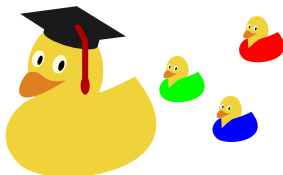


2. predavanje: Realne funkcije jedne varijable, njihova svojstva i grafovi.

Franka Miriam Brückler



Pojam funkcije

Na tržnici kod Vaše omiljene kumice kilogram paprike babure košta 3 €.

Pojam funkcije

Na tržnici kod Vaše omiljene kumice kilogram paprike babure košta 3 €.

Što je razumni odabir nezavisne varijable?

Pojam funkcije

Na tržnici kod Vaše omiljene kumice kilogram paprike babure košta 3 €.

Što je razumni odabir nezavisne varijable? Masa m kupljenih babura.

Što je razumni odabir zavisne varijable?

Pojam funkcije

Na tržnici kod Vaše omiljene kumice kilogram paprike babure košta 3 €.

Što je razumni odabir nezavisne varijable? Masa m kupljenih babura.

Što je razumni odabir zavisne varijable? Cijena C koja odgovara kupljenoj masi m babura.

Pojam funkcije

Na tržnici kod Vaše omiljene kumice kilogram paprike babure košta 3 €.

Što je razumni odabir nezavisne varijable? Masa m kupljenih babura.

Što je razumni odabir zavisne varijable? Cijena C koja odgovara kupljenoj masi m babura.

Kojim se pravilom ovdje iz nezavisne varijable dobije odgovarajuća zavisna varijabla?

Pojam funkcije

Na tržnici kod Vaše omiljene kumice kilogram paprike babure košta 3 €.

Što je razumni odabir nezavisne varijable? Masa m kupljenih babura.

Što je razumni odabir zavisne varijable? Cijena C koja odgovara kupljenoj masi m babura.

Kojim se pravilom ovdje iz nezavisne varijable dobije odgovarajuća zavisna varijabla? $C = 2m$. Ne!

Pojam funkcije

Na tržnici kod Vaše omiljene kumice kilogram paprike babure košta 3 €.

Što je razumni odabir nezavisne varijable? Masa m kupljenih babura.

Što je razumni odabir zavisne varijable? Cijena C koja odgovara kupljenoj masi m babura.

Kojim se pravilom ovdje iz nezavisne varijable dobije odgovarajuća zavisna varijabla? $C = 2m$. Ne!

$$C = 2 \frac{\text{€}}{\text{kg}} m.$$

Jesmo li tako definirali funkciju $C = C(m)$?

Pojam funkcije

Na tržnici kod Vaše omiljene kumice kilogram paprike babure košta 3 €.

Što je razumni odabir nezavisne varijable? Masa m kupljenih babura.

Što je razumni odabir zavisne varijable? Cijena C koja odgovara kupljenoj masi m babura.

Kojim se pravilom ovdje iz nezavisne varijable dobije odgovarajuća zavisna varijabla? $C = 2m$. Ne!

$$C = 2 \frac{\text{€}}{\text{kg}} m.$$

Jesmo li tako definirali funkciju $C = C(m)$? Još ne! Nedostaje

Pojam funkcije

Na tržnici kod Vaše omiljene kumice kilogram paprike babure košta 3 €.

Što je razumni odabir nezavisne varijable? Masa m kupljenih babura.

Što je razumni odabir zavisne varijable? Cijena C koja odgovara kupljenoj masi m babura.

Kojim se pravilom ovdje iz nezavisne varijable dobije odgovarajuća zavisna varijabla? $C = 2m$. Ne!

$$C = 2 \frac{\text{€}}{\text{kg}} m.$$

Jesmo li tako definirali funkciju $C = C(m)$? Još ne! Nedostaje specifikacija domene i kodomene! Prikladni odabir domene je

Pojam funkcije

Na tržnici kod Vaše omiljene kumice kilogram paprike babure košta 3 €.

Što je razumni odabir nezavisne varijable? Masa m kupljenih babura.

Što je razumni odabir zavisne varijable? Cijena C koja odgovara kupljenoj masi m babura.

