4 _C	5/6	C	A

Vjerojatnost da B pobijedi C je $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6} + \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{6} = \frac{1}{2} \cdot \frac{7}{6} = \frac{7}{12}$.
Vjerojatnost da C pobijedi A je $\frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} = \frac{25}{36}$.

Primjer

Radite na trećem katu u neboderu s 20 katova i jednim dizalom. Prijatelj Vam radi na 5. katu pa u pauzama za kavu rado odlazite na 17. kat. No, imate dojam da kad pozovete dizalo, puno češće ide dolje nego gore i obratno, kad se vraćate na svoj kat imate osjećaj da još češće ide prema gore nego prema dolje. Imate li stvarno peh?

Primjer

Radite na trećem katu u neboderu s 20 katova i jednim dizalom. Prijatelj Vam radi na 5. katu pa u pauzama za kavu rado odlazite na 17. kat. No, imate dojam da kad pozovete dizalo, puno češće ide dolje nego gore i obratno, kad se vraćate na svoj kat imate osjećaj da još češće ide prema gore nego prema dolje. Imate li stvarno peh?

Imamo dakle ukupno 19 katova za koje je moguće da dizalo ide prema dolje. Ako ste na 5. katu, dizalo će ići prema dolje ako je u trenutku poziva bilo na nekom od 15 katova iznad Vas, tj. s vjerojatnosti $\frac{15}{19} \approx 78,95\%$.

Primjer

Radite na trećem katu u neboderu s 20 katova i jednim dizalom. Prijatelj Vam radi na 5. katu pa u pauzama za kavu rado odlazite na 17. kat. No, imate dojam da kad pozovete dizalo, puno češće ide dolje nego gore i obratno, kad se vraćate na svoj kat imate osjećaj da još češće ide prema gore nego prema dolje. Imate li stvarno peh?

Imamo dakle ukupno 19 katova za koje je moguće da dizalo ide prema dolje. Ako ste na 5. katu, dizalo će ići prema dolje ako je u trenutku poziva bilo na nekom od 15 katova iznad Vas, tj. s vjerojatnosti $\frac{15}{19} \approx 78,95\%$. Također, imamo ukupno 19 katova za koje je moguće da dizalo ide prema gore. Ako ste na 17. katu, dizalo će ići prema gore ako je u trenutku poziva bilo na nekom od 16 katova ispod Vas, tj. s vjerojatnosti $\frac{16}{19} \approx 84,21\%$.