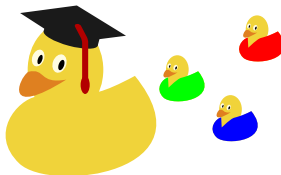


Matematika 1 (23. listopada 2026.)

Franka Miriam Brückler



Dva osnovna teorema o krugu i kružnici

Za danu tetivu, pripadni središnji kut je dvostruko veći od bilo kojeg obodnog kuta nad tom tetivom.

Dva osnovna teorema o krugu i kružnici

Za danu tetivu, pripadni središnji kut je dvostruko veći od bilo kojeg obodnog kuta nad tom tetivom. Specijalno, prema Talesovom teoremu, obodni kut nad promjerom je pravi.

Dva osnovna teorema o krugu i kružnici

Za danu tetivu, pripadni središnji kut je dvostruko veći od bilo kojeg obodnog kuta nad tom tetivom. Specijalno, prema Talesovom teoremu, obodni kut nad promjerom je pravi.

Primjer

Površina kruga je razmjerna kvadratu njegova polumjera, ali ne i njegovom polumjeru. No, opseg je kruga je razmjeran njegovom polumjeru i promjeru.

Dva osnovna teorema o krugu i kružnici

Za danu tetivu, pripadni središnji kut je dvostruko veći od bilo kojeg obodnog kuta nad tom tetivom. Specijalno, prema Talesovom teoremu, obodni kut nad promjerom je pravi.

Primjer

Površina kruga je razmjerna kvadratu njegova polumjera, ali ne i njegovom polumjeru. No, opseg je kruga je razmjeran njegovom polumjeru i promjeru.

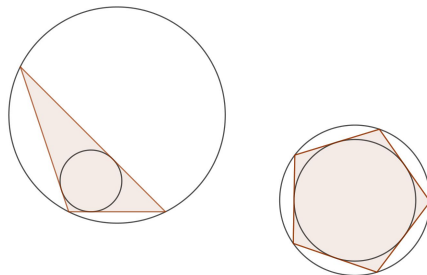
Zadatak

Dokažite: Ako u kružnom dijagramu želimo nacrtati isječak koji predstavlja udio od $p\%$, odgovarajući središnji kut iznosi točno $p \cdot 3,6^\circ$.

Zadatak

Ispravite matematičke greške u vijesti na ovom [linku](#).

Upisana kružnica mnogokuta (ne samo pravilnog) je kružnica koja dodiruje (siječe u točno po jednoj točki) sve njegove stranice, a **opisana kružnica** mnogokuta je kružnica koja prolazi kroz sve vrhove mnogokuta. Upisana i opisana kružnica postoje za svaki trokut, ali ne i za sve n -terokute s $n > 3$. No, svakom pravilnom mnogokutu se može upisati i opisati kružnica, pri čemu su te dvije kružnice koncentrične. Obratno, mnogokut je upisan kružnici ako mu vrhovi leže na njoj, a opisan joj je ako ju dodiruje svaka njegova strana.



Dimenzijska homogenost i greške aproksimacija

Ako neka formula nema dimenziju duljine, onda sigurno ne predstavlja opseg ikojeg lika. Analogno vrijedi za površinu (i volumene i bilo koje druge fizikalne veličine).

Primjer

Zapisati formulu za površinu kruga u obliku πr je puno gore nego zapisati formulu za površinu jednakostraničnog trokuta u obliku $\frac{3}{4}a^2$. Koliko iznosi relativna greška aproksimacije u drugom slučaju?

Dimenzijska homogenost i greške aproksimacija

Ako neka formula nema dimenziju duljine, onda sigurno ne predstavlja opseg ikojeg lika. Analogno vrijedi za površinu (i volumene i bilo koje druge fizikalne veličine).

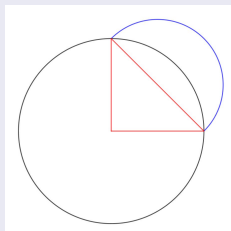
Primjer

Zapisati formulu za površinu kruga u obliku πr je puno gore nego zapisati formulu za površinu jednakostraničnog trokuta u obliku $\frac{3}{4}a^2$. Koliko iznosi relativna greška aproksimacije u drugom slučaju?

Zadatak

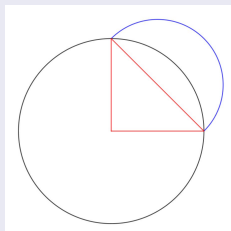
Odredite relativne greške izračunavanja površine kruga promjera d kao $3,14 \cdot \left(\frac{d}{2}\right)^2$ te staroegipatskim postupkom u kojem se površina kruga računa kao površina kvadrata kojemu je stranica $\frac{8}{9}d$.

Pokušavajući riješiti problem kvadrature kruga, Hipokrat s Hiosa je u 5. st. pr. Kr. konstruirao je određene likove koji su kasnije dobili naziv Hipokratovi mjeseci. Prvi Hipokratov mjesec je sljedeći mjesecoliki lik:



Primjer

Pokušavajući riješiti problem kvadrature kruga, Hipokrat s Hiosa je u 5. st. pr. Kr. konstruirao je određene likove koji su kasnije dobili naziv Hipokratovi mjeseci. Prvi Hipokratov mjesec je sljedeći mjesecoliki lik:



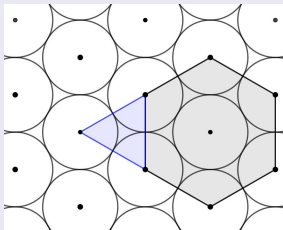
Dokažite da on uvijek ima istu površinu kao jednakokračnu pravokutni trokut temeljem kojeg je konstruiran.

Primjer

Slažete kovanice od jednog eura (promjer im je 23,25 mm) na veliki stol i to što gušće.

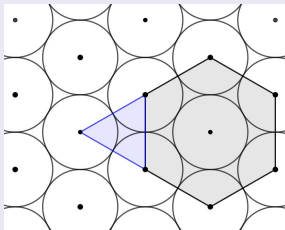
Primjer

Slažete kovanice od jednog eura (promjer im je 23,25 mm) na veliki stol i to što gušće. Znaete da je dokazano da je najgušće pakiranje ovakvo:



Primjer

Slažete kovanice od jednog eura (promjer im je 23,25 mm) na veliki stol i to što gušće. Znaete da je dokazano da je najgušće pakiranje ovakvo:



Koliko iznosi prazna površina između takvih šest kovanica i jedne središnje oko koje su raspoređene? Ako znamo da je gustoća čitavog pakiranja jednaka omjeru prekrivene i sve površine u bilo kojem jednakostraničnom trokutu čiji vrhovi čine sredine triju susjednih novčića, koliko iznosi gustoća tog najgušćeg pakiranja?

Očigledno je tražena površina jednaka šesterostrukoj površini između triju susjednih krugova promjera $d = 23,25$ mm. Pogledajmo jednakostranični trokut kojeg tvore središta tih triju krugova (plavo na slici).

Očigledno je tražena površina jednaka šesterostrukoj površini između triju susjednih krugova promjera $d = 23,25$ mm.

Pogledajmo jednakostranični trokut kojeg tvore središta tih triju krugova (plavo na slici).