Kojim se pravilom ovdje iz nezavisne varijable dobije odgovarajuća zavisna varijabla? $C = 2m$. Ne!

$$C = 2 \frac{\text{€}}{\text{kg}} m.$$

Jesmo li tako definirali funkciju $C = C(m)$? Još ne! Nedostaje specifikacija domene i kodomene! Prikladni odabir domene je npr. skup svih iznosa masa (u kg) od 0 do mase M s koliko paprika raspolaže Vaša prodavačica.

Pojam funkcije

Na tržnici kod Vaše omiljene kumice kilogram paprike babure košta 3 €.

Što je razumni odabir nezavisne varijable? Masa m kupljenih babura.

Što je razumni odabir zavisne varijable? Cijena C koja odgovara kupljenoj masi m babura.

Kojim se pravilom ovdje iz nezavisne varijable dobije odgovarajuća zavisna varijabla? $C = 2m$. Ne!

$$C = 2 \frac{\text{€}}{\text{kg}} m.$$

Jesmo li tako definirali funkciju $C = C(m)$? Još ne! Nedostaje specifikacija domene i kodomene! Prikladni odabir domene je npr. skup svih iznosa masa (u kg) od 0 do mase M s koliko paprika raspolaže Vaša prodavačica. Prikladni odabir kodomene je

Pojam funkcije

Na tržnici kod Vaše omiljene kumice kilogram paprike babure košta 3 €.

Što je razumni odabir nezavisne varijable? Masa m kupljenih babura.

Što je razumni odabir zavisne varijable? Cijena C koja odgovara kupljenoj masi m babura.

Kojim se pravilom ovdje iz nezavisne varijable dobije odgovarajuća zavisna varijabla? $C = 2m$. Ne!

$$C = 2 \frac{\text{€}}{\text{kg}} m.$$

Jesmo li tako definirali funkciju $C = C(m)$? Još ne! Nedostaje specifikacija domene i kodomene! Prikladni odabir domene je npr. skup svih iznosa masa (u kg) od 0 do mase M s koliko paprika raspolaže Vaša prodavačica. Prikladni odabir kodomene je npr. skup svih cijena od 0 do $2 \frac{\text{€}}{\text{kg}} M$.

Mogu li jednoj masi babura odgovarati dvije cijene?

Mogu li jednoj masi babura odgovarati dvije cijene? Ne. Postoji li neka masa babura koju prodavačica ima, a da joj se ne može odrediti cijena?

Mogu li jednoj masi babura odgovarati dvije cijene? Ne. Postoji li neka masa babura koju prodavačica ima, a da joj se ne može odrediti cijena? Ne. Svakom elementu domene (nezavisnoj varijabli) pridružen je ni manje ni više nego jedan element kodoment (zavisna varijabla).

Mogu li jednoj masi babura odgovarati dvije cijene? Ne. Postoji li neka masa babura koju prodavačica ima, a da joj se ne može odrediti cijena? Ne. Svakom elementu domene (nezavisnoj varijabli) pridružen je ni manje ni više nego jedan element kodoment (zavisna varijabla).

Definicija

***Funkcija** $f : D \rightarrow K$ je jednoznačno pridruživanje elemenata $y = f(x)$ jednog skupa (**kodomene** K) elementima x drugog skupa (**domene** D).*

*Elementi domene nazivaju se **nezavisnim varijablama** — domena je skup svih mogućih iznosa nezavisnih varijabli.*

*Elementi domene nazivaju se **zavisnim varijablama** — kodomena mora sadržavati skup svih mogućih iznosa zavisnih varijabli.*

Realne funkcije jedne varijable

Što znači **realna funkcija**?

Realne funkcije jedne varijable

Što znači **realna funkcija**? A **jedne realne varijable**?

Realne funkcije jedne varijable

Što znači **realna funkcija**? A **jedne realne varijable**?

Definicija

Realne funkcije jedne varijable i kao nezavisnu i kao zavisnu varijablu imaju realne brojeve.

Jesmo li u primjeru s baburama dobili realnu funkciju jedne varijable?

Realne funkