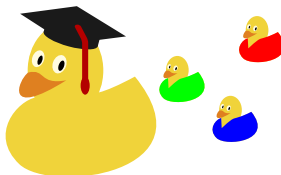


1. predavanje: O kolegiju. Realni brojevi i mjerne jedinice. Pravokutni koordinatni sustav.

Franka Miriam Brückler



Uvod u kolegij

Moje ime je

Franka Miriam Brückler.

Asistent će Vam biti

Luka Cigler.

Sve bitne informacije o kolegiju, nastavni materijali i obavijesti nalaze se na web-stranici

[https:](https://www.pmf.unizg.hr/chem/studenti/matematika_1_i_2)

[//www.pmf.unizg.hr/chem/studenti/matematika_1_i_2](https://www.pmf.unizg.hr/chem/studenti/matematika_1_i_2)

Kao dodatna, opcionalna podrška nastavi postoji i Facebook-grupa

Matematika 1 & 2 za kemičare.

Sva pitanja vezana za predavanja ili pak općenito o kolegiju upućujete meni, isključivo na mail-adresu

fmbkemija@gmail.com

Uvjeti za ispunjenje studijskih obveza

- U skladu s Pravilnikom o studiranju na prijediplomskim, diplomskim i integriranim prijediplomskim i diplomskim studijima Prirodoslovno-matematičkog fakulteta Sveučilišta u Zagrebu (https://www.pmf.unizg.hr/dokumenti/opci_akti), počevši od ak.g. 2024./25. pohađanje nastave provjeravati će se kratkim, otprilike tjednim, online-testovima. Ako student(ica) koji pristupi na manje od 10 testova, osim ako unutar razumnog roka dostavi prikladnu dokumentaciju o opravdanosti izostanak u doba gradiva koje se na testu/ovima koje je propustio/la testira, nije ispunio/la svoje studijske obveze te neće u tekućoj akademskoj godini moći pristupiti ispitima, nego kolegij upisuje ponovno dogodne.

Uvjeti za ispunjenje studijskih obveza

- U skladu s Pravilnikom o studiranju na prijediplomskim, diplomskim i integriranim prijediplomskim i diplomskim studijima Prirodoslovno-matematičkog fakulteta Sveučilišta u Zagrebu (https://www.pmf.unizg.hr/dokumenti/opci_akti), počevši od ak.g. 2024./25. pohađanje nastave provjeravati će se kratkim, otprilike tjednim, online-testovima. Ako student(ica) koji pristupi na manje od 10 testova, osim ako unutar razumnog roka dostavi prikladnu dokumentaciju o opravdanosti izostanak u doba gradiva koje se na testu/ovima koje je propustio/la testira, nije ispunio/la svoje studijske obveze te neće u tekućoj akademskoj godini moći pristupiti ispitima, nego kolegij upisuje ponovno dogodne.
- Kvalifikacijski zadatak.

Elementi ocjenjivanja

- 3-4 kratka testa po 5 bodova — neobvezni, bez najave na predavanjima, nose bonus-bodove za prvi pristup pismenom ispitu (50 %)
- 4 domaće zadaće po 10 bodova — neobvezne, uz najavu, zadaje asistent i priprema su za pismeni ispit, nose bonus-bodove za prvi pristup pismenom ispitu (50 %)

Elementi ocjenjivanja

- 3-4 kratka testa po 5 bodova — neobvezni, bez najave na predavanjima, nose bonus-bodove za prvi pristup pismenom ispitu (50 %)
- 4 domaće zadaće po 10 bodova — neobvezne, uz najavu, zadaje asistent i priprema su za pismeni ispit, nose bonus-bodove za prvi pristup pismenom ispitu (50 %)
- Pismeni ispit — polaže se na datume ispitnih rokova, nosi 100 bodova (80 bodova s gradivom vježbi, a 20 s primjenom gradiva s predavanja), uvjet za prolaz je 45 bodova
- Usmeni ispit — samo ako prođete pismeni ispit, u pravilu unutar 5 radnih dana od termina ispitnog roka

Elementi ocjenjivanja

- 3-4 kratka testa po 5 bodova — neobvezni, bez najave na predavanjima, nose bonus-bodove za prvi pristup pismenom ispitu (50 %)
- 4 domaće zadaće po 10 bodova — neobvezne, uz najavu, zadaje asistent i priprema su za pismeni ispit, nose bonus-bodove za prvi pristup pismenom ispitu (50 %)
- Pismeni ispit — polaže se na datume ispitnih rokova, nosi 100 bodova (80 bodova s gradivom vježbi, a 20 s primjenom gradiva s predavanja), uvjet za prolaz je 45 bodova
- Usmeni ispit — samo ako prođete pismeni ispit, u pravilu unutar 5 radnih dana od termina ispitnog roka

Važno! Prezentacije *nisu* dovoljne za pripremu ispita iz

Matematike 1. 

Brojevi, jedinice, konstante, varijable

- Iznosi mjerljivih, skalarnih fizikalnih veličina su umnošci (realnih) brojeva i mjernih jedinica, npr. $1 \text{ sat} = 1 \cdot \text{h}$

Brojevi, jedinice, konstante, varijable

- Iznosi mjerljivih, skalarnih fizikalnih veličina su umnošci (realnih) brojeva i mjernih jedinica, npr. $1 \text{ sat} = 1 \cdot \text{h}$
- Ponekad se pojavljuju i „čisti” brojevi, poput logaritama nekih veličina, no ako se dogovorimo da je njima jedinica jednaka 1, onda i njih možemo shvatiti kao umnožak broja i jedinice.

Brojevi, jedinice, konstante, varijable

- Iznosi mjerljivih, skalarnih fizikalnih veličina su umnošci (realnih) brojeva i mjernih jedinica, npr. $1 \text{ sat} = 1 \cdot \text{h}$
- Ponekad se pojavljuju i „čisti” brojevi, poput logaritama nekih veličina, no ako se dogovorimo da je njima jedinica jednaka 1, onda i njih možemo shvatiti kao umnožak broja i jedinice.
- Razlika između varijable i konstante ovisi o kontekstu.

Brojevi, jedinice, konstante, varijable

- Iznosi mjerljivih, skalarnih fizikalnih veličina su umnošci (realnih) brojeva i mjernih jedinica, npr. $1 \text{ sat} = 1 \cdot \text{h}$
- Ponekad se pojavljuju i „čisti” brojevi, poput logaritama nekih veličina, no ako se dogovorimo da je njima jedinica jednaka 1, onda i njih možemo shvatiti kao umnožak broja i jedinice.
- Razlika između varijable i konstante ovisi o kontekstu.
- Dvije varijable (ili konstante) ne mogu biti jednake ako se ne podudaraju u fizikalnoj dimenziji (ako se ne mogu izraziti u istoj jedinici).

Brojevi, jedinice, konstante, varijable

- Iznosi mjerljivih, skalarnih fizikalnih veličina su umnošci (realnih) brojeva i mjernih jedinica, npr. $1 \text{ sat} = 1 \cdot \text{h}$
- Ponekad se pojavljuju i „čisti” brojevi, poput logaritama nekih veličina, no ako se dogovorimo da je njima jedinica jednaka 1, onda i njih možemo shvatiti kao umnožak broja i jedinice.
- Razlika između varijable i konstante ovisi o kontekstu.
- Dvije varijable (ili konstante) ne mogu biti jednake ako se ne podudaraju u fizikalnoj dimenziji (ako se ne mogu izraziti u istoj jedinici).
- Osnovne podjele varijabli: nezavisne vs. zavisne, diskretne vs. kontinuirane

Skupovi brojeva: $\mathbb{N} \subset \mathbb{N}_0 \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ 

Zadatak. Odaberite točan odgovor:

① $8 - 2 \cdot 3 =$ (a) 18; (b) 2.

Skupovi brojeva: $\mathbb{N} \subset \mathbb{N}_0 \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ 

Zadatak. Odaberite točan odgovor:

- ① $8 - 2 \cdot 3 =$ (a) 18; (b) 2.
- ② $36 + 18/9 - 7 =$ (a) -1 ; (b) 27; (c) 31; (d) 45.

Skupovi brojeva: $\mathbb{N} \subset \mathbb{N}_0 \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$

Zadatak. Odaberite točan odgovor:

- ① $8 - 2 \cdot 3 =$ (a) 18; (b) 2.
- ② $36 + 18/9 - 7 =$ (a) -1 ; (b) 27; (c) 31; (d) 45.
- ③ $2^{-x} =$ (a) -2^x ; (b) $2^{-1} \cdot 2^x$; (c) $0,5^x$; (d) $1/2^x$.

Skupovi brojeva: $\mathbb{N} \subset \mathbb{N}_0 \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$

Zadatak. Odaberite točan odgovor:

- ① $8 - 2 \cdot 3 =$ (a) 18; (b) 2.
- ② $36 + 18/9 - 7 =$ (a) -1 ; (b) 27; (c) 31; (d) 45.
- ③ $2^{-x} =$ (a) -2^x ; (b) $2^{-1} \cdot 2^x$; (c) $0,5^x$; (d) $1/2^x$.
- ④ $-2^2 =$ (a) 4; (b) -4 .

Skupovi brojeva: $\mathbb{N} \subset \mathbb{N}_0 \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$

Zadatak. Odaberite točan odgovor:

- ① $8 - 2 \cdot 3 =$ (a) 18; (b) 2.
- ② $36 + 18/9 - 7 =$ (a) -1 ; (b) 27; (c) 31; (d) 45.
- ③ $2^{-x} =$ (a) -2^x ; (b) $2^{-1} \cdot 2^x$; (c) $0,5^x$; (d) $1/2^x$.
- ④ $-2^2 =$ (a) 4; (b) -4 .
- ⑤ $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} =$ (a) 1; (b) $x^2 + y^2/xy$; (c) $(x^2 + y^2)/xy$; (d) $(x^2 + y^2)/(xy)$.

Skupovi brojeva: $\mathbb{N} \subset \mathbb{N}_0 \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$

Zadatak. Odaberite točan odgovor:

- ① $8 - 2 \cdot 3 =$ (a) 18; (b) 2.
- ② $36 + 18/9 - 7 =$ (a) -1 ; (b) 27; (c) 31; (d) 45.
- ③ $2^{-x} =$ (a) -2^x ; (b) $2^{-1} \cdot 2^x$; (c) $0,5^x$; (d) $1/2^x$.
- ④ $-2^2 =$ (a) 4; (b) -4 .
- ⑤ $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} =$ (a) 1; (b) $x^2 + y^2/xy$; (c) $(x^2 + y^2)/xy$; (d) $(x^2 + y^2)/(xy)$.
- ⑥ $1 + Bx + \frac{1}{4}B^2x^2 =$ (a) $(1 + B + B^2)(1 + \frac{x^2}{4})$; (b) $(Bx/2 + 1)^2$; (c) $(Bx + 1)^2/2$.

Skupovi brojeva: $\mathbb{N} \subset \mathbb{N}_0 \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$

Zadatak. Odaberite točan odgovor:

- ❶ $8 - 2 \cdot 3 =$ (a) 18; (b) 2.
- ❷ $36 + 18/9 - 7 =$ (a) -1 ; (b) 27; (c) 31; (d) 45.
- ❸ $2^{-x} =$ (a) -2^x ; (b) $2^{-1} \cdot 2^x$; (c) $0,5^x$; (d) $1/2^x$.
- ❹ $-2^2 =$ (a) 4; (b) -4 .
- ❺ $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} =$ (a) 1; (b) $x^2 + y^2/xy$; (c) $(x^2 + y^2)/xy$; (d) $(x^2 + y^2)/(xy)$.
- ❻ $1 + Bx + \frac{1}{4}B^2x^2 =$ (a) $(1 + B + B^2)(1 + \frac{x^2}{4})$; (b) $(Bx/2 + 1)^2$; (c) $(Bx + 1)^2/2$.
- ❼ $\sqrt[3]{27 + 64 + 125} =$ (a) 6; (b) 12.

Skupovi brojeva: $\mathbb{N} \subset \mathbb{N}_0 \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$

Zadatak. Odaberite točan odgovor:

- ❶ $8 - 2 \cdot 3 =$ (a) 18; (b) 2.
- ❷ $36 + 18/9 - 7 =$ (a) -1 ; (b) 27; (c) 31; (d) 45.
- ❸ $2^{-x} =$ (a) -2^x ; (b) $2^{-1} \cdot 2^x$; (c) $0,5^x$; (d) $1/2^x$.
- ❹ $-2^2 =$ (a) 4; (b) -4 .
- ❺ $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} =$ (a) 1; (b) $x^2 + y^2/xy$; (c) $(x^2 + y^2)/xy$; (d) $(x^2 + y^2)/(xy)$.
- ❻ $1 + Bx + \frac{1}{4}B^2x^2 =$ (a) $(1 + B + B^2)(1 + \frac{x^2}{4})$; (b) $(Bx/2 + 1)^2$; (c) $(Bx + 1)^2/2$.
- ❼ $\sqrt[3]{27 + 64 + 125} =$ (a) 6; (b) 12.
- ❽ $-4^{-3^{-2^{-1}}} =$ (a) nema smisla; (b) $-\frac{1}{4096}$; (c) $\frac{1}{4096}$; (d) $-\frac{1}{4^{1/\sqrt{3}}}$.

Decimalni zapis broja

Brojevi se zapisuju brojkama, a u nas je uobičajeno koristiti brojke decimalnog pozicijskog sustava:

$$2,14 = 2 + 1 \cdot \frac{1}{10} + 4 \cdot \frac{1}{100} = 2 \cdot 10^0 + 1 \cdot 10^{-1} + 4 \cdot 10^{-2}.$$

Decimalni zapis broja

Brojevi se zapisuju brojkama, a u nas je uobičajeno koristiti brojke decimalnog pozicijskog sustava:

$$2,14 = 2 + 1 \cdot \frac{1}{10} + 4 \cdot \frac{1}{100} = 2 \cdot 10^0 + 1 \cdot 10^{-1} + 4 \cdot 10^{-2}.$$

Neki realni brojevi, poput $\frac{1}{16}$, imaju konačan decimalni zapis (0,0625) te je on potpuno egzaktn.

Decimalni zapis broja

Brojevi se zapisuju brojkama, a u nas je uobičajeno koristiti brojke decimalnog pozicijskog sustava:

$$2,14 = 2 + 1 \cdot \frac{1}{10} + 4 \cdot \frac{1}{100} = 2 \cdot 10^0 + 1 \cdot 10^{-1} + 4 \cdot 10^{-2}.$$

Neki realni brojevi, poput $\frac{1}{16}$, imaju konačan decimalni zapis (0,0625) te je on potpuno egzaktni. Drugi brojevi, poput $\frac{1}{3}$ ili $\sqrt{2}$, nemaju konačan decimalan zapis te svaki njihov zapis s konačno mnogo znamenki nužno sadrži i grešku zaokruživanja: $\frac{1}{3} \neq 0,3333$, $\sqrt{2} \neq 1,41$. Greška u takvom zapisu je reda veličine 10^{-m-1} (odgovarajuće mjerne jedinice) gdje je m broj znamenki iza decimalnog zareza u odabranoj aproksimaciji. Tako je greška zapisa $\frac{1}{3}$ mm kao 0,3333 mm reda veličine 10^{-5} mm, a greška zapisa $\sqrt{2}$ m s⁻¹ kao 1,41 m s⁻¹ je reda veličine 10^{-3} m s⁻¹.

Zadatak. Je li broj $2,52525252\dots$ racionalan ili nije? Ako jest, kojem je razlomku jednak?

Zadatak. Je li broj $2,52525252\dots$ racionalan ili nije? Ako jest, kojem je razlomku jednak?

$$x = 2,52525252\dots \Rightarrow 100x = 252,52525252\dots = 250 + x \Rightarrow x = \frac{250}{99}$$

Zadatak. Je li broj $2,52525252\dots$ racionalan ili nije? Ako jest, kojem je razlomku jednak?

$$x = 2,52525252\dots \Rightarrow 100x = 252,52525252\dots = 250 + x \Rightarrow x = \frac{250}{99}$$

Zaokruživanje brojeva se može provoditi na više načina. Standardni način je sljedeći: ako želimo odbaciti nekoliko zadnjih znamenki i one počinju s 5,6,7,8 ili 9, zaokružujemo na gore (zadnja znamenka ispred njih se pri odbacivanju poveća za 1: 3,7898 na tri decimale zaokruženo je 3,790), a ako počinju s drugim znamenkama nadolje. Ako pak odbacujemo niz znamenaka 500...0, ponekad se koristi sljedeće pravilo: parna znamenka ispred se ne mijenja, neparna ide nagore (7,85 na 7,8, a 7,15 na 7,2).

Znanstvena notacija

Kako bi se izbjegle nedoumice, pogotovu oko značajnih znamenki, uobičajeno je koristiti **znanstvenu notaciju**:

$$x = m \cdot 10^n$$

gdje je broj $m \in [1, 10)$ tzv. mantisa (zapisana sa svim značajnim znamenkama), a $n \in \mathbb{Z}$ je eksponent. Broj značajnih znamenki broja x jednak je broju značajnih znamenki mantise. Zahtjev da mantisa bude broj između 1 i 10 čini takav zapis jedinstvenim.

Primjer

Naboj elektrona zaokružen na šest značajnih znamenki iznosi 0,000000000000000000160217 C, što je

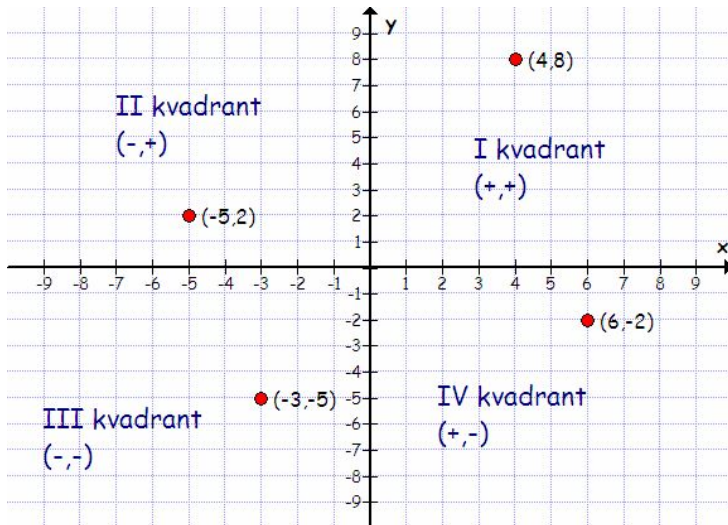
$$e = 1,60217 \cdot 10^{-19} \text{ C.}$$

Brojevni pravac

- realni brojevi mogu se poistovjetiti s točkama pravca, uz uvjet da su na pravcu odabrane točke koje predstavljaju brojeve 0 i 1 (ili neki drugi par različitih brojeva kojim je određena duljina koja odgovara broju 1)
- ako želimo nanositi brojeve u rasponu od a do b u pravilu brojevni pravac crtamo tako da je broj a pri njegovom lijevom kraju, a broj b pri desnom;
- neutralna oznaka za realne brojeve: x (ili y)
- ako su naši brojevi vrijednosti neke fizikalne veličine, primjerice koncentracije c mjerene u mol/L, onda je ta veličina podijeljena s odabranom jedinicom realni broj i imamo poistovjećenje (koje koristimo pri oznaci osi):

$$x = \frac{\text{fizikalna vel.}}{\text{jed.}}$$

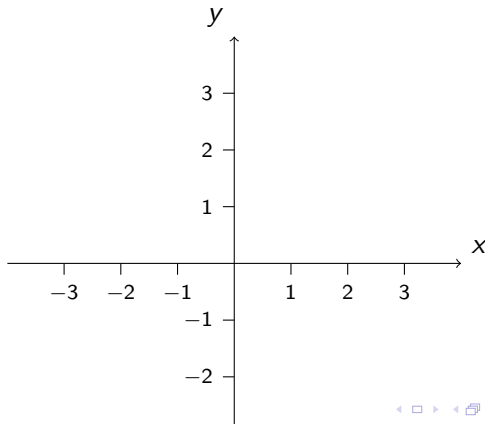
Kartezijski/pravokutni koordinatni sustav



Planiranje prostora

Primjer

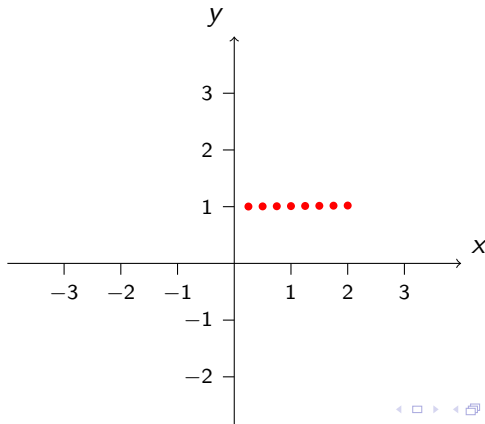
Za iznose x redom $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$, $\dots$, 2 ucrtajte parove (x, y) , gdje je $y = \frac{100+x}{100}$, u pravokutni koordinatni sustav.

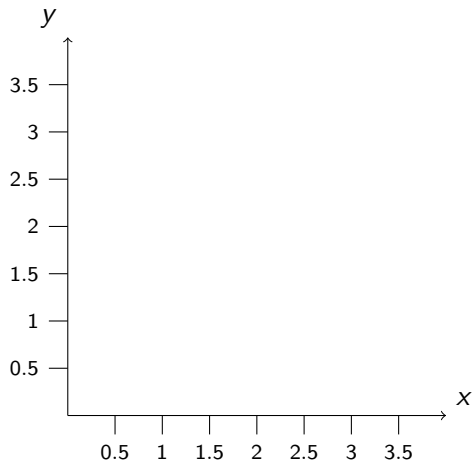


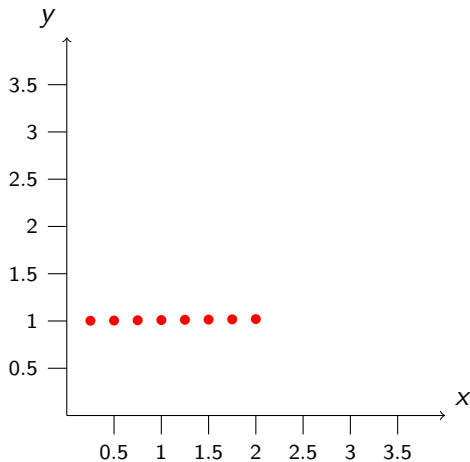
Planiranje prostora

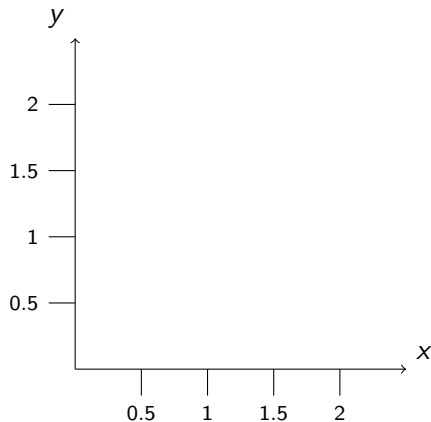
Primjer

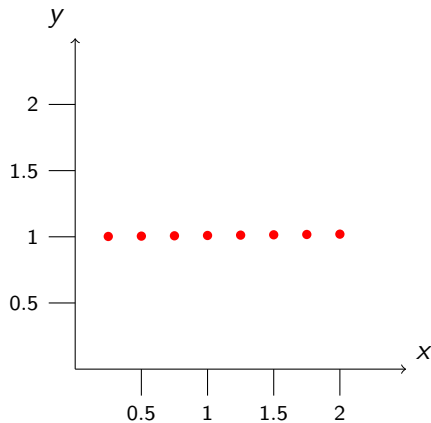
Za iznose x redom $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$, $\dots$, 2 ucrtajte parove (x, y) , gdje je $y = \frac{100+x}{100}$, u pravokutni koordinatni sustav.

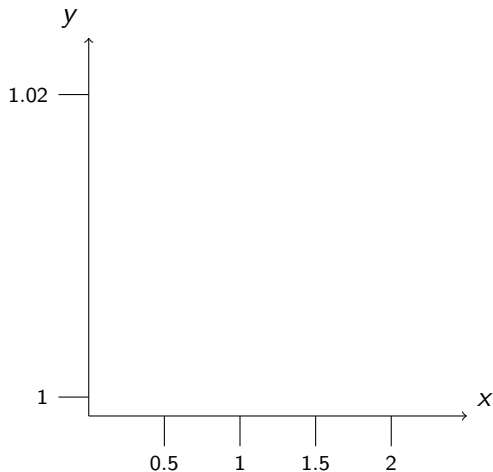


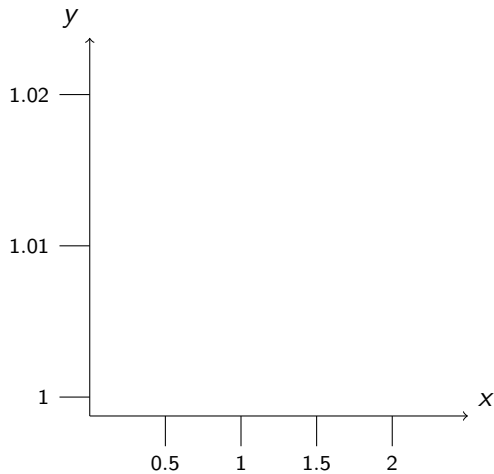


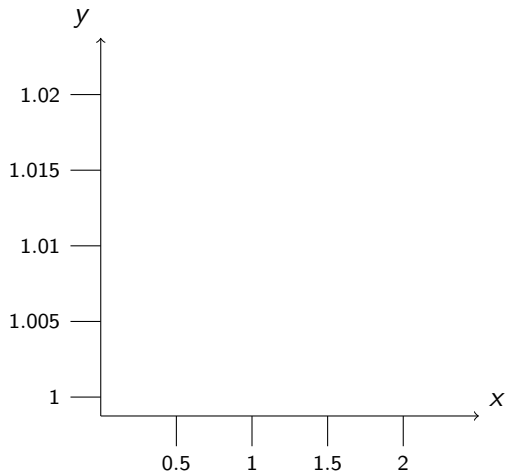


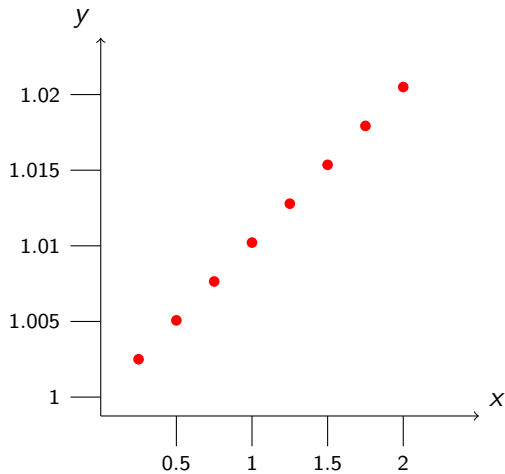




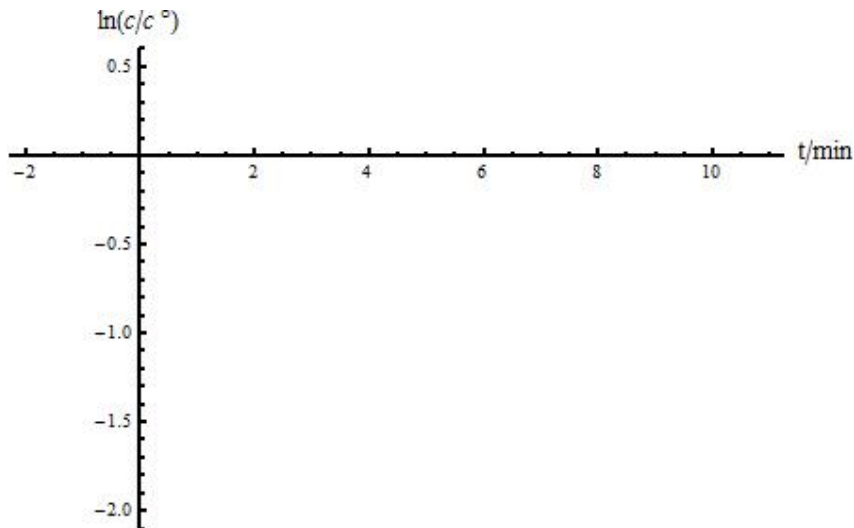








U praksi ...



Zadatak

Zadatak

Pri nekom eksperimentu dobivene su sljedeće vrijednosti tlaka para etanola pri različitim temperaturama:

$t/^{\circ}\text{C}$	p/torr
25	55,900
30	70,000
35	93,800
40	117,50
45	154,10
50	190,70
55	241,90
60	304,15
65	377,90

Skicirajte podatke u pravokutnom koordinatnom sustavu tako da na apscisi budu temperature u kelvinima, a na ordinati tlak u torrima.

Provjerimo znanje!

- Prikladno postavite koordinatni sustav u zadani okvir tako da što bolje ispunite prostor, ako je raspon nezavisne varijable x od -5 do 1 , a zavisne y od 100 do 200 .

Provjerimo znanje!

- Prikladno postavite koordinatni sustav u zadani okvir tako da što bolje ispunite prostor, ako je raspon nezavisne varijable x od -5 do 1 , a zavisne y od 100 do 200 .
- Kojeg reda je greška zaokruživanja broja π na vrijednost $3,14$? Kojeg reda veličine je greška koju ćete napraviti ako koristite tu aproksimaciju za računanje opsega Zemlje, kojoj je prosječni polumjer iznosa 6371 km?

Provjerimo znanje!



- Prikladno postavite koordinatni sustav u zadani okvir tako da što bolje ispunite prostor, ako je raspon nezavisne varijable x od -5 do 1 , a zavisne y od 100 do 200 .
- Kojeg reda je greška zaokruživanja broja π na vrijednost $3,14$? Kojeg reda veličine je greška koju ćete napraviti ako koristite tu aproksimaciju za računanje opsega Zemlje, kojoj je prosječni polumjer iznosa 6371 km?
- Zašto je u slučaju računa $a \cdot b = 0,33$ korektan rezultat ako je $a = 0,222$ i $b = 1,5$, ali nije ako je $a = \frac{2}{9}$ i $b = \frac{3}{2}$?

Provjerimo znanje!



- Prikladno postavite koordinatni sustav u zadani okvir tako da što bolje ispunite prostor, ako je raspon nezavisne varijable x od -5 do 1 , a zavisne y od 100 do 200 .
- Kojeg reda je greška zaokruživanja broja π na vrijednost $3,14$? Kojeg reda veličine je greška koju ćete napraviti ako koristite tu aproksimaciju za računanje opsega Zemlje, kojoj je prosječni polumjer iznosa 6371 km?
- Zašto je u slučaju računa $a \cdot b = 0,33$ korektan rezultat ako je $a = 0,222$ i $b = 1,5$, ali nije ako je $a = \frac{2}{9}$ i $b = \frac{3}{2}$?

Za sljedeće predavanje očekuje se da su svi pročitali odjeljak 2.1. Pojam funkcije i grafa funkcije. Na predavanju se neće prolaziti to gradivo, već će se kroz primjere diskutirati o istome.