Površina mu je $\frac{\sqrt{3}}{4} d^2$.

Očigledno je tražena površina jednaka šesterostrukoj površini između triju susjednih krugova promjera $d = 23,25$ mm.

Pogledajmo jednakostranični trokut kojeg tvore središta tih triju krugova (plavo na slici).

Površina mu je $\frac{\sqrt{3}}{4}d^2$. Od te površine krugovi pokrivaju tri svoja isječka sa središnjim kutovima 60° , dakle točno pola jednog kruga, odnosno površinu $\frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{4}d^2 = \frac{\pi}{8}d^2$.

Očigledno je tražena površina jednaka šesterostrukoj površini između triju susjednih krugova promjera $d = 23,25$ mm.

Pogledajmo jednakostranični trokut kojeg tvore središta tih triju krugova (plavo na slici).

Površina mu je $\frac{\sqrt{3}}{4}d^2$. Od te površine krugovi pokrivaju tri svoja isječka sa središnjim kutovima 60° , dakle točno pola jednog kruga, odnosno površinu $\frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{4}d^2 = \frac{\pi}{8}d^2$. Stoga je tražena površina

$$6 \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{4}d^2 - \frac{\pi}{8}d^2 \right) = \frac{6\sqrt{3} - 3\pi}{4} \cdot 23,25^2 \text{ cm}^2 = 1,308 \text{ cm}^2$$

Očigledno je tražena površina jednaka šesterostrukoj površini između triju susjednih krugova promjera $d = 23,25$ mm.

Pogledajmo jednakostranični trokut kojeg tvore središta tih triju krugova (plavo na slici).

Površina mu je $\frac{\sqrt{3}}{4}d^2$. Od te površine krugovi pokrivaju tri svoja isječka sa središnjim kutovima 60° , dakle točno pola jednog kruga, odnosno površinu $\frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{4}d^2 = \frac{\pi}{8}d^2$. Stoga je tražena površina

$$6 \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{4}d^2 - \frac{\pi}{8}d^2 \right) = \frac{6\sqrt{3} - 3\pi}{4} \cdot 23,25^2 \text{ cm}^2 = 1,308 \text{ cm}^2.$$

Iz prethodnog računa vidimo da je gustoća najgušćeg pakiranja sukladnih krugova jednaka

$$\frac{\frac{\pi}{8}}{\frac{\sqrt{3}}{4}} = \frac{\pi}{2\sqrt{3}} \approx 90,69 \ %.$$

Geometrijska vjerojatnost

Ako je **vjerojatnosni prostor** (skup svih elementarnih događaja) beskonačan, ali ga možemo poistovjetiti s nekom krivuljom, likom ili tijelom, a razmatrani događaj A onda shvatimo kao njegov podskup, $P(A)$ je količnik duljina, površina odnosno volumena koji odgovaraju samom A i cijelom vjerojatnosnom prostoru.

Geometrijska vjerojatnost

Ako je **vjerojatnosni prostor** (skup svih elementarnih događaja) beskonačan, ali ga možemo poistovjetiti s nekom krivuljom, likom ili tijelom, a razmatrani događaj A onda shvatimo kao njegov podskup, $P(A)$ je količnik duljina, površina odnosno volumena koji odgovaraju samom A i cijelom vjerojatnosnom prostoru.

Primjer

Vili Šeprtlji je ispao njezin stakleni čarobni štapić duljine 30 cm i prelomio se na dva mjesta. Kolika je vjerojatnost da ta tri dijela vila može složiti u trokut?

Geometrijska vjerojatnost

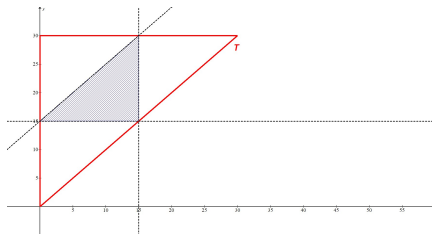
Ako je **vjerojatnosni prostor** (skup svih elementarnih događaja) beskonačan, ali ga možemo poistovjetiti s nekom krivuljom, likom ili tijelom, a razmatrani događaj A onda shvatimo kao njegov podskup, $P(A)$ je količnik duljina, površina odnosno volumena koji odgovaraju samom A i cijelom vjerojatnosnom prostoru.

Primjer

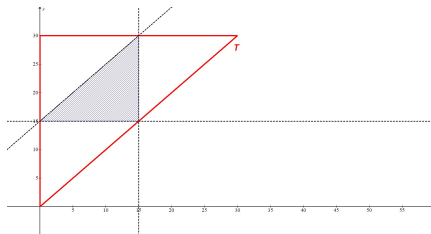
Vili Šeprtlji je ispao njezin stakleni čarobni štapić duljine 30 cm i prelomio se na dva mjesta. Kolika je vjerojatnost da ta tri dijela vila može složiti u trokut?

Uzmimo da je mjera duljine fiksirana kao centimetar. Neka su u odnosu na jedan kraj pozicije lomova x (pozicija loma bliža tom kraju) i y (centimetara). Naravno, $0 < x < y < 30$.

Stoga u Kartezijevom koordinatnom sustavu vjerojatnosni prostor, odnosno sve moguće ishode, možemo poistovjetiti s trokutom s vrhovima $(0, 0)$, $(0, 30)$ i $(30, 30)$ (pri čemu rub nije uključen u moguće ishode, ali rub ima površinu nula pa to ne mijenja površinu trokuta).

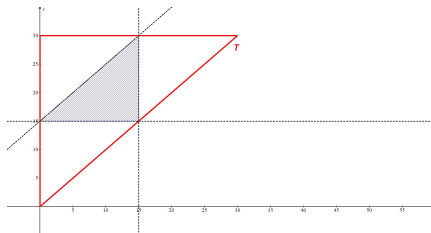


Stoga u Kartezijevom koordinatnom sustavu vjerojatnosni prostor, odnosno sve moguće lomove, možemo poistovjetiti s trokutom s vrhovima $(0, 0)$, $(0, 30)$ i $(30, 30)$ (pri čemu rub nije uključen u moguće ishode, ali rub ima površinu nula pa to ne mijenja površinu trokuta).



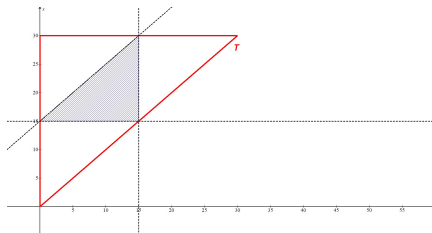
Duljine dobivenih dijelova štapića su x , $y - x$ i $30 - y$.

Stoga u Kartezijevom koordinatnom sustavu vjerojatnosni prostor, odnosno sve moguće lomove, možemo poistovjetiti s trokutom s vrhovima $(0, 0)$, $(0, 30)$ i $(30, 30)$ (pri čemu rub nije uključen u moguće ishode, ali rub ima površinu nula pa to ne mijenja površinu trokuta).



Duljine dobivenih dijelova štapića su x , $y - x$ i $30 - y$. Da bi se iz njih mogao složiti trokut, zbroj svake dvije mora biti dulji od treće.

Stoga u Kartezijevom koordinatnom sustavu vjerojatnosni prostor, odnosno sve moguće lomove, možemo poistovjetiti s trokutom s vrhovima $(0, 0)$, $(0, 30)$ i $(30, 30)$ (pri čemu rub nije uključen u moguće ishode, ali rub ima površinu nula pa to ne mijenja površinu trokuta).



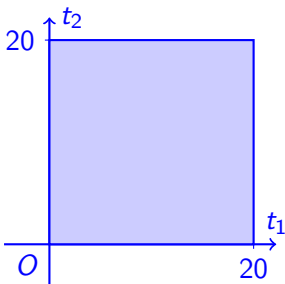
Duljine dobivenih dijelova štapića su x , $y - x$ i $30 - y$. Da bi se iz njih mogao složiti trokut, zbroj svake dvije mora biti dulji od treće. Dakle, $y > 15$, $x < 15$ i $x + 15 > y$, tj. za razmatrani događaj povoljan je onaj dio u kojem je $y > 15$ i $x < 15$ i ujedno ispod pravca $y = x + 15$.

Tražena vjerojatnost je $\frac{1}{4} = 25\%$.

◀ ◻ ▶ ◀ ◻ ▶ ◀ ≡ ▶ ◀ ≡ ▶ ≡ ▶ ↺ 🔍 ↻

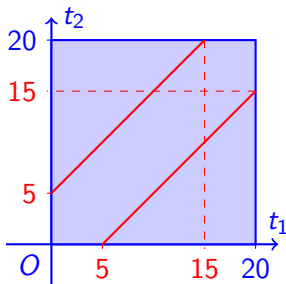
Zadatak

Dvoje kolega dogovorili su se na fakultet ići tramvajem s iste tramvajske stanice. Da bi na vrijeme stigli na predavanje u 8 h moraju „uloviti“ tramvaj koji s te stanice kreće između 7 : 00 h i 7 : 20 h te oba sigurno stižu na stanicu unutar tog vremena. Uz pretpostavku da tramvaji stižu na stanicu nasumično, ali uniformno (svako vrijeme je jednako vjerojatno) i ako su se dogovorili da jedan na drugog čekaju najviše 5 minuta, pokažite da je vjerojatnost da će stvarno skupa ići na predavanje jednaka $\frac{7}{16}$.



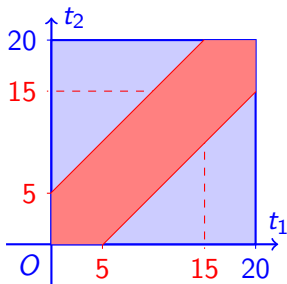
Zadatak

Dvoje kolega dogovorili su se na fakultet ići tramvajem s iste tramvajske stanice. Da bi na vrijeme stigli na predavanje u 8 h moraju „uloviti“ tramvaj koji s te stanice kreće između 7 : 00 h i 7 : 20 h te oba sigurno stižu na stanicu unutar tog vremena. Uz pretpostavku da tramvaji stižu na stanicu nasumično, ali uniformno (svako vrijeme je jednako vjerojatno) i ako su se dogovorili da jedan na drugog čekaju najviše 5 minuta, pokažite da je vjerojatnost da će stvarno skupa ići na predavanje jednaka $\frac{7}{16}$.



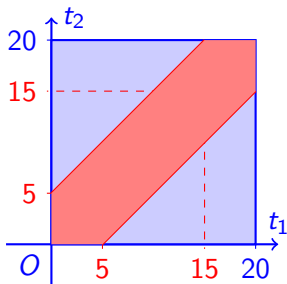
Zadatak

Dvoje kolega dogovorili su se na fakultet ići tramvajem s iste tramvajske stanice. Da bi na vrijeme stigli na predavanje u 8 h moraju „uloviti“ tramvaj koji s te stanice kreće između 7 : 00 h i 7 : 20 h te oba sigurno stižu na stanicu unutar tog vremena. Uz pretpostavku da tramvaji stižu na stanicu nasumično, ali uniformno (svako vrijeme je jednako vjerojatno) i ako su se dogovorili da jedan na drugog čekaju najviše 5 minuta, pokažite da je vjerojatnost da će stvarno skupa ići na predavanje jednaka $\frac{7}{16}$.



Zadatak

Dvoje kolega dogovorili su se na fakultet ići tramvajem s iste tramvajske stanice. Da bi na vrijeme stigli na predavanje u 8 h moraju „uloviti“ tramvaj koji s te stanice kreće između 7 : 00 h i 7 : 20 h te oba sigurno stižu na stanicu unutar tog vremena. Uz pretpostavku da tramvaji stižu na stanicu nasumično, ali uniformno (svako vrijeme je jednako vjerojatno) i ako su se dogovorili da jedan na drugog čekaju najviše 5 minuta, pokažite da je vjerojatnost da će stvarno skupa ići na predavanje jednaka $\frac{7}{16}$.



$$P = \frac{20 \cdot 20 - 2 \cdot \frac{15 \cdot 15}{2}}{20 \cdot 20} = \frac{7}{16}$$

Osnovni stereometrijski objekti 🎓

- Svi planimetrijski objekti su ujedno stereometrijski objekti (volumena 0)

- Svi planimetrijski objekti su ujedno stereometrijski objekti (volumena 0)
- **Geometrijska tijela** su ograničeni objekti u prostoru s pozitivnim volumenom. Rub geometrijskog tijela naziva se njegovom **plohom**.

Osnovni stereometrijski objekti

- Svi planimetrijski objekti su ujedno stereometrijski objekti (volumena 0)
- **Geometrijska tijela** su ograničeni objekti u prostoru s pozitivnim volumenom. Rub geometrijskog tijela naziva se njegovom **plohom**.
- Uz **volumen**, temeljna karakteristika objekata u prostoru je **oplošje** (koje se za planimetrijske objekte podudara s njihovom površinom, a za geometrijska tijela to je površina njihove plohe).

Osnovni stereometrijski objekti

- Svi planimetrijski objekti su ujedno stereometrijski objekti (volumena 0)
- **Geometrijska tijela** su ograničeni objekti u prostoru s pozitivnim volumenom. Rub geometrijskog tijela naziva se njegovom **plohom**.
- Uz **volumen**, temeljna karakteristika objekata u prostoru je **oplošje** (koje se za planimetrijske objekte podudara s njihovom površinom, a za geometrijska tijela to je površina njihove plohe).
- **Poliedri** su geometrijska tijela omeđena mnogokutima (**stranama poliedra**). Po dvije susjedne strane poliedra se dodiruju u **bridu**, a krajevi bridova su **vrhovi** poliedra. Oplošje poliedra je zbroj površina njegovih strana.

Zadatak

*Mogu li se u nekom vrhu nekog poliedra sastati točno dvije strane?
 Koji je najveći zbroj kutova strana koje se sastaju u jednom vrhu
 poliedra?*

Zadatak

*Mogu li se u nekom vrhu nekog poliedra sastati točno dvije strane?
 Koji je najveći zbroj kutova strana koje se sastaju u jednom vrhu
 poliedra?*

Ako bi se sastale samo dvije strane, onda vrh ne bi bio određen jer presjekom dviju ravnina ne možemo dobiti samo jednu točku.

Zadatak

*Mogu li se u nekom vrhu nekog poliedra sastati točno dvije strane?
Koji je najveći zbroj kutova strana koje se sastaju u jednom vrhu
poliedra?*

Ako bi se sastale samo dvije strane, onda vrh ne bi bio određen jer presjekom dviju ravnina ne možemo dobiti samo jednu točku.
Zbroj kutova pri jednom vrhu mora biti manji od 360° .

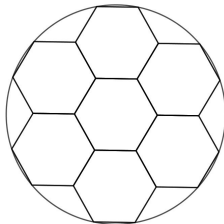
Zadatak

*Mogu li se u nekom vrhu nekog poliedra sastati točno dvije strane?
 Koji je najveći zbroj kutova strana koje se sastaju u jednom vrhu poliedra?*

Ako bi se sastale samo dvije strane, onda vrh ne bi bio određen jer presjekom dviju ravnina ne možemo dobiti samo jednu točku.
 Zbroj kutova pri jednom vrhu mora biti manji od 360° .

Zadatak

Zašto je ikona prikazan na slici loš prikaz nogometne lopte?



Odnosi među pravcima i ravninama

- Dva pravca u prostoru mogu ...
 - biti **paralelni (usporedni)** ($\parallel$), ako leže u istoj ravnini i ne sijeku se (ili se podudaraju), ili
 - se mogu sjeći (te također određuju jedinstvenu ravninu), ili
 - biti **mimoilazni (mimosmjerni)**

Odnosi među pravcima i ravninama

- Dva pravca u prostoru mogu ...
 - biti **paralelni (usporedni)** ($\parallel$), ako leže u istoj ravnini i ne sijeku se (ili se podudaraju), ili
 - se mogu sjeći (te također određuju jedinstvenu ravninu), ili
 - biti **mimoilazni (mimosmjerni)**
- Odnos pravca i ravnine može
 - sjeći ravninu u jednoj točki (probodištu), ili
 - je pravac paralelan ravnini (ne siječe ju ili cijeli leži u ravnini).

Odnosi među pravcima i ravninama

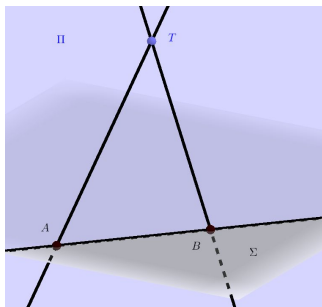
- Dva pravca u prostoru mogu ...
 - biti **paralelni (usporedni)** ($\parallel$), ako leže u istoj ravnini i ne sijeku se (ili se podudaraju), ili
 - se mogu sjeći (te također određuju jedinstvenu ravninu), ili
 - biti **mimoilazni (mimosmjerni)**
- Odnos pravca i ravnine može
 - sjeći ravninu u jednoj točki (probodištu), ili
 - je pravac paralelan ravnini (ne siječe ju ili cijeli leži u ravnini).
- Dvije ravnine mogu biti ...
 - paralelne, ako se ne sijeku (ili se podudaraju), ili
 - se sjeći duž jednog pravca (presječnice ravnina)

Odnosi među pravcima i ravninama

- Dva pravca u prostoru mogu ...
 - biti **paralelni (usporedni)** ($\parallel$), ako leže u istoj ravnini i ne sijeku se (ili se podudaraju), ili
 - se mogu sjeći (te također određuju jedinstvenu ravninu), ili
 - biti **mimoilazni (mimosmjerni)**
- Odnos pravca i ravnine može
 - sjeći ravninu u jednoj točki (probodištu), ili
 - je pravac paralelan ravnini (ne siječe ju ili cijeli leži u ravnini).
- Dvije ravnine mogu biti ...
 - paralelne, ako se ne sijeku (ili se podudaraju), ili
 - se sjeći duž jednog pravca (presječnice ravnina)
- $p \perp \Sigma$ ako je p okomit na svaki pravac u Σ
- $\Sigma \perp \Pi$ ako se sijeku u presječnici p te ako su njihove presječnice s $\Gamma \perp p$ međusobno okomite
- Kad kažemo da su dva lika okomita, želimo reći da su okomite ravnine u kojima se oni nalaze.

Primjer

Zadani su ravnina Σ te jedna točka A u njoj i jedna točka T izvan te ravnine. Neka je $p = AT$, a q bilo koji drugi pravac koji prolazi kroz T i neka je B probodište q sa Σ . Tada da p i q leže u jednoj ravnini jer nisu isti pravci, a imaju zajedničku točku T pa se sijeku i stoga određuju ravninu Π . Ta ravnina siječe Σ duž pravca AB jer sadrži i točku A i točku B pa mora sadržavati i čitav pravac AB , a pritom očito nije jednaka ravnini Σ jer sadrži točku T koja nije u Σ .



Prizme



- **Prizma** (n -terostrana) je poliedar omeđen s dva paralelna i sukladna n -terokuta (baze prizme) i n pravokutnika (pobočki prizme) kojima su po dva nasuprotna brida međusobno odgovarajući bridovi baza. Razmak baza je visina h prizme, a volumen prizme jednak je umnošku h i površine B njene baze.

Prizme

- **Prizma** (n -terostrana) je poliedar omeđen s dva paralelna i sukladna n -terokuta (baze prizme) i n pravokutnika (pobočki prizme) kojima su po dva nasuprotna brida međusobno odgovarajući bridovi baza. Razmak baza je visina h prizme, a volumen prizme jednak je umnošku h i površine B njene baze.
- Prizma je **uspravna** ako su pobočke okomite na baze. Prizma je **pravilna** ako je uspravna i ako su joj baze pravilni mnogokuti.

Prizme

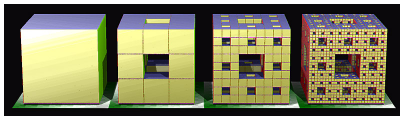
- **Prizma** (n -terostrana) je poliedar omeđen s dva paralelna i sukladna n -terokuta (baze prizme) i n pravokutnika (pobočki prizme) kojima su po dva nasuprotna brida međusobno odgovarajući bridovi baza. Razmak baza je visina h prizme, a volumen prizme jednak je umnošku h i površine B njene baze.
- Prizma je **uspravna** ako su pobočke okomite na baze. Prizma je **pravilna** ako je uspravna i ako su joj baze pravilni mnogokuti.
- Uspravna četverostrana prizma kojoj su sve strane pravokutnici zove se **kvadar**. Kvadar kojemu su svi bridovi iste duljine zove se **kocka**. Četverostrana prizma kojoj su sve strane paralelogrami, po dvije nasuprotne sukladne, zove se **paralelepiped**.

Zadatak

Izvedite formule za V i P općeg kvadra te V i d kocke.

S povećanjem odnosno smanjenjem V često, ali ne i uvijek, se povećavava odnosno smanjuje i P tijela određenog tipa (oprez, u pravilu tu nemamo proporcionalnost!).

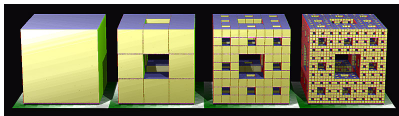
S povećanjem odnosno smanjenjem V često, ali ne i uvijek, se povećavava odnosno smanjuje i P tijela određenog tipa (oprez, u pravilu tu nemamo proporcionalnost!).



Primjer

Polazna kocka: $a = 9$ cm. Razrežemo ju na 27 jednakih kockica i odbacimo srednju kockicu te srednje kockice na svakoj od 6 strana polazne kocke.

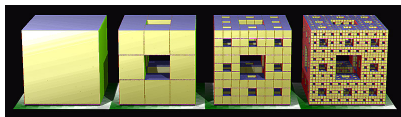
S povećanjem odnosno smanjenjem V često, ali ne i uvijek, se povećavava odnosno smanjuje i P tijela određenog tipa (oprez, u pravilu tu nemamo proporcionalnost!).



Primjer

Polazna kocka: $a = 9$ cm. Razrežemo ju na 27 jednakih kockica i odbacimo srednju kockicu te srednje kockice na svakoj od 6 strana polazne kocke. Ponovimo postupak sa svakom od preostalih kockica.

S povećanjem odnosno smanjenjem V često, ali ne i uvijek, se povećavava odnosno smanjuje i P tijela određenog tipa (oprez, u pravilu tu nemamo proporcionalnost!).



Primjer

Polazna kocka: $a = 9$ cm. Razrežemo ju na 27 jednakih kockica i odbacimo srednju kockicu te srednje kockice na svakoj od 6 strana polazne kocke. Ponovimo postupak sa svakom od preostalih kockica.

$$V_1 = 729 \text{ ml}; V_2 = V_1 - 7 \cdot 27 \text{ ml} = 540 \text{ ml}; V_2 = V_1 - 20 \cdot 7 \cdot \text{ml} = 400 \text{ ml}$$

$$P_1 = 486 \text{ cm}^2; P_2 = P_1 - 6 \cdot 9 \text{ cm}^2 + 4 \cdot 9 \text{ cm}^2 = 648 \text{ cm}^2$$

$$\text{DZ: } P_2 = 1056 \text{ cm}^2.$$

Valjci

- **Valjak** (kružni) je geometrijsko tijelo koje možemo opisati kao prizmu s kružnim bazama, a ako je uspravan možemo ga opisati i kao rotacijsko tijelo koje nastaje rotacijom pravokutnika oko jedne njegove stranice.

Valjci

- **Valjak** (kružni) je geometrijsko tijelo koje možemo opisati kao prizmu s kružnim bazama, a ako je uspravan možemo ga opisati i kao rotacijsko tijelo koje nastaje rotacijom pravokutnika oko jedne njegove stranice.
- Oplošje uspravnog valjka kojemu je visina h i polumjer baze r je $P = 2r\pi(r + h)$. Volumen valjka je, kao i kod prizme, $V = Bh$, gdje je B površina jedne njegove baze.

Valjci

- **Valjak** (kružni) je geometrijsko tijelo koje možemo opisati kao prizmu s kružnim bazama, a ako je uspravan možemo ga opisati i kao rotacijsko tijelo koje nastaje rotacijom pravokutnika oko jedne njegove stranice.
- Oplošje uspravnog valjka kojemu je visina h i polumjer baze r je $P = 2r\pi(r + h)$. Volumen valjka je, kao i kod prizme, $V = B h$, gdje je B površina jedne njegove baze.

Primjer

Dvije (otvorene) konzerve oblika valjka, zanemarive debljine stijenki, imaju i promjer i visinu od točno 10 cm. Jedan robot boji prvu (samo izvana) brzinom $1 \text{ cm}^2/\text{s}$, a drugi robot u drugu ulijeva vodu brzinom $1 \text{ ml}/\text{s}$. Oba rade dok konzerva nije do kraja obojena odnosno napunjena. Koji robot će brže biti gotov s poslom?

Valjci

- **Valjak** (kružni) je geometrijsko tijelo koje možemo opisati kao prizmu s kružnim bazama, a ako je uspravan možemo ga opisati i kao rotacijsko tijelo koje nastaje rotacijom pravokutnika oko jedne njegove stranice.
- Oplošje uspravnog valjka kojemu je visina h i polumjer baze r je $P = 2r\pi(r + h)$. Volumen valjka je, kao i kod prizme, $V = B h$, gdje je B površina jedne njegove baze.

Primjer

Dvije (otvorene) konzerve oblika valjka, zanemarive debljine stijenki, imaju i promjer i visinu od točno 10 cm. Jedan robot boji prvu (samo izvana) brzinom $1 \text{ cm}^2/\text{s}$, a drugi robot u drugu ulijeva vodu brzinom $1 \text{ ml}/\text{s}$. Oba rade dok konzerva nije do kraja obojena odnosno napunjena. Koji robot će brže biti gotov s poslom?

$$P = r^2\pi + 2r\pi \cdot h = \dots = 125\pi \text{ cm}^2 \Rightarrow t_1 = 125\pi \text{ s.}$$

Valjci

- **Valjak** (kružni) je geometrijsko tijelo koje možemo opisati kao prizmu s kružnim bazama, a ako je uspravan možemo ga opisati i kao rotacijsko tijelo koje nastaje rotacijom pravokutnika oko jedne njegove stranice.
- Oplošje uspravnog valjka kojemu je visina h i polumjer baze r je $P = 2r\pi(r + h)$. Volumen valjka je, kao i kod prizme, $V = B h$, gdje je B površina jedne njegove baze.

Primjer

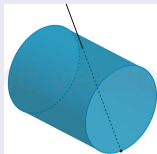
Dvije (otvorene) konzerve oblika valjka, zanemarive debljine stijenki, imaju i promjer i visinu od točno 10 cm. Jedan robot boji prvu (samo izvana) brzinom $1 \text{ cm}^2/\text{s}$, a drugi robot u drugu ulijeva vodu brzinom $1 \text{ ml}/\text{s}$. Oba rade dok konzerva nije do kraja obojena odnosno napunjena. Koji robot će brže biti gotov s poslom?

$$P = r^2\pi + 2r\pi \cdot h = \dots = 125\pi \text{ cm}^2 \Rightarrow t_1 = 125\pi \text{ s.}$$

$$V = r^2\pi \cdot h = \dots = 250\pi \text{ ml} \Rightarrow t_2 = 2t_1.$$

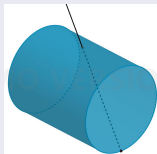
Primjer

Godine 1613., Johannes Kepler se u gradu Linzu ženio po drugi puta. Za svadbu je kupovao bačvu vina, no pri kupnji mu se čudnom učinila metoda kojom je trgovac određivao cijenu vina ...



Primjer

Godine 1613., Johannes Kepler se u gradu Linzu ženio po drugi puta. Za svadbu je kupovao bačvu vina, no pri kupnji mu se čudnom učinila metoda kojom je trgovac određivao cijenu vina ...

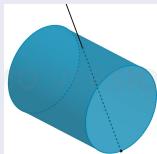


Nadimo dimenzije konkretnih triju različitih bačvi, čiji oblik aproksimiramo valjcima, a koje imaju različite volumene, a da je pritom duljina mokrog dijela štapa točno 1 m.

$$V = r^2 \pi h = \frac{\pi}{4} d^2 h;$$

Primjer

Godine 1613., Johannes Kepler se u gradu Linzu ženio po drugi puta. Za svadbu je kupovao bačvu vina, no pri kupnji mu se čudnom učinila metoda kojom je trgovac određivao cijenu vina ...

