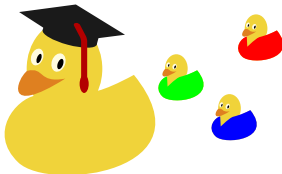


Matematika 1 (9. listopada 2026.)

Franka Miriam Brückler



Bernoullijevi pokusi

Bernoullijev pokus

Slučajni pokusi s dva elementarna događaja nazivaju se Bernoullijevi pokusi. Ako je vjerojatnost jednog od njih, nazovimo ga „uspjehom“, p , onda je vjerojatnost drugog („neuspjeha“) uvijek $q = 1 - p$.

Bernoullijevi pokusi

Bernoullijev pokus

Slučajni pokusi s dva elementarna događaja nazivaju se Bernoullijevi pokusi. Ako je vjerojatnost jednog od njih, nazovimo ga „uspjehom“, p , onda je vjerojatnost drugog („neuspjeha“) uvijek $q = 1 - p$.

Primjer

Slučajni pokus izlaska na ispit iz Matematike 1 na prvom roku možemo gledati kao Bernoullijev pokus ako razlikujemo samo dva događaja: „pad ispita“ i „prolaz ispita“. U tom slučaju imamo Bernoullijev pokus s $p = P_{2,3,4,5}$ i $q = P_1$.

Bernoullijevi pokusi

Bernoullijev pokus

Slučajni pokusi s dva elementarna događaja nazivaju se Bernoullijevi pokusi. Ako je vjerojatnost jednog od njih, nazovimo ga „uspjehom“, p , onda je vjerojatnost drugog („neuspjeha“) uvijek $q = 1 - p$.

Primjer

Slučajni pokus izlaska na ispit iz Matematike 1 na prvom roku možemo gledati kao Bernoullijev pokus ako razlikujemo samo dva događaja: „pad ispita“ i „prolaz ispita“. U tom slučaju imamo Bernoullijev pokus s $p = P_{2,3,4,5}$ i $q = P_1$.

Binomna razdioba



Ako uzastopno (nezavisno) ponavljamo Bernoullijev pokus n puta, a zanima nas vjerojatnost $P_n(k)$ da se uspjeh dogodio k puta, ta vjerojatnost se može izračunati formulom **binomne raspodjele**:

$$P_n(k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}, \quad k = 0, 1, \dots, n$$

gdje je $\binom{n}{k} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1)}{k!}$ tzv. **binomni koeficijent**.

Binomna razdioba



Ako uzastopno (nezavisno) ponavljamo Bernoullijev pokus n puta, a zanima nas vjerojatnost $P_n(k)$ da se uspjeh dogodio k puta, ta vjerojatnost se može izračunati formulom **binomne raspodjele**:

$$P_n(k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}, \quad k = 0, 1, \dots, n$$

gdje je $\binom{n}{k} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1)}{k!}$ tzv. **binomni koeficijent**.

Primjer

Za slučaj $p = \frac{1}{2}$, primjerice za uzastopno bacanje novčića, formula binomne razdiobe poprima oblik $P_n(k) = \frac{1}{2^n} \binom{n}{k}$.

Binomna razdioba



Ako uzastopno (nezavisno) ponavljamo Bernoullijev pokus n puta, a zanima nas vjerojatnost $P_n(k)$ da se uspjeh dogodio k puta, ta vjerojatnost se može izračunati formulom **binomne raspodjele**:

$$P_n(k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}, \quad k = 0, 1, \dots, n$$

gdje je $\binom{n}{k} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1)}{k!}$ tzv. **binomni koeficijent**.

Primjer

Za slučaj $p = \frac{1}{2}$, primjerice za uzastopno bacanje novčića, formula binomne razdiobe poprima oblik $P_n(k) = \frac{1}{2^n} \binom{n}{k}$.

Quincunx (Galtonova ploča)

Zakon velikih brojeva

U statistici se iz puno rezultata slučajnog pokusa za koji nisu poznate teorijske vjerojatnosti pokušavaju izvesti zaključci o vjerojatnostima. Tu koristimo tzv. empirijsku vjerojatnost (**vjerojatnost a posteriori**), definiranu kao iznos oko kojeg se grupiraju **relativne frekvencije** razmatranog događaja.

Primjer

Ako se prati radioaktivni raspad kod 1000 istovrsnih atoma u istim uvjetima tijekom jedne sekunde, te ako se utvrdi da je u toj sekundi se raspalo njih 155, vjerojatnost da se jedan atom te vrste raspadne unutar jedne sekunde možemo procijeniti s 15,5 %.

Zakon velikih brojeva

U statistici se iz puno rezultata slučajnog pokusa za koji nisu poznate teorijske vjerojatnosti pokušavaju izvesti zaključci o vjerojatnostima. Tu koristimo tzv. empirijsku vjerojatnost (**vjerojatnost a posteriori**), definiranu kao iznos oko kojeg se grupiraju **relativne frekvencije** razmatranog događaja.

Primjer

Ako se prati radioaktivni raspad kod 1000 istovrsnih atoma u istim uvjetima tijekom jedne sekunde, te ako se utvrdi da je u toj sekundi se raspalo njih 155, vjerojatnost da se jedan atom te vrste raspadne unutar jedne sekunde možemo procijeniti s 15,5 %.

Veza između vjerojatnosti a posteriori i vjerojatnosti a priori (teorijske vjerojatnosti) dana je (**slabim**) **zakonom velikih brojeva**: Kako se povećava broj opažanja, relativna frekvencija događaja A postaje sve bliža teorijskoj vjerojatnosti od A u jednom izvođenju pokusa

Primjer

Ako uzastopno bacamo pravedni novčić, s porastom broja bacanja relativna frekvencija glava će biti sve bliža $P(A) = 50\%$. To ne znači da će s porastom broja pokusa apsolutne frekvencije pisma i glava postajati sve bliže.

Broj bacanja	Broj G	Rel. frekv. G	$ G - P $
10	6	60 %	2
100	55	55 %	10
1000	520	52 %	40
10000	5305	53,05 %	610
100000	50300	50,30 %	600
1000000	502000	50,20 %	4000

Primjer

Za nasumično odabranog studenta koji prijavi prvi rok vjerojatnost $P_{2,3,4,5}$ prolaska ispita iz Matematike 1 možemo procijeniti kao s $P_{2,3,4,5} = 37,50\%$.

Godina	Broj prijava	Pismeni					Prolaznost pismeni	Usmeni					Prolaznost usmeni	Prolaznost
		1	2	3	4	5		1	2	3	4	5		
25./26.	31	7	10	10	4	0	77,42%	11	8	4	1	0	54,17%	41,94%
24./25.	13	7	5	2	0	0	53,85%	2	4	0	0	0	66,67%	30,77%
23./24.	18	2	2	7	5	2	88,89%	12	0	0	3	1	25,00%	22,22%
21./22.	13	1	1	3	4	4	92,31%	4	3	1	1	3	66,67%	61,54%
20./21.	45	9	7	8	11	10	80,00%	22	4	4	4	2	38,89%	31,11%
19./20.	8	0	3	1	3	1	100,00%	3	1	3	0	1	62,50%	62,50%
<i>Ukupno</i>	128	26	28	31	27	17	80,47%	54	20	12	9	7	47,06%	37,50%

Primjer

Želimo predvidjeti vjerojatnost rezultata $m : n$ u uskoro nadolazećoj utakmici D-G.

Primjer

Želimo predvidjeti vjerojatnost rezultata $m : n$ u uskoro nadolazećoj utakmici D-G. Osnovni model koristi binomnu razdiobu, u kojoj se uzima da je upućivanje udarca prema protivničkim vratima Bernoullijev pokus s p jednakom uspješnosti (kvocijentu broja pogodaka i udaraca) pojedine momčadi i da je rezultat posljedica nezavisnog slijeda i takvih pokusa (gdje je i blizu prosječnog broja udaraca) te da su brojevi pogodaka D i G bar približno nezavisni.

Primjer

Želimo predvidjeti vjerojatnost rezultata $m : n$ u uskoro nadolazećoj utakmici D-G. Osnovni model koristi binomnu razdiobu, u kojoj se uzima da je upućivanje udarca prema protivničkim vratima Bernoullijev pokus s p jednakom uspješnosti (kvocijentu broja pogodaka i udaraca) pojedine momčadi i da je rezultat posljedica nezavisnog slijeda i takvih pokusa (gdje je i blizu prosječnog broja udaraca) te da su brojevi pogodaka D i G bar približno nezavisni. Ako D u prosjeku daje a golova po utakmici i pritom u prosjeku upućuje A udaraca prema protivničkim vratima, to znači da je uspješnost D $p_D = \frac{a}{A}$.

Primjer

Želimo predvidjeti vjerojatnost rezultata $m : n$ u uskoro nadolazećoj utakmici D-G. Osnovni model koristi binomnu razdiobu, u kojoj se uzima da je upućivanje udarca prema protivničkim vratima Bernoullijev pokus s p jednakom uspješnosti (kvocijentu broja pogodaka i udaraca) pojedine momčadi i da je rezultat posljedica nezavisnog slijeda i takvih pokusa (gdje je i blizu prosječnog broja udaraca) te da su brojevi pogodaka D i G bar približno nezavisni. Ako D u prosjeku daje a golova po utakmici i pritom u prosjeku upućuje A udaraca prema protivničkim vratima, to znači da je uspješnost D $p_D = \frac{a}{A}$. Ako G u prosjeku daje b golova po utakmici i pritom u prosjeku upućuje B udaraca prema protivničkim vratima, uspješnost od G je $p_G = \frac{b}{B}$. D će najvjerojatnije uputiti $k = \lfloor A \rfloor$ ili $\lceil A \rceil$ udaraca, a G će najvjerojatnije uputiti $\ell = \lfloor B \rfloor$ ili $\lceil B \rceil$ udaraca:

$$p_{m:n} = \binom{k}{m} \binom{\ell}{n} p_D^m (1 - p_D)^{k-m} p_G^n (1 - p_G)^{\ell-n}.$$

Primjer

Uzastopno bacamo kockicu i zanima nas klađenje na padanje bar jedne . Recimo da uzastopno 20 puta nije pala . Znači li to da je sad vjerojatnije da u sljedećem bacanju padne .

Primjer

Uzastopno bacamo kockicu i zanima nas klađenje na padanje bar jedne ☐☐. Recimo da uzastopno 20 puta nije pala ☐☐. Znači li to da je sad vjerojatnije da u sljedećem bacanju padne ☐☐?

Ne! Kao prvo, kockica nema memoriju, nego je u svakom bacanju vjerojatnost da padne ☐☐ jednaka točno $\frac{1}{6}$.

Primjer

Uzastopno bacamo kockicu i zanima nas kladenje na padanje bar jedne ☐☐. Recimo da uzastopno 20 puta nije pala ☐☐. Znači li to da je sad vjerojatnije da u sljedećem bacanju padne ☐☐?

Ne! Kao prvo, kockica nema memoriju, nego je u svakom bacanju vjerojatnost da padne ☐☐ jednaka točno $\frac{1}{6}$.

Nadalje, zakon velikih brojeva se odnosi na neodređeno velik broj bacanja, odnosno ne odnosi se na njihov ma koliko velik konačan broj. Ako bismo kockicu bacali jako puno puta, recimo milijun, ovih prvih 20 (pa i puno više) ne-šestica postaju tek $\frac{20}{1.000.000} = 0,00002$ od svega, te se neće primijetiti u tome da će u tih milijun bacanja udio ☐☐ biti ipak bliže $\frac{1}{6}$: Zakon velikih brojeva djeluje kroz samu brojnost ponavljanja pokusa, a ne kroz mijenjanje vjerojatnosti u pojedinom izvođenju.

Primjer

Kako raspoznati stvarni od izmišljenog niza od, recimo, 20, bacanja novčića?

Primjer

Kako raspoznati stvarni od izmišljenog niza od, recimo, 20, bacanja novčića?

- 1 Je li niz prepravljan?

Primjer

Kako raspoznati stvarni od izmišljenog niza od, recimo, 20, bacanja novčića?

- 1 *Je li niz prepravljan? Općenito, ljudi kad zapisuju zamišljene rezultate bacanja novčića imaju tendenciju prečesto mijenjati P u G i obrnuto. Ako su bacanja stvarno nezavisna, parovi GG , GP , PG i PP se u prosjeku pojavljuju jednako često.*

Primjer

Kako raspoznati stvarni od izmišljenog niza od, recimo, 20, bacanja novčića?

- 1 *Je li niz prepravljan? Općenito, ljudi kad zapisuju zamišljene rezultate bacanja novčića imaju tendenciju prečesto mijenjati P u G i obrnuto. Ako su bacanja stvarno nezavisna, parovi GG , GP , PG i PP se u prosjeku pojavljuju jednako često.*
- 2 *Kriva interpretacija zakona velikih brojeva: nije vjerojatno da P i G bude jednako mnogo.*

Primjer

Kako raspoznati stvarni od izmišljenog niza od, recimo, 20, bacanja novčića?

- 1 *Je li niz prepravljan? Općenito, ljudi kad zapisuju zamišljene rezultate bacanja novčića imaju tendenciju prečesto mijenjati P u G i obrnuto. Ako su bacanja stvarno nezavisna, parovi GG , GP , PG i PP se u prosjeku pojavljuju jednako često.*
- 2 *Kriva interpretacija zakona velikih brojeva: nije vjerojatno da P i G bude jednako mnogo. Za 20 bacanja, vjerojatnost $10 : 10$ je samo oko 17,62 %, a s porastom broja bacanja vjerojatnost točnog prepolavljanja se smanjuje.*

Primjer

Kako raspoznati stvarni od izmišljenog niza od, recimo, 20, bacanja novčića?

- 1 *Je li niz prepravljan? Općenito, ljudi kad zapisuju zamišljene rezultate bacanja novčića imaju tendenciju prečesto mijenjati P u G i obrnuto. Ako su bacanja stvarno nezavisna, parovi GG , GP , PG i PP se u prosjeku pojavljuju jednako često.*
- 2 *Kriva interpretacija zakona velikih brojeva: nije vjerojatno da P i G bude jednako mnogo. Za 20 bacanja, vjerojatnost $10 : 10$ je samo oko 17,62 %, a s porastom broja bacanja vjerojatnost točnog prepolavljanja se smanjuje.*
- 3 *Potcjenjivanje vjerojatnosti nizova $PP \dots P$ i $GG \dots G$.*

Primjer

Kako raspoznati stvarni od izmišljenog niza od, recimo, 20, bacanja novčića?

- 1 *Je li niz prepravljan? Općenito, ljudi kad zapisuju zamišljene rezultate bacanja novčića imaju tendenciju prečesto mijenjati P u G i obrnuto. Ako su bacanja stvarno nezavisna, parovi GG , GP , PG i PP se u prosjeku pojavljuju jednako često.*
- 2 *Kriva interpretacija zakona velikih brojeva: nije vjerojatno da P i G bude jednako mnogo. Za 20 bacanja, vjerojatnost $10 : 10$ je samo oko 17,62 %, a s porastom broja bacanja vjerojatnost točnog prepolavljanja se smanjuje.*
- 3 *Potcjenjivanje vjerojatnosti nizova $PP \dots P$ i $GG \dots G$. Već kod 20 bacanja vjerojatnost bar 4 uzastopna ili pisma ili glave je preko 76 %, a njih 5 preko 45 %.; vjerojatnost da nema bar jednog niza od više od tri uzastopna pisma ili glave je samo oko 23 %.*

Zadatak

Što se više isplati u lotu, uvijek igrati iste brojeve, uvijek odigrati neke brojeve koji se nisu pojavili u zadnjih recimo desetak izvlačenja, ili pak svaki put nasumično birati brojeve?

Zadatak

Što se više isplati u lotu, uvijek igrati iste brojeve, uvijek odigrati neke brojeve koji se nisu pojavili u zadnjih recimo desetak izvlačenja, ili pak svaki put nasumično birati brojeve? Svejedno je!

Primjer

Prema zakonu velikih brojeva i rezultatima primjera iz prošlog predavanja, ako se tri opisane igre s kockicama A, B i C ponavljaju jako puno puta, u igri A protiv B će dugoročno češće (7 : 5) pobjeđivati A, u igri B protiv C će dugoročno češće (7 : 5) pobjeđivati B i u igri C protiv A će dugoročno češće (25 : 11) pobjeđivati C.

Zadatak

Što se više isplati u lotu, uvijek igrati iste brojeve, uvijek odigrati neke brojeve koji se nisu pojavili u zadnjih recimo desetak izvlačenja, ili pak svaki put nasumično birati brojeve? Svejedno je!

Primjer

Prema zakonu velikih brojeva i rezultatima primjera iz prošlog predavanja, ako se tri opisane igre s kockicama A, B i C ponavljaju jako puno puta, u igri A protiv B će dugoročno češće ($7 : 5$) pobjeđivati A, u igri B protiv C će dugoročno češće ($7 : 5$) pobjeđivati B i u igri C protiv A će dugoročno češće ($25 : 11$) pobjeđivati C. To znači da ako se dva igrača dogovore da jedan izabere bilo koju od kockica, a drugi jednu od preostale dvije, onaj koji bira drugi je u prednosti jer uvijek može izabrati kockicu s kojom će, ako dovoljno dugo igraju, pobjeđivati.

Zadatak

Što ako u igri iz prethodnog primjera igrači uzimaju po dvije jednake kockice, dakle po dvije A, dvije B ili dvije C pa gledamo tko će baciti veći zbroj, hoće li i dalje biti bolje birati kao drugi? Koje su sad vjerojatnosti pobjeda za sve moguće kombinacije?

Zadatak

Što ako u igri iz prethodnog primjera igrači uzimaju po dvije jednake kockice, dakle po dvije A, dvije B ili dvije C pa gledamo tko će baciti veći zbroj, hoće li i dalje biti bolje birati kao drugi? Koje su sad vjerojatnosti pobjeda za sve moguće kombinacije?

Nećemo zadatak riješiti u potpunosti, ali pogledajmo dvije kockice A. S njima možemo dobiti zbrojeve 6, 9 i 12:

Zadatak

Što ako u igri iz prethodnog primjera igrači uzimaju po dvije jednake kockice, dakle po dvije A, dvije B ili dvije C pa gledamo tko će baciti veći zbroj, hoće li i dalje biti bolje birati kao drugi? Koje su sad vjerojatnosti pobjeda za sve moguće kombinacije?

Nećemo zadatak riješiti u potpunosti, ali pogledajmo dvije kockice

A. S njima možemo dobiti zbrojeve 6, 9 i 12:

- Zbroj 6 dobijemo ako je na obje kockice pao 3, dakle s vjerojatnosti $\frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} = \frac{25}{36}$.
- Zbroj 12 dobijemo ako je na obje kockice pao 6, dakle s vjerojatnosti $\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$.
- U ostalim slučajevima past će zbroj 9, s vjerojatnosti $1 - \frac{25}{36} - \frac{1}{36} = \frac{10}{36}$.

Zadatak

Što ako u igri iz prethodnog primjera igrači uzimaju po dvije jednake kockice, dakle po dvije A, dvije B ili dvije C pa gledamo tko će baciti veći zbroj, hoće li i dalje biti bolje birati kao drugi? Koje su sad vjerojatnosti pobjeda za sve moguće kombinacije?

Nećemo zadatak riješiti u potpunosti, ali pogledajmo dvije kockice A. S njima možemo dobiti zbrojeve 6, 9 i 12:

- Zbroj 6 dobijemo ako je na obje kockice pao 3, dakle s vjerojatnosti $\frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} = \frac{25}{36}$.
- Zbroj 12 dobijemo ako je na obje kockice pao 6, dakle s vjerojatnosti $\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$.
- U ostalim slučajevima past će zbroj 9, s vjerojatnosti $1 - \frac{25}{36} - \frac{1}{36} = \frac{10}{36}$.

Analogno se izračunaju vjerojatnosti mogućih rezultata za po dvije B i C, a nakon toga tablice mogućih rezultata za A protiv B, B protiv C i C protiv A. Pokazuje se da je sad B jače od A, C jače od B i A jače od C 😊

Koliko Vas je trenutno ovdje?

Koliko Vas je trenutno ovdje? Tko bi prihvatio okladu u omjeru 1:1 da bar dvoje Vas ima isti dan rođendan? A da netko ima isti rođendan kao ja?

Koliko Vas je trenutno ovdje? Tko bi prihvatio okladu u omjeru 1:1 da bar dvoje Vas ima isti dan rođendan? A da netko ima isti rođendan kao ja? A omjer ...

Koliko Vas je trenutno ovdje? Tko bi prihvatio okladu u omjeru 1:1 da bar dvoje Vas ima isti dan rođendan? A da netko ima isti rođendan kao ja? A omjer ...

Vjerojatnost da 2 osobe nemaju isti dan rođendan je $\frac{364}{365}$;

Koliko Vas je trenutno ovdje? Tko bi prihvatio okladu u omjeru 1:1 da bar dvoje Vas ima isti dan rođendan? A da netko ima isti rođendan kao ja? A omjer ...

Vjerojatnost da 2 osobe nemaju isti dan rođendan je $\frac{364}{365}$; vjerojatnost da 3 osobe nemaju isti dan rođendan je $\frac{364}{365} \cdot \frac{363}{365}$;

Koliko Vas je trenutno ovdje? Tko bi prihvatio okladu u omjeru 1:1 da bar dvoje Vas ima isti dan rođendan? A da netko ima isti rođendan kao ja? A omjer ...

Vjerojatnost da 2 osobe nemaju isti dan rođendan je $\frac{364}{365}$; vjerojatnost da 3 osobe nemaju isti dan rođendan je $\frac{364}{365} \cdot \frac{363}{365}$; vjerojatnost da od n osoba nikoje dvije ne dijele rođendan je

$$\begin{aligned} & \frac{364 \cdot 363 \cdot \dots \cdot (365 - n + 1)}{365^{n-1}} = \\ = & \frac{365 \cdot 364 \cdot \dots \cdot 343 \cdot \dots \cdot (365 - n + 1)}{365^n} = \frac{365!}{365^n (365 - n)!} \end{aligned}$$

Koliko Vas je trenutno ovdje? Tko bi prihvatio okladu u omjeru 1:1 da bar dvoje Vas ima isti dan rođendan? A da netko ima isti rođendan kao ja? A omjer ...

Vjerojatnost da 2 osobe nemaju isti dan rođendan je $\frac{364}{365}$; vjerojatnost da 3 osobe nemaju isti dan rođendan je $\frac{364}{365} \cdot \frac{363}{365}$; vjerojatnost da od n osoba nikoje dvije ne dijele rođendan je

$$\begin{aligned} & \frac{364 \cdot 363 \cdot \dots \cdot (365 - n + 1)}{365^{n-1}} = \\ & = \frac{365 \cdot 364 \cdot \dots \cdot 343 \cdot \dots \cdot (365 - n + 1)}{365^n} = \frac{365!}{365^n (365 - n)!}. \end{aligned}$$

Vjerojatnost da bar dvije od $1 < n < 365$ osoba dijele rođendan je $P_{n,2} = 1 - \frac{365!}{365^n (365 - n)!}$. Naravno, za $n \geq 365$ vjerojatnost je 100 %.

Koliko Vas je trenutno ovdje? Tko bi prihvatio okladu u omjeru 1:1 da bar dvoje Vas ima isti dan rođendan? A da netko ima isti rođendan kao ja? A omjer ...

Vjerojatnost da 2 osobe nemaju isti dan rođendan je $\frac{364}{365}$; vjerojatnost da 3 osobe nemaju isti dan rođendan je $\frac{364}{365} \cdot \frac{363}{365}$; vjerojatnost da od n osoba nikoje dvije ne dijele rođendan je

$$\begin{aligned} & \frac{364 \cdot 363 \cdot \dots \cdot (365 - n + 1)}{365^{n-1}} = \\ &= \frac{365 \cdot 364 \cdot \dots \cdot 343 \cdot \dots \cdot (365 - n + 1)}{365^n} = \frac{365!}{365^n (365 - n)!}. \end{aligned}$$

Vjerojatnost da bar dvije od $1 < n < 365$ osoba dijele rođendan je $P_{n,2} = 1 - \frac{365!}{365^n (365 - n)!}$. Naravno, za $n \geq 365$ vjerojatnost je 100 %. Kladenje uz omjer 1 : 1 je isplativo za mene jer je vjerojatnije da sam u pravu nego da nisam čim je $n > 22$: $P_{22,2} \approx 47,57 \%$, $P_{23,2} \approx 50,73 \%$. Zašto je očito da vjerojatnosti $P_{n,2}$ brzo rastu?

Koliko Vas je trenutno ovdje? Tko bi prihvatio okladu u omjeru 1:1 da bar dvoje Vas ima isti dan rođendan? A da netko ima isti rođendan kao ja? A omjer ...

Vjerojatnost da 2 osobe nemaju isti dan rođendan je $\frac{364}{365}$; vjerojatnost da 3 osobe nemaju isti dan rođendan je $\frac{364}{365} \cdot \frac{363}{365}$; vjerojatnost da od n osoba nikoje dvije ne dijele rođendan je

$$\begin{aligned} & \frac{364 \cdot 363 \cdot \dots \cdot (365 - n + 1)}{365^{n-1}} = \\ &= \frac{365 \cdot 364 \cdot \dots \cdot 343 \cdot \dots \cdot (365 - n + 1)}{365^n} = \frac{365!}{365^n (365 - n)!}. \end{aligned}$$

Vjerojatnost da bar dvije od $1 < n < 365$ osoba dijele rođendan je $P_{n,2} = 1 - \frac{365!}{365^n (365 - n)!}$. Naravno, za $n \geq 365$ vjerojatnost je 100 %.

Klađenje uz omjer 1 : 1 je isplativo za mene jer je vjerojatnije da sam u pravu nego da nisam čim je $n > 22$: $P_{22,2} \approx 47,57\%$, $P_{23,2} \approx 50,73\%$. Zašto je očito da vjerojatnosti $P_{n,2}$ brzo rastu?

Vjerojatnost da jedna od n osoba ima rođendan kad i ja je $1 - \left(\frac{364}{365}\right)^n$. Za $n \geq 3$ to je manje od $P_{n,2}$.

Očekivanje

Očekivanje je teorijski prosječni rezultat slučajnog pokusa ako se pokus ponavlja jako puno puta („u beskonačnost“). Pritom se pretpostavlja da smo elementarne događaje, ako nisu već sami po sebi brojevi, opisali brojčano.

Očekivanje

Očekivanje je teorijski prosječni rezultat slučajnog pokusa ako se pokus ponavlja jako puno puta („u beskonačnost“). Pritom se pretpostavlja da smo elementarne događaje, ako nisu već sami po sebi brojevi, opisali brojčano. Formalno se to poistovjećivanje provodi uvođenjem pojma **slučajne varijable**, tj. funkcije X koja elementarnim događajima promatranog pokusa pridružuje (realne) brojeve. Zbog zakona velikih brojeva, prosječni rezultat opažanja s povećanjem broja izvođenja slučajnog pokusa postaje sve bliži očekivanju.

Očekivanje za konačni slučaj

Ako slučajni pokus ima samo konačno mnogo mogućih ishoda, očekivanje μ slučajne varijable X je jednako zbroju umnožaka vjerojatnosti s iznosima koje X pridružuje pojedinačnim elementarnim događajima. Za slučaj binomne razdiobe je $\mu = np$.

Primjer

Za bacanje kockice, uz X koja redom elementarne događaje $\square$, $\square$,
 $\square$, $\square$, $\square$, $\square$ poistovjećuje s brojevima 1, 2, 3, 4, 5, 6 je

$$\mu = \frac{1}{6} \cdot 1 + \frac{1}{6} \cdot 2 + \frac{1}{6} \cdot 3 + \frac{1}{6} \cdot 4 + \frac{1}{6} \cdot 5 + \frac{1}{6} \cdot 6 = \frac{21}{6} = 3,5.$$

Iako 3,5 ne može biti ishod bacanja kockice, za jako velik broj bacanja će prosječan iznos svih rezultata biti blizu 3,5.

Primjer

Za bacanje kockice, uz X koja redom elementarne događaje $\square$, $\square$,
 $\square$, $\square$, $\square$, $\square$ poistovjećuje s brojevima 1, 2, 3, 4, 5, 6 je

$$\mu = \frac{1}{6} \cdot 1 + \frac{1}{6} \cdot 2 + \frac{1}{6} \cdot 3 + \frac{1}{6} \cdot 4 + \frac{1}{6} \cdot 5 + \frac{1}{6} \cdot 6 = \frac{21}{6} = 3,5.$$

Iako 3,5 ne može biti ishod bacanja kockice, za jako velik broj bacanja će prosječan iznos svih rezultata biti blizu 3,5.

Ako je u jednom (Benoullijevom) pokusu vjerojatnost nekog događaja p , očekivana relativna frekvencija tog događaja u puno pokusa je p . Dok nam očekivanje daje dugoročni prosječni rezultat, to ne znači da povremeno neće biti i većih odstupanja od njega.

Primjer

Za bacanje kockice, uz X koja redom elementarne događaje $\square$, $\square$,
 $\square$, $\square$, $\square$, $\square$ poistovjećuje s brojevima 1, 2, 3, 4, 5, 6 je

$$\mu = \frac{1}{6} \cdot 1 + \frac{1}{6} \cdot 2 + \frac{1}{6} \cdot 3 + \frac{1}{6} \cdot 4 + \frac{1}{6} \cdot 5 + \frac{1}{6} \cdot 6 = \frac{21}{6} = 3,5.$$

Iako 3,5 ne može biti ishod bacanja kockice, za jako velik broj bacanja će prosječan iznos svih rezultata biti blizu 3,5.

Ako je u jednom (Benoullijevom) pokusu vjerojatnost nekog događaja p , očekivana relativna frekvencija tog događaja u puno pokusa je p . Dok nam očekivanje daje dugoročni prosječni rezultat, to ne znači da povremeno neće biti i većih odstupanja od njega.

Standardna devijacija

Standardna devijacija je mjera rasipanja rezultata oko očekivanog (prosječnog). Za binomnu razdiobu s n pokusa standardna devijacija iznosi $\sigma = \sqrt{npq}$.

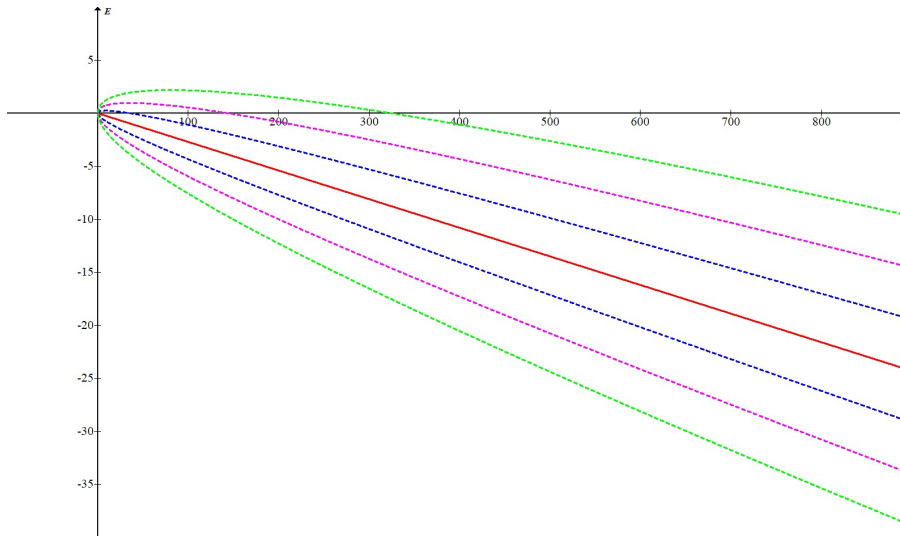
Binomna razdioba se s porastom izvođenja približavaju normalnoj razdiobi i koristeći istu dobiva se sljedeće pravilo: Oko 68 % svih rezultata nalazit će se unutar $\mu \pm \sigma$, oko 95 % unutar $\mu \pm 2\sigma$ i oko 99,7 % unutar $\mu \pm 3\sigma$.

Primjer

U kazinu igrate rulet (standardni, s utorima 0 i 1–36), pri čemu u svakom krugu ulažete po 1 € na jedan broj. Ako ste pogodili, u tom krugu ćete dobiti svoj ulog natrag i još 35 euro, a suprotnom gubite svoj ulog.

U pojedinom krugu vjerojatnost dobitka 35 € je $\frac{1}{37}$, a vjerojatnost gubitka 1 € je $\frac{36}{37}$. Dakle, očekivani dobitak u jednom krugu iznosi $\frac{1}{37} \cdot (+35) + \frac{36}{37} \cdot (-1) = -\frac{1}{37}$ eura, tj. očekujete gubitak od 0,027 eura po krugu, odnosno očekujete gubitak od 27 centi u deset krugova. Dakle, igrač koji uzastopno ulaže isti iznos na jedan broj dugoročno može očekivati gubitak od 2,7 %. To je samo prosječni gubitak i to naravno ne znači da povremeno neće i dobijati.

Standardna devijacija ovdje iznosi $\sigma = \sqrt{n \frac{36}{37^2}} = \frac{6}{37} \sqrt{n}$.



Primjer

Marta i Martina igraju igricu. Marta kaže: „Bacit ću tri novčića u zrak. Ako svi padnu na pismo ili ako svi padnu na glavu, dat ću ti 2 eura, ali ako padnu ikako drugačije, ti ćeš meni dati 1 euro.“

Martina razmišlja: „Ako od tri novčića dva padnu različito, treći će pasti jednako kao jedan od njih. A ako dva padnu jednako, treći će ili pasti kao oni ili će pasti različito. Za to su šanse jednake. Dakle, jednako je vjerojatno da će pasti tri jednako i da neće, a Ana ulaže dvaput više nego ja, dakle sam ja u prednosti.“ I tako Martina prihvaća okladu. Je li to bilo pametno?

Primjer

Marta i Martina igraju igricu. Marta kaže: „Bacit ću tri novčića u zrak. Ako svi padnu na pismo ili ako svi padnu na glavu, dat ću ti 2 eura, ali ako padnu ikako drugačije, ti ćeš meni dati 1 euro.“

Martina razmišlja: „Ako od tri novčića dva padnu različito, treći će pasti jednako kao jedan od njih. A ako dva padnu jednako, treći će ili pasti kao oni ili će pasti različito. Za to su šanse jednake. Dakle, jednako je vjerojatno da će pasti tri jednako i da neće, a Ana ulaže dvaput više nego ja, dakle sam ja u prednosti.“ I tako Martina prihvaća okladu. Je li to bilo pametno?

Nije. Baciti 3 novčića istovremeno isto je kao baciti jedan od njih 3 puta: binomna razdioba s $n = 3$ i $p = \frac{1}{2}$.

Primjer

Marta i Martina igraju igricu. Marta kaže: „Bacit ću tri novčića u zrak. Ako svi padnu na pismo ili ako svi padnu na glavu, dat ću ti 2 eura, ali ako padnu ikako drugačije, ti ćeš meni dati 1 euro.“

Martina razmišlja: „Ako od tri novčića dva padnu različito, treći će pasti jednako kao jedan od njih. A ako dva padnu jednako, treći će ili pasti kao oni ili će pasti različito. Za to su šanse jednake. Dakle, jednako je vjerojatno da će pasti tri jednako i da neće, a Ana ulaže dvaput više nego ja, dakle sam ja u prednosti.“ I tako Martina prihvaća okladu. Je li to bilo pametno?

Nije. Baciti 3 novčića istovremeno isto je kao baciti jedan od njih 3 puta: binomna razdioba s $n = 3$ i $p = \frac{1}{2}$. Vjerojatnost GGG je $\binom{3}{0} \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$, a vjerojatnost PPP je $\binom{3}{3} \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$.

Primjer

Marta i Martina igraju igricu. Marta kaže: „Bacit ću tri novčića u zrak. Ako svi padnu na pismo ili ako svi padnu na glavu, dat ću ti 2 eura, ali ako padnu ikako drugačije, ti ćeš meni dati 1 euro.“

Martina razmišlja: „Ako od tri novčića dva padnu različito, treći će pasti jednako kao jedan od njih. A ako dva padnu jednako, treći će ili pasti kao oni ili će pasti različito. Za to su šanse jednake. Dakle, jednako je vjerojatno da će pasti tri jednako i da neće, a Ana ulaže dvaput više nego ja, dakle sam ja u prednosti.“ I tako Martina prihvaća okladu. Je li to bilo pametno?

Nije. Baciti 3 novčića istovremeno isto je kao baciti jedan od njih 3 puta: binomna razdioba s $n = 3$ i $p = \frac{1}{2}$. Vjerojatnost GGG je $\binom{3}{0} \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$, a vjerojatnost PPP je $\binom{3}{3} \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$. Vjerojatnost da Martina dobije 2 € je $\frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{1}{4} = 25\%$, a da Marti dade 1 € vjerojatnost je $1 - \frac{1}{4} = 75\%$:

$$\mu_{Martina} = 0,25 \cdot 2 - 0,75 \cdot 1 = -0,25 \text{ €}.$$

Koeficijenti

U prethodnom primjeru imali smo situaciju koeficijent $1 : 2$ pri omjeru vjerojatnosti $1 : 3$. Da je u primjeru Marta bila kladionica, a Martina igrač, Martini bi Marta ponudila koeficijent 3 .

Koeficijenti

U prethodnom primjeru imali smo situaciju koeficijent $1 : 2$ pri omjeru vjerojatnosti $1 : 3$. Da je u primjeru Marta bila kladionica, a Martina igrač, Martini bi Marta ponudila koeficijent 3.

Omjer uloga $1 : a$ odgovara kladioničkom koeficijentu $K = 1 + a$.

Omjer (koeficijent) nazivamo pravednim ako odgovara očekivanju 0. Opénito, ako je p vjerojatnost dobitka, onda je omjer $(1 - p) : p$ pravedan (odnosno, koeficijent $K = 1/p$ je pošten), jer je tada očekivani dobitak $p \cdot (1 - p) - (1 - p) \cdot p = 0$.

Koeficijenti

U prethodnom primjeru imali smo situaciju koeficijent $1 : 2$ pri omjeru vjerojatnosti $1 : 3$. Da je u primjeru Marta bila kladionica, a Martina igrač, Martini bi Marta ponudila koeficijent 3 .

Omjer uloga $1 : a$ odgovara kladioničkom koeficijentu $K = 1 + a$.

Omjer (koeficijent) nazivamo pravednim ako odgovara očekivanju 0 . Opénito, ako je p vjerojatnost dobitka, onda je omjer $(1 - p) : p$ pravedan (odnosno, koeficijent $K = 1/p$ je pošten), jer je tada očekivani dobitak $p \cdot (1 - p) - (1 - p) \cdot p = 0$.

Primjerice, ako se s nekim kladite na ishod bacanja novčića, pravedno je da oboje uložite isti iznos jer su Vam vjerojatnosti pobjede jednake: Omjer $1 : 1$ (koeficijent 2): Očekivani dobitak iz Vaše perspektive je $50\% \cdot 1 - 50\% \cdot 1 = 0$.

Koeficijenti

U prethodnom primjeru imali smo situaciju koeficijent $1 : 2$ pri omjeru vjerojatnosti $1 : 3$. Da je u primjeru Marta bila kladionica, a Martina igrač, Martini bi Marta ponudila koeficijent 3 .

Omjer uloga $1 : a$ odgovara kladioničkom koeficijentu $K = 1 + a$.

Omjer (koeficijent) nazivamo pravednim ako odgovara očekivanju 0 . Opénito, ako je p vjerojatnost dobitka, onda je omjer $(1 - p) : p$ pravedan (odnosno, koeficijent $K = 1/p$ je pošten), jer je tada očekivani dobitak $p \cdot (1 - p) - (1 - p) \cdot p = 0$.

Primjerice, ako se s nekim kladite na ishod bacanja novčića, pravedno je da oboje uložite isti iznos jer su Vam vjerojatnosti pobjede jednake: Omjer $1 : 1$ (koeficijent 2): Očekivani dobitak iz Vaše perspektive je $50\% \cdot 1 - 50\% \cdot 1 = 0$.

Primjer

Ako je koeficijent $2,6$ pravedan, znači da je vjerojatnost dobitka $1 : 2,6 = 38,46\%$.

Primjer

Vladimira i Franjo igraju sljedeću igru. Oboje imaju po jedan standardni komplet karata (od 52 karte) i svatko promiješa svoj. Stave svako svoj komplet na stol, poledinom prema gore. Redom otvaraju oboje najgornju kartu. Dogovorili su se da ako u ijednom trenutku oboje otvore istu kartu, Vladimira časti Franju večerom, a ako otvore sve karte bez da se ijedan par podudara, on časti nju. Je li igra pravedna ili je netko od njih u prednosti? Koji je očekivani broj podudaranja?

Primjer

Vladimira i Franjo igraju sljedeću igru. Oboje imaju po jedan standardni komplet karata (od 52 karte) i svatko promiješa svoj. Stave svako svoj komplet na stol, poledinom prema gore. Redom otvaraju oboje najgornju kartu. Dogovorili su se da ako u ijednom trenutku oboje otvore istu kartu, Vladimira časti Franju večerom, a ako otvore sve karte bez da se ijedan par podudara, on časti nju. Je li igra pravedna ili je netko od njih u prednosti? Koji je očekivani broj podudaranja?

Očekivani broj podudaranja je 1: Ako gledamo karte od vrha prema dolje, prije nego ih krenemo otvarati, vjerojatnost da se najgornje karte podudaraju je $\frac{1}{n}$, vjerojatnost da se druge dvije karte podudaraju je $\frac{1}{n}$ i tako dalje.

Ako kompleti imaju samo po 2 karte, vjerojatnost da se prvi par ne podudara je $\frac{1}{2}$. Ako se prvi par nije podudaraao, ne podudara se ni drugi, a ako se prvi par podudara onda se podudara i drugi. Dakle, vjerojatnost da se ni prvi ni drugi par ne podudaraju je $\frac{1}{2}$, odnosno u ovom slučaju igra bi bila pravedna.

Ako kompleti imaju samo po 2 karte, vjerojatnost da se prvi par ne podudara je $\frac{1}{2}$. Ako se prvi par nije podudaraao, ne podudara se ni drugi, a ako se prvi par podudara onda se podudara i drugi. Dakle, vjerojatnost da se ni prvi ni drugi par ne podudaraju je $\frac{1}{2}$, odnosno u ovom slučaju igra bi bila pravedna.

Ako V i F imaju po 3 karte uzmimo da su Franjine karte redom 1, 2, 3. Onda se Vladimирine mogu pojaviti u redoslijedima 123, 132, 213, 231, 312 i 321. Nijednog podudaranja nema u 2 od tih 6 slučajeva, dakle je sad vjerojatnost da nema podudaranja $\frac{1}{3}$, odnosno igra sad više nije pravedna jer su Vladimирine šanse da dobije besplatnu večeru sad 1 : 2, a Franjine 2 : 1. Igru bi mogli učiniti pravednom da u slučaju da nema podudaranja F časti V s 2 večere.

Ako kompleti imaju samo po 2 karte, vjerojatnost da se prvi par ne podudara je $\frac{1}{2}$. Ako se prvi par nije podudarao, ne podudara se ni drugi, a ako se prvi par podudara onda se podudara i drugi. Dakle, vjerojatnost da se ni prvi ni drugi par ne podudaraju je $\frac{1}{2}$, odnosno u ovom slučaju igra bi bila pravedna.

Ako V i F imaju po 3 karte uzmimo da su Franjine karte redom 1, 2, 3. Onda se Vladimirine mogu pojaviti u redoslijedima 123, 132, 213, 231, 312 i 321. Nijednog podudaranja nema u 2 od tih 6 slučajeva, dakle je sad vjerojatnost da nema podudaranja $\frac{1}{3}$, odnosno igra sad više nije pravedna jer su Vladimirine šanse da dobije besplatnu večeru sad 1 : 2, a Franjine 2 : 1. Igru bi mogli učiniti pravednom da u slučaju da nema podudaranja F časti V s 2 večere.

Čim se igra s više od dvije karte igra nije pravedna, nego je F u prednosti. Može se pokazati da što je više karata, to je vjerojatnost bar jednog podudaranja bliža $1 - \frac{1}{e} \approx 63,2\%$, pri čemu je toj vjerojatnosti vrlo blizu već kad imate po 20 karata. Dakle, pošteni koeficijent bi bio otprilike 1,58.

Korjenovanje

Definicija korjenovanja i potenciranja na racionalne eksponente

S $\sqrt[n]{x}$ je označen svaki broj koji potenciran na n -tu potenciju daje x .

Korjenovanje

Definicija korjenovanja i potenciranja na racionalne eksponente

S $\sqrt[n]{x}$ je označen svaki broj koji potenciran na n -tu potenciju daje x . Definiramo da je $x^{1/n} = \sqrt[n]{x}$ za prirodan broj n , dakle da je za prirodan n i cijeli m

$$x^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{x^m}.$$

Korjenovanje

Definicija korjenovanja i potenciranja na racionalne eksponente

S $\sqrt[n]{x}$ je označen svaki broj koji potenciran na n -tu potenciju daje x . Definiramo da je $x^{1/n} = \sqrt[n]{x}$ za prirodan broj n , dakle da je za prirodan n i cijeli m

$$x^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{x^m}.$$

Dok smo u skupu realnih brojeva, parni korijeni (primjerice, kvadratni) su definirani samo za nenegativne brojeve, ali za pozitivne brojeve daju po dvije vrijednosti;

Korjenovanje

Definicija korjenovanja i potenciranja na racionalne eksponente

S $\sqrt[n]{x}$ je označen svaki broj koji potenciran na n -tu potenciju daje x . Definiramo da je $x^{1/n} = \sqrt[n]{x}$ za prirodan broj n , dakle da je za prirodan n i cijeli m

$$x^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{x^m}.$$

Dok smo u skupu realnih brojeva, parni korijeni (primjerice, kvadratni) su definirani samo za nenegativne brojeve, ali za pozitivne brojeve daju po dvije vrijednosti; neparni (primjerice, kubni) korijeni definirani su za sve realne brojeve i poprimaju samo po jednu vrijednost.

Korjenovanje

Definicija korjenovanja i potenciranja na racionalne eksponente

S $\sqrt[n]{x}$ je označen svaki broj koji potenciran na n -tu potenciju daje x . Definiramo da je $x^{1/n} = \sqrt[n]{x}$ za prirodan broj n , dakle da je za prirodan n i cijeli m

$$x^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{x^m}.$$

Dok smo u skupu realnih brojeva, parni korijeni (primjerice, kvadratni) su definirani samo za nenegativne brojeve, ali za pozitivne brojeve daju po dvije vrijednosti; neparni (primjerice, kubni) korijeni definirani su za sve realne brojeve i poprimaju samo po jednu vrijednost.

Primjer

$$\sqrt{25} = \pm 25;$$

Korjenovanje

Definicija korjenovanja i potenciranja na racionalne eksponente

S $\sqrt[n]{x}$ je označen svaki broj koji potenciran na n -tu potenciju daje x . Definiramo da je $x^{1/n} = \sqrt[n]{x}$ za prirodan broj n , dakle da je za prirodan n i cijeli m

$$x^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{x^m}.$$

Dok smo u skupu realnih brojeva, parni korijeni (primjerice, kvadratni) su definirani samo za nenegativne brojeve, ali za pozitivne brojeve daju po dvije vrijednosti; neparni (primjerice, kubni) korijeni definirani su za sve realne brojeve i poprimaju samo po jednu vrijednost.

Primjer

$$\sqrt{25} = \pm 25; \sqrt[3]{-8} = -2.$$

Korjenovanje

Definicija korjenovanja i potenciranja na racionalne eksponente

S $\sqrt[n]{x}$ je označen svaki broj koji potenciran na n -tu potenciju daje x . Definiramo da je $x^{1/n} = \sqrt[n]{x}$ za prirodan broj n , dakle da je za prirodan n i cijeli m

$$x^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{x^m}.$$

Dok smo u skupu realnih brojeva, parni korijeni (primjerice, kvadratni) su definirani samo za nenegativne brojeve, ali za pozitivne brojeve daju po dvije vrijednosti; neparni (primjerice, kubni) korijeni definirani su za sve realne brojeve i poprimaju samo po jednu vrijednost.

Primjer

$$\sqrt{25} = \pm 5; \sqrt[3]{-8} = -2.$$

U izrazu $\sqrt{30 - \sqrt{30 - \sqrt{25}}}$ podrazumijevamo $\sqrt{30 - \sqrt{30 - \sqrt{25}}} = \sqrt{30 - \sqrt{30 - 5}} = \sqrt{30 - \sqrt{25}} = \sqrt{30 - 5} = \sqrt{25} = 5.$

Zadatak

Koliko iznosi $-1^{-2^{-3^{-4}}}$?

Zadatak

Koliko iznosi $-1^{-2^{-3^{-4}}}$? -1 .

Zadatak

Koliko iznosi $-1^{-2^{-3^{-4}}}$? -1 .

$$a^{b+c} = a^b a^c, \quad a^{b-c} = \frac{a^b}{a^c}, \quad a^{b^c} = (a^b)^c$$

Zadatak

Koliko iznosi $-1^{-2^{-3^{-4}}}$? -1 .

$$a^{b+c} = a^b a^c, \quad a^{b-c} = \frac{a^b}{a^c}, \quad a^{b^c} = (a^b)^c$$

Zadatak

Recipročni broj od 10 je $\frac{1}{10} = 0,1$. Možete li naći još neki primjer broja takav da je decimalni zapis njegovog recipročnog broja moguće dobiti pomicanjem decimalnog zareza za neki broj mjesta ulijevo?

Zadatak

Koliko iznosi -1^{-2-3-4} ? -1 .

$$a^{b+c} = a^b a^c, \quad a^{b-c} = \frac{a^b}{a^c}, \quad a^{b^c} = (a^b)^c$$

Zadatak

Recipročni broj od 10 je $\frac{1}{10} = 0,1$. Možete li naći još neki primjer broja takav da je decimalni zapis njegovog recipročnog broja moguće dobiti pomicanjem decimalnog zareza za neki broj mjesta ulijevo? $x \in \{\sqrt{10}, 10, 10\sqrt{10}, 100, 100\sqrt{10} \dots\}$.

Procjena iznosa korijena

Primjer

$$\sqrt[3]{5000000} \approx ?$$

Procjena iznosa korijena

Primjer

$\sqrt[3]{5000000} \approx ?$ $100^3 = 1000000 < 5000000 < 1000^3 = 1000000000$
 $\Rightarrow$ *cjelobrojni dio je troznamenkast*

Procjena iznosa korijena

Primjer

$$\sqrt[3]{5000000} \approx? \quad 100^3 = 1000000 < 5000000 < 1000^3 = 1000000000$$

$\Rightarrow$ *cjelobrojni dio je troznamenkast*

$$\sqrt[3]{5000000} = 100\sqrt[3]{5},$$

Procjena iznosa korijena

Primjer

$$\sqrt[3]{5000000} \approx? \quad 100^3 = 1000000 < 5000000 < 1000^3 = 1000000000$$

$\Rightarrow$ *cjelobrojni dio je troznamenkast*

$$\sqrt[3]{5000000} = 100\sqrt[3]{5}, \quad 1^3 = 1 < 5 < 2^3 = 8 \Rightarrow$$

$$100 < \sqrt[3]{5000000} < 200$$

Procjena iznosa korijena

Primjer

$$\sqrt[3]{5000000} \approx? \quad 100^3 = 1000000 < 5000000 < 1000^3 = 1000000000$$