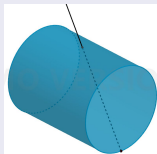


Nadimo dimenzije konkretnih triju različitih bačvi, čiji oblik aproksimiramo valjcima, a koje imaju različite volumene, a da je pritom duljina mokrog dijela štapa točno 1 m.

$$V = r^2 \pi h = \frac{\pi}{4} d^2 h; \quad d^2 = 1 \text{ m}^2 - \left(\frac{h}{2}\right)^2$$

Primjer

Godine 1613., Johannes Kepler se u gradu Linzu ženio po drugi puta. Za svadbu je kupovao bačvu vina, no pri kupnji mu se čudnom učinila metoda kojom je trgovac određivao cijenu vina ...

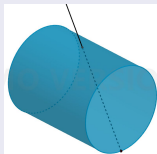


Nadimo dimenzije konkretnih triju različitih bačvi, čiji oblik aproksimiramo valjcima, a koje imaju različite volumene, a da je pritom duljina mokrog dijela štapa točno 1 m.

$$V = r^2 \pi h = \frac{\pi}{4} d^2 h; d^2 = 1 \text{ m}^2 - \left(\frac{h}{2}\right)^2 \Rightarrow V = \frac{\pi}{4} h \left(1 \text{ m}^2 - \frac{h^2}{4}\right)$$

Primjer

Godine 1613., Johannes Kepler se u gradu Linzu ženio po drugi puta. Za svadbu je kupovao bačvu vina, no pri kupnji mu se čudnom učinila metoda kojom je trgovac određivao cijenu vina ...



Nadimo dimenzije konkretnih triju različitih bačvi, čiji oblik aproksimiramo valjcima, a koje imaju različite volumene, a da je pritom duljina mokrog dijela štapa točno 1 m.

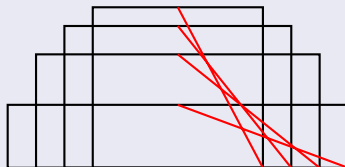
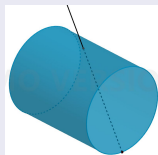
$$V = r^2 \pi h = \frac{\pi}{4} d^2 h; d^2 = 1 \text{ m}^2 - \left(\frac{h}{2}\right)^2 \Rightarrow V = \frac{\pi}{4} h \left(1 \text{ m}^2 - \frac{h^2}{4}\right)$$

$$h_1 = 0,2 \text{ m}, h_2 = 0,4 \text{ m}, h_3 = 0,8 \text{ m} \Rightarrow V_1 = \frac{99\pi}{2000} \text{ m}^3, V_2 = \frac{12\pi}{125} \text{ m}^3,$$

$$V_3 = \frac{21\pi}{125} \text{ m}^3$$

Primjer

Godine 1613., Johannes Kepler se u gradu Linzu ženio po drugi puta. Za svadbu je kupovao bačvu vina, no pri kupnji mu se čudnom učinila metoda kojom je trgovac određivao cijenu vina ...



Nadimo dimenzije konkretnih triju različitih bačvi, čiji oblik aproksimiramo valjcima, a koje imaju različite volumene, a da je pritom duljina mokrog dijela štapa točno 1 m.

$$V = r^2 \pi h = \frac{\pi}{4} d^2 h; d^2 = 1 \text{ m}^2 - \left(\frac{h}{2}\right)^2 \Rightarrow V = \frac{\pi}{4} h \left(1 \text{ m}^2 - \frac{h^2}{4}\right)$$

$$h_1 = 0,2 \text{ m}, h_2 = 0,4 \text{ m}, h_3 = 0,8 \text{ m} \Rightarrow V_1 = \frac{99\pi}{2000} \text{ m}^3, V_2 = \frac{12\pi}{125} \text{ m}^3,$$

$$V_3 = \frac{21\pi}{125} \text{ m}^3 \Rightarrow d_1 = \frac{3\sqrt{11}}{10} \text{ m}, d_2 = \frac{2\sqrt{6}}{5} \text{ m}, d_3 = \frac{\sqrt{21}}{5} \text{ m}.$$

Piramide i stošci

- **Piramida** (n -terostrana) s vrhom A je poliedar omeđen jednim mnogokutom (bazom piramide, pri čemu ravnina baze ne sadrži A) i trokutima kojima su bridovi po jedan brid baze i spojnice A s njegovim krajevima. Visina piramide je duljina spojnice A s probodištem P okomice iz A na bazu.

Piramide i stošci

- Piramida** (n -terostrana) s vrhom A je poliedar omeđen jednim mnogokutom (bazom piramide, pri čemu ravnina baze ne sadrži A) i trokutima kojima su bridovi po jedan brid baze i spojnice A s njegovim krajevima. Visina piramide je duljina spojnice A s probodištem P okomice iz A na bazu. Trostrane piramide nazivaju se **tetraedrima**. **Pravilna piramida** je piramida kojoj je baza pravilni mnogokut kojem P središte.

Piramide i stošci

- Piramida** (n -terostrana) s vrhom A je poliedar omeđen jednim mnogokutom (bazom piramide, pri čemu ravnina baze ne sadrži A) i trokutima kojima su bridovi po jedan brid baze i spojnice A s njegovim krajevima. Visina piramide je duljina spojnice A s probodištem P okomice iz A na bazu. Trostrane piramide nazivaju se **tetraedrima**. **Pravilna piramida** je piramida kojoj je baza pravilni mnogokut kojem P središte.
- Stožac** (kružni) možemo opisati kao piramidu s kružnom bazom, odnosno kao geometrijsko tijelo omeđeno jednim krugom i spojnica (izvodnicama stoča) svih točaka njegove rubne kružnice s točkom izvan ravnine tog kruga (alternativno, kao rotacijsko tijelo koje nastaje rotacijom pravokutnog trokuta oko jedne od njegovih kateta).

Piramide i stošci

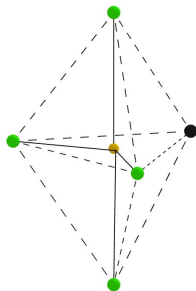
- Piramida** (n -terostrana) s vrhom A je poliedar omeđen jednim mnogokutom (bazom piramide, pri čemu ravnina baze ne sadrži A) i trokutima kojima su bridovi po jedan brid baze i spojnice A s njegovim krajevima. Visina piramide je duljina spojnice A s probodištem P okomice iz A na bazu. Trostrane piramide nazivaju se **tetraedrima**. **Pravilna piramida** je piramida kojoj je baza pravilni mnogokut kojem P središte.
- Stožac** (kružni) možemo opisati kao piramidu s kružnom bazom, odnosno kao geometrijsko tijelo omeđeno jednim krugom i spojnica (izvodnicama stoča) svih točaka njegove rubne kružnice s točkom izvan ravnine tog kruga (alternativno, kao rotacijsko tijelo koje nastaje rotacijom pravokutnog trokuta oko jedne od njegovih kateta).
- Oplošje uspravnog kružnog stošca polumjera baze r i visine h je $P = r \pi (r + \sqrt{h^2 + r^2})$. Volumeni piramida i kružnih stožaca: $V = \frac{1}{3} B h$.

Zadatak

Molekula SF_4 ima geometriju tzv. klackalice. Pretpostavimo statičnu, prosječnu geometriju u kojoj su veze sumpora i fluora u bazi duljine $a = 154,2 \text{ pm}$, a veze atoma sumpora s druga dva atoma fluora duljine $b = 164,3 \text{ pm}$. Izračunajte udaljenosti između svaka dva atoma fluora!

Zadatak

Molekula SF_4 ima geometriju tzv. klackalice. Pretpostavimo statičnu, prosječnu geometriju u kojoj su veze sumpora i flaura u bazi duljine $a = 154,2 \text{ pm}$, a veze atoma sumpora s druga dva atoma fluora duljine $b = 164,3 \text{ pm}$. Izračunajte udaljenosti između svaka dva atoma fluora!



Dva F u bazi: $d_1 = \frac{3}{2}a = 231,3 \text{ pm}$

Jedan F u bazi, jedan ne:

$$d_2 = \sqrt{a^2 + b^2} = 225,3 \text{ pm}$$

Nijedan F u bazi: $d_3 = 2b = 328,6 \text{ pm}$

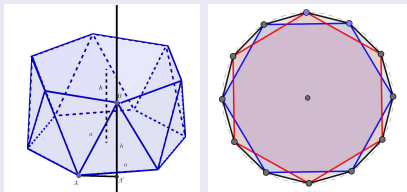
Primjer

Izračunajmo oplošje i visinu pravilne šesterostrane antiprizme kojoj svi bridovi imaju duljinu $a = 2$ cm.

Primjer

Izračunajmo oplošje i visinu pravilne šesterostrane antiprizme kojoj svi bridovi imaju duljinu $a = 2\text{ cm}$.

$$P = 2P_6 + 2 \cdot 6P_3 = 3\sqrt{3}a^2 + 3\sqrt{3}a^2 = 6\sqrt{3}a^2 = 24\sqrt{3}\text{ cm}^2$$

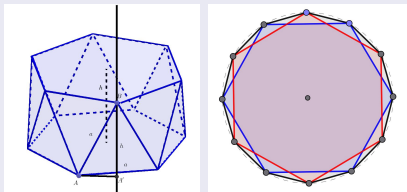


Središte svake od baza je od vrhova te baze kao i do projekcije pojedinog od vrhova druge baze na ravninu njegove baze udaljeno za a .

Primjer

Izračunajmo oplošje i visinu pravilne šesterostrane antiprizme kojoj svi bridovi imaju duljinu $a = 2\text{ cm}$.

$$P = 2P_6 + 2 \cdot 6P_3 = 3\sqrt{3}a^2 + 3\sqrt{3}a^2 = 6\sqrt{3}a^2 = 24\sqrt{3}\text{ cm}^2$$

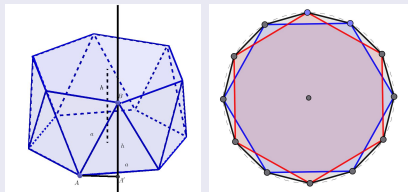


Središte svake od baza je od vrhova te baze kao i do projekcije pojedinog od vrhova druge baze na ravninu njegove baze udaljeno za a . Uzmimo jedan vrh A , jedan vrh B u drugoj bazi koji je s A povezan bridom projekciju A' vrha B na ravninu prve baze.

Primjer

Izračunajmo oplošje i visinu pravilne šesterostrane antiprizme kojoj svi bridovi imaju duljinu $a = 2 \text{ cm}$.

$$P = 2P_6 + 2 \cdot 6P_3 = 3\sqrt{3}a^2 + 3\sqrt{3}a^2 = 6\sqrt{3}a^2 = 24\sqrt{3} \text{ cm}^2$$

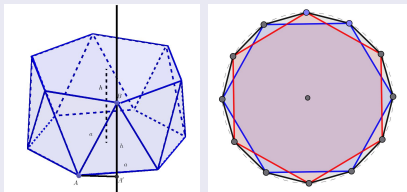


Središte svake od baza je od vrhova te baze kao i do projekcije pojedinog od vrhova druge baze na ravninu njegove baze udaljeno za a . Uzmimo jedan vrh A , jedan vrh B u drugoj bazi koji je s A povezan bridom projekciju A' vrha B na ravninu prve baze. $\triangle AA'B$ je pravokutan, s hipotenuzom duljine a , jednom katetom duljine h i drugom katetom duljine $|AA'| = a\sqrt{1 - \frac{\sqrt{3}}{2}}$,

Primjer

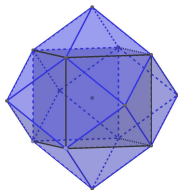
Izračunajmo oplošje i visinu pravilne šesterostrane antiprizme kojoj svi bridovi imaju duljinu $a = 2 \text{ cm}$.

$$P = 2P_6 + 2 \cdot 6P_3 = 3\sqrt{3}a^2 + 3\sqrt{3}a^2 = 6\sqrt{3}a^2 = 24\sqrt{3} \text{ cm}^2$$



Središte svake od baza je od vrhova te baze kao i do projekcije pojedinog od vrhova druge baze na ravninu njegove baze udaljeno za a . Uzmimo jedan vrh A , jedan vrh B u drugoj bazi koji je s A povezan bridom projekciju A' vrha B na ravninu prve baze. $\triangle AA'B$ je pravokutan, s hipotenuzom duljine a , jednom katetom duljine h i drugom katetom duljine $|AA'| = a\sqrt{1 - \frac{\sqrt{3}}{2}}$, pa je prema Pitagorinom poučku $h = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}a$.

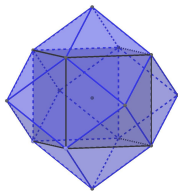
Krenemo od kocke i na svakoj njenoj strani konstruiramo kvadratni piramidu čija visina je točno pola brida kocke. Dokažite da tako stvarno dobijemo rompski dodekaedra, izračunajte kutove u tim rombovima i dokažite da tako dobiveni rompski dodekaedar ima točno dvaput veći volumen od polazne kocke.



Prvo treba odrediti kutove pobočki piramida u odnosu na njihove baze.

Zadatak

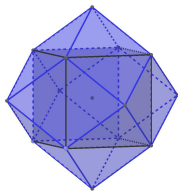
Krenemo od kocke i na svakoj njenoj strani konstruiramo kvadratni piramidu čija visina je točno pola brida kocke. Dokažite da tako stvarno dobijemo rompski dodekaedra, izračunajte kutove u tim rombovima i dokažite da tako dobiveni rompski dodekaedar ima točno dvaput veći volumen od polazne kocke.



Prvo treba odrediti kutove pobočki piramida u odnosu na njihove baze. Ti kutovi iznose 45° .

Zadatak

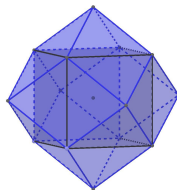
Krenemo od kocke i na svakoj njenoj strani konstruiramo kvadratni piramidu čija visina je točno pola brida kocke. Dokažite da tako stvarno dobijemo rompski dodekaedra, izračunajte kutove u tim rombovima i dokažite da tako dobiveni rompski dodekaedar ima točno dvaput veći volumen od polazne kocke.



Prvo treba odrediti kutove pobočki piramida u odnosu na njihove baze. Ti kutovi iznose 45° . Iz toga slijedi da smo stvarno dobili tijelo omeđeno s 12 rombova volumena dvostrukog u odnosu na kocku.

Zadatak

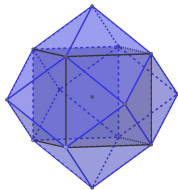
Krenemo od kocke i na svakoj njenoj strani konstruiramo kvadratni piramidu čija visina je točno pola brida kocke. Dokažite da tako stvarno dobijemo rompski dodekaedra, izračunajte kutove u tim rombovima i dokažite da tako dobiveni rompski dodekaedar ima točno dvaput veći volumen od polazne kocke.



Prvo treba odrediti kutove pobočki piramida u odnosu na njihove baze. Ti kutovi iznose 45° . Iz toga slijedi da smo stvarno dobili tijelo omeđeno s 12 rombova volumena dvostrukog u odnosu na kocku. Pogledamo li pola takvog romba, on je jednakokračan trokut.

Zadatak

Krenemo od kocke i na svakoj njenoj strani konstruiramo kvadratni piramidu čija visina je točno pola brida kocke. Dokažite da tako stvarno dobijemo rompski dodekaedra, izračunajte kutove u tim rombovima i dokažite da tako dobiveni rompski dodekaedar ima točno dvaput veći volumen od polazne kocke.



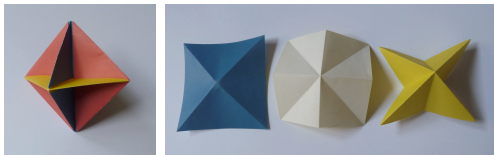
Prvo treba odrediti kutove pobočki piramida u odnosu na njihove baze. Ti kutovi iznose 45° . Iz toga slijedi da smo stvarno dobili tijelo omeđeno s 12 rombova volumena dvostrukog u odnosu na kocku. Pogledamo li pola takvog romba, on je jednakokračan trokut. Dobijemo da su traženi kutovi α takav da mu je kosinus $\frac{1}{3}$ i β takav da mu je tangens $2\sqrt{2}$.

Platonova tijela 🎓

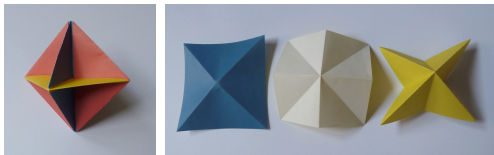
Platonova tijela (pravilni poliedri) su poliedri kojima su sve strane međusobno sukladni pravilni mnogokuti pri čemu se u svakom vrhu sastaje isti broj strana. Postoji pet Platonovih tijela: **p**ravilni tetraedar (omeđen s četiri pravilna, tj. jednakostranična trokuta), kocka (pravilni heksaedar), pravilni oktaedar (omeđen s osam jednakostraničnih trokuta), pravilni dodekaedar (omeđen s 12 pravilnih peterokuta) i pravilni ikozaedar (omeđen s 20 jednakostraničnih trokuta).



Skeletalni oktaedar je model pravilnog oktaedra koji se sastoji od njegovih triju kvadratnih presjeka. Nije ga teško izraditi tehnikom modularnog origamija. Ako znate da ste krenuli od listova papira s rubovima duljine $a = 15$ cm, izračunajte duljine spojnica središta s vrhovima oktaedra, te oplošje i volumen odgovarajućeg „punog“ oktaedra.



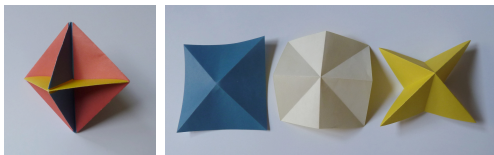
Skeletalni oktaedar je model pravilnog oktaedra koji se sastoji od njegovih triju kvadratnih presjeka. Nije ga teško izraditi tehnikom modularnog origamija. Ako znate da ste krenuli od listova papira s rubovima duljine $a = 15$ cm, izračunajte duljine spojnica središta s vrhovima oktaedra, te oplošje i volumen odgovarajućeg „punog“ oktaedra.



Duljine spojnice središta s vrhovima su $\frac{a}{2}$,

Zadatak

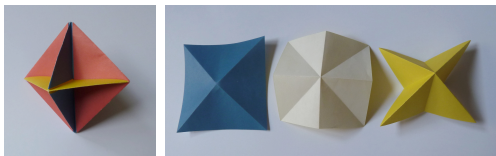
Skeletalni oktaedar je model pravilnog oktaedra koji se sastoji od njegovih triju kvadratnih presjeka. Nije ga teško izraditi tehnikom modularnog origamija. Ako znate da ste krenuli od listova papira s rubovima duljine $a = 15$ cm, izračunajte duljine spojnica središta s vrhovima oktaedra, te oplošje i volumen odgovarajućeg „punog“ oktaedra.



Duljine spojnica središta s vrhovima su $\frac{a}{2}$, oplošje odgovarajućeg punog oktaedra je $P = 6 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} \left(\frac{a}{\sqrt{2}} \right)^2 \approx 292,3 \text{ cm}^2$,

Zadatak

Skeletalni oktaedar je model pravilnog oktaedra koji se sastoji od njegovih triju kvadratnih presjeka. Nije ga teško izraditi tehnikom modularnog origamija. Ako znate da ste krenuli od listova papira s rubovima duljine $a = 15$ cm, izračunajte duljine spojnica središta s vrhovima oktaedra, te oplošje i volumen odgovarajućeg „punog“ oktaedra.



Duljine spojnica središta s vrhovima su $\frac{a}{2}$, oplošje odgovarajućeg punog oktaedra je $P = 6 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} \left(\frac{a}{\sqrt{2}} \right)^2 \approx 292,3 \text{ cm}^2$, a volumen je $V = 2 \cdot \left(\frac{a}{\sqrt{2}} \right)^2 \cdot \frac{a}{2} = 1687,5 \text{ ml}$.

Primjer

Dijamant kristalizira u kubičnom sustavu te se jedinična ćelija dijamanta može odabrati kao kocka brida $a = 3,567 \text{ \AA}$. Pritom se radi o tzv. plošno centriranoj jediničnoj ćeliji (FCC), što znači da možemo odabrati ćeliju tako da su jezgre osam atoma ugljika u njezinim vrhovima i još šest po jedan u središtu svake strane. Dodatno, još četiri atoma ugljika se nalaze u četiri od središta osam pravilnih tetraedara koji su određeni s po jednim vrhom kocke i tri susjedna središta strana (dokažite da se stvarno radi o pravilnim tetraedrima), pri čemu su ta tri atoma raspoređeni kao vrhovi jednakostraničnog trokuta. Izračunajte sve udaljenosti po dva najbliža ugljikova atoma u strukturi dijamanta te visinu šesterokutnog prstena kojeg čine tri unutrašnja atoma s tri atoma u središtima strana, tj. razmak ravnina u kojima su prva tri odnosno druga tri atoma.