$\Rightarrow$ *cjelobrojni dio je troznamenkast*

$$\sqrt[3]{5000000} = 100\sqrt[3]{5}, \quad 1^3 = 1 < 5 < 2^3 = 8 \Rightarrow$$

$$100 < \sqrt[3]{5000000} < 200$$

Primjer

$$\sqrt{55555} - \sqrt[3]{55555} \approx?$$

Procjena iznosa korijena

Primjer

$$\sqrt[3]{5000000} \approx? 100^3 = 1000000 < 5000000 < 1000^3 = 1000000000$$

$\Rightarrow$ *cjelobrojni dio je troznamenkast*

$$\sqrt[3]{5000000} = 100\sqrt[3]{5}, 1^3 = 1 < 5 < 2^3 = 8 \Rightarrow$$

$$100 < \sqrt[3]{5000000} < 200$$

Primjer

$\sqrt{55555} - \sqrt[3]{55555} \approx?$ *Razlika troznamenkastog i dvoznamenkastog broja*

Procjena iznosa korijena

Primjer

$$\sqrt[3]{5000000} \approx? 100^3 = 1000000 < 5000000 < 1000^3 = 1000000000$$

$\Rightarrow$ *cjelobrojni dio je troznamenkast*

$$\sqrt[3]{5000000} = 100\sqrt[3]{5}, 1^3 = 1 < 5 < 2^3 = 8 \Rightarrow$$

$$100 < \sqrt[3]{5000000} < 200$$

Primjer

$\sqrt{55555} - \sqrt[3]{55555} \approx?$ *Razlika troznamenkastog i dvoznamenkastog broja $\Rightarrow$ između 10 i 1000*

Procjena iznosa korijena

Primjer

$$\sqrt[3]{5000000} \approx? 100^3 = 1000000 < 5000000 < 1000^3 = 1000000000$$

$\Rightarrow$ *cjelobrojni dio je troznamenkast*

$$\sqrt[3]{5000000} = 100\sqrt[3]{5}, 1^3 = 1 < 5 < 2^3 = 8 \Rightarrow$$

$$100 < \sqrt[3]{5000000} < 200$$

Primjer

$$\sqrt{55555} - \sqrt[3]{55555} \approx? \text{ Razlika troznamenkastog i}$$

dvoznamenkastog broja $\Rightarrow$ *između 10 i 1000*

$$100^2 = 10000, 200^2 = 40000, 300^2 = 90000 \Rightarrow$$

$$200 < \sqrt{55555} < 300$$

Procjena iznosa korijena

Primjer

$$\sqrt[3]{5000000} \approx? 100^3 = 1000000 < 5000000 < 1000^3 = 1000000000$$

$\Rightarrow$ cjelobrojni dio je troznamenkast

$$\sqrt[3]{5000000} = 100\sqrt[3]{5}, 1^3 = 1 < 5 < 2^3 = 8 \Rightarrow$$

$$100 < \sqrt[3]{5000000} < 200$$

Primjer

$\sqrt{55555} - \sqrt[3]{55555} \approx?$ Razlika troznamenkastog i dvoznamenkastog broja $\Rightarrow$ između 10 i 1000

$$100^2 = 10000, 200^2 = 40000, 300^2 = 90000 \Rightarrow$$

$$200 < \sqrt{55555} < 300$$

$$10^3 = 1000, 20^3 = 8000, 30^3 = 27000, 40^3 = 64000 \Rightarrow$$

$$30 < \sqrt[3]{55555} < 40$$

Procjena iznosa korijena

Primjer

$$\sqrt[3]{5000000} \approx? 100^3 = 1000000 < 5000000 < 1000^3 = 1000000000$$

$\Rightarrow$ cjelobrojni dio je troznamenkast

$$\sqrt[3]{5000000} = 100\sqrt[3]{5}, 1^3 = 1 < 5 < 2^3 = 8 \Rightarrow$$

$$100 < \sqrt[3]{5000000} < 200$$

Primjer

$\sqrt{55555} - \sqrt[3]{55555} \approx?$ Razlika troznamenkastog i dvoznamenkastog broja $\Rightarrow$ između 10 i 1000

$$100^2 = 10000, 200^2 = 40000, 300^2 = 90000 \Rightarrow$$

$$200 < \sqrt{55555} < 300$$

$$10^3 = 1000, 20^3 = 8000, 30^3 = 27000, 40^3 = 64000 \Rightarrow$$

$$30 < \sqrt[3]{55555} < 40$$

Dakle, naš broj je između $200 - 40 = 160$ i $300 - 30 = 270$.

Heronova metoda

Ako imamo trenutnu procjenu x za $\sqrt{X}$, novu (bolju) procjenu x' možemo dobiti kao $x' = \frac{1}{2} \left(x + \frac{X}{x} \right)$.

Primjer

$$2^{3/4} = 2^{3/(2 \cdot 2)} = \sqrt{\sqrt{2^3}} = \sqrt{\sqrt{8}}$$

Heronova metoda

Ako imamo trenutnu procjenu x za $\sqrt{X}$, novu (bolju) procjenu x' možemo dobiti kao $x' = \frac{1}{2} \left(x + \frac{X}{x} \right)$.

Primjer

$$2^{3/4} = 2^{3/(2 \cdot 2)} = \sqrt{\sqrt{2^3}} = \sqrt{\sqrt{8}} \text{ Koliko je to otprilike?}$$

Heronova metoda

Ako imamo trenutnu procjenu x za $\sqrt{X}$, novu (bolju) procjenu x' možemo dobiti kao $x' = \frac{1}{2} \left(x + \frac{X}{x} \right)$.

Primjer

$$2^{3/4} = 2^{3/(2 \cdot 2)} = \sqrt{\sqrt{2^3}} = \sqrt{\sqrt{8}} \text{ Koliko je to otprilike?}$$
$$2^2 < 8 < 3^2 \Rightarrow 2 < \sqrt{8} < 3;$$

Heronova metoda

Ako imamo trenutnu procjenu x za $\sqrt{X}$, novu (bolju) procjenu x' možemo dobiti kao $x' = \frac{1}{2} \left(x + \frac{X}{x} \right)$.

Primjer

$2^{3/4} = 2^{3/(2 \cdot 2)} = \sqrt{\sqrt{2^3}} = \sqrt{\sqrt{8}}$ *Koliko je to otprilike?*

$2^2 < 8 < 3^2 \Rightarrow 2 < \sqrt{8} < 3; 1^2 < 2 < 3 < 4 = 2^2 \Rightarrow 1 < 2^{3/4} < 2$

Heronova metoda

Ako imamo trenutnu procjenu x za $\sqrt{X}$, novu (bolju) procjenu x' možemo dobiti kao $x' = \frac{1}{2} \left(x + \frac{X}{x} \right)$.

Primjer

$2^{3/4} = 2^{3/(2 \cdot 2)} = \sqrt{\sqrt{2^3}} = \sqrt{\sqrt{8}}$ *Koliko je to otprilike?*

$2^2 < 8 < 3^2 \Rightarrow 2 < \sqrt{8} < 3$; $1^2 < 2 < 3 < 4 = 2^2 \Rightarrow 1 < 2^{3/4} < 2$
($X = 8$), $x = 2,5$

Heronova metoda

Ako imamo trenutnu procjenu x za $\sqrt{X}$, novu (bolju) procjenu x' možemo dobiti kao $x' = \frac{1}{2} \left(x + \frac{X}{x} \right)$.

Primjer

$2^{3/4} = 2^{3/(2 \cdot 2)} = \sqrt{\sqrt{2^3}} = \sqrt{\sqrt{8}}$ Koliko je to otprilike?

$2^2 < 8 < 3^2 \Rightarrow 2 < \sqrt{8} < 3$; $1^2 < 2 < 3 < 4 = 2^2 \Rightarrow 1 < 2^{3/4} < 2$
($X = 8$), $x = 2,5$

$$x' = \frac{1}{2} \left(2,5 + \frac{8}{2,5} \right) = 2,85$$

Heronova metoda

Ako imamo trenutnu procjenu x za $\sqrt{X}$, novu (bolju) procjenu x' možemo dobiti kao $x' = \frac{1}{2} \left(x + \frac{X}{x} \right)$.

Primjer

$2^{3/4} = 2^{3/(2 \cdot 2)} = \sqrt{\sqrt{2^3}} = \sqrt{\sqrt{8}}$ *Koliko je to otprilike?*

$2^2 < 8 < 3^2 \Rightarrow 2 < \sqrt{8} < 3; 1^2 < 2 < 3 < 4 = 2^2 \Rightarrow 1 < 2^{3/4} < 2$
($X = 8$), $x = 2,5$

$$x' = \frac{1}{2} \left(2,5 + \frac{8}{2,5} \right) = 2,85.$$

$\sqrt{\sqrt{8}} \approx \sqrt{2,85}$: $X = 2,85$, $x = 1 \Rightarrow$

$$\sqrt{\sqrt{8}} \approx \frac{1}{2} \left(1 + \frac{2,85}{1} \right) = \frac{3,85}{2} = 1,925.$$

Iracionalni brojevi

Definicija iracionalnih i realnih brojeva

Realni brojevi su svi brojevi koji se mogu prikazati na **brojevnom pravcu**:

Iracionalni brojevi

Definicija iracionalnih i realnih brojeva

Realni brojevi su svi brojevi koji se mogu prikazati na **brojevnom pravcu**: Svakom realnom broju odgovara točno jedna točka brojevnog pravca i obrnuto, svakoj točki na brojevnom pravcu odgovara točno jedan realan broj.

Iracionalni brojevi

Definicija iracionalnih i realnih brojeva

Realni brojevi su svi brojevi koji se mogu prikazati na **brojevnom pravcu**: Svakom realnom broju odgovara točno jedna točka brojevnog pravca i obrnuto, svakoj točki na brojevnom pravcu odgovara točno jedan realan broj. **Iracionalni brojevi** su realni brojevi koji nisu racionalni. Decimalni zapis iracionalnog broja uvijek je beskonačan i neperiodičan.

Istaknuti iracionalni brojevi su $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{6}$, $\sqrt{7}$, $\sqrt{8}$, $\sqrt{10}$, $\sqrt{11}$, ..., broj e i omjer π opsega i promjera bilo kojeg kruga.

Iracionalni brojevi

Definicija iracionalnih i realnih brojeva

Realni brojevi su svi brojevi koji se mogu prikazati na **brojevnom pravcu**: Svakom realnom broju odgovara točno jedna točka brojevnog pravca i obrnuto, svakoj točki na brojevnom pravcu odgovara točno jedan realan broj. **Iracionalni brojevi** su realni brojevi koji nisu racionalni. Decimalni zapis iracionalnog broja uvijek je beskonačan i neperiodičan.

Istaknuti iracionalni brojevi su $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{6}$, $\sqrt{7}$, $\sqrt{8}$, $\sqrt{10}$, $\sqrt{11}$, ..., broj e i omjer π opsega i promjera bilo kojeg kruga.

Primjer

$\sqrt[3]{3}$ je iracionalan.

Iracionalni brojevi

Definicija iracionalnih i realnih brojeva

Realni brojevi su svi brojevi koji se mogu prikazati na **brojevnom pravcu**: Svakom realnom broju odgovara točno jedna točka brojevnog pravca i obrnuto, svakoj točki na brojevnom pravcu odgovara točno jedan realan broj. **Iracionalni brojevi** su realni brojevi koji nisu racionalni. Decimalni zapis iracionalnog broja uvijek je beskonačan i neperiodičan.

Istaknuti iracionalni brojevi su $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{6}$, $\sqrt{7}$, $\sqrt{8}$, $\sqrt{10}$, $\sqrt{11}$, $\dots$, broj e i omjer π opsega i promjera bilo kojeg kruga.

Primjer

$\sqrt[3]{3}$ je iracionalan. Pretpostavimo suprotno: Neka je $\sqrt[3]{3} = \frac{m}{n}$ gdje je razlomak $\frac{m}{n}$ maksimalno skraćen.

Iracionalni brojevi

Definicija iracionalnih i realnih brojeva

Realni brojevi su svi brojevi koji se mogu prikazati na **brojevnom pravcu**: Svakom realnom broju odgovara točno jedna točka brojevnog pravca i obrnuto, svakoj točki na brojevnom pravcu odgovara točno jedan realan broj. **Iracionalni brojevi** su realni brojevi koji nisu racionalni. Decimalni zapis iracionalnog broja uvijek je beskonačan i neperiodičan.

Istaknuti iracionalni brojevi su $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{6}$, $\sqrt{7}$, $\sqrt{8}$, $\sqrt{10}$, $\sqrt{11}$, ..., broj e i omjer π opsega i promjera bilo kojeg kruga.

Primjer

$\sqrt[3]{3}$ je iracionalan. Pretpostavimo suprotno: Neka je $\sqrt[3]{3} = \frac{m}{n}$ gdje je razlomak $\frac{m}{n}$ maksimalno skraćen. Tada je $m^3 = 3n^3$, dakle $m = 3k$.

Iracionalni brojevi

Definicija iracionalnih i realnih brojeva

Realni brojevi su svi brojevi koji se mogu prikazati na **brojevnom pravcu**: Svakom realnom broju odgovara točno jedna točka brojevnog pravca i obrnuto, svakoj točki na brojevnom pravcu odgovara točno jedan realan broj. **Iracionalni brojevi** su realni brojevi koji nisu racionalni. Decimalni zapis iracionalnog broja uvijek je beskonačan i neperiodičan.

Istaknuti iracionalni brojevi su $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{6}$, $\sqrt{7}$, $\sqrt{8}$, $\sqrt{10}$, $\sqrt{11}$, $\dots$, broj e i omjer π opsega i promjera bilo kojeg kruga.

Primjer

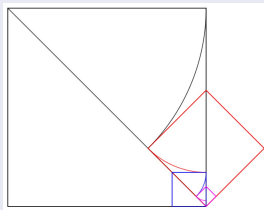
$\sqrt[3]{3}$ je iracionalan. Pretpostavimo suprotno: Neka je $\sqrt[3]{3} = \frac{m}{n}$ gdje je razlomak $\frac{m}{n}$ maksimalno skraćén. Tada je $m^3 = 3n^3$, dakle $m = 3k$. Stoga je $27k^3 = 3n^3$, dakle $n^3 = 9k^3$ pa bi i n bio djeljiv s 3, što je kontradikcija.

Primjer

Euklidov algoritam se danas obično koristi za računanje najvećeg zajedničkog djelitelja (mjere) dva prirodna broja m i n . Ako je $m > n$, podijelimo djeljenik m s djeliteljem n i zapišemo ostatak. U svakom sljedećem koraku na mjesto djeljenika ide prethodni djelitelj, a na mjesto djelitelja prethodni ostatak. Postupak staje kad dobijemo ostatak 0 te je traženi najveći zajednički djelitelj jednak zadnjem djelitelju.

Primjer

Euklidov algoritam se danas obično koristi za računanje najvećeg zajedničkog djelitelja (mjere) dva prirodna broja m i n . Ako je $m > n$, podijelimo djeljenik m s djeliteljem n i zapišemo ostatak. U svakom sljedećem koraku na mjesto djeljenika ide prethodni djelitelj, a na mjesto djelitelja prethodni ostatak. Postupak staje kad dobijemo ostatak 0 te je traženi najveći zajednički djelitelj jednak zadnjem djelitelju. U pitagorejsko doba taj se algoritam primjenjivao na dužine, a dijeljenje se svodilo na nanošenje manje dužine na veću. Ako postupak ne staje, veličine na koje je primijenjen nisu sumjerljive.



Primjer

Iracionalan broj potenciran na iracionalan broj može biti racionalan, ali i iracionalan.

Primjer

Iracionalan broj potenciran na iracionalan broj može biti racionalan, ali i iracionalan.

Pogledajmo broj $a = \sqrt{2}^{\sqrt{2}}$.

- *Ako je a racionalan, onda je on primjer koji dokazuje da iracionalan broj potenciran na iracionalan može biti racionalan.*

Primjer

Iracionalan broj potenciran na iracionalan broj može biti racionalan, ali i iracionalan.

Pogledajmo broj $a = \sqrt{2}^{\sqrt{2}}$.

- Ako je a racionalan, onda je on primjer koji dokazuje da iracionalan broj potenciran na iracionalan može biti racionalan. Tada je $\sqrt{2}^{\sqrt{2}+1} = a \cdot \sqrt{2}$ primjer koji dokazuje da iracionalan broj potenciran na iracionalan može biti iracionalan.*

Primjer

Iracionalan broj potenciran na iracionalan broj može biti racionalan, ali i iracionalan.

Pogledajmo broj $a = \sqrt{2}^{\sqrt{2}}$.

- *Ako je a racionalan, onda je on primjer koji dokazuje da iracionalan broj potenciran na iracionalan može biti racionalan. Tada je $\sqrt{2}^{\sqrt{2}+1} = a \cdot \sqrt{2}$ primjer koji dokazuje da iracionalan broj potenciran na iracionalan može biti iracionalan.*
- *Ako je a iracionalan, onda je on primjer koji dokazuje da iracionalan broj potenciran na iracionalan može biti iracionalan.*

Primjer

Iracionalan broj potenciran na iracionalan broj može biti racionalan, ali i iracionalan.

Pogledajmo broj $a = \sqrt{2}^{\sqrt{2}}$.

- *Ako je a racionalan, onda je on primjer koji dokazuje da iracionalan broj potenciran na iracionalan može biti racionalan. Tada je $\sqrt{2}^{\sqrt{2}+1} = a \cdot \sqrt{2}$ primjer koji dokazuje da iracionalan broj potenciran na iracionalan može biti iracionalan.*
- *Ako je a iracionalan, onda je on primjer koji dokazuje da iracionalan broj potenciran na iracionalan može biti iracionalan. Tada $a^{\sqrt{2}} = \sqrt{2}^{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \sqrt{2}^2 = 2$ pokazuje da iracionalan broj potenciran na iracionalan može biti racionalan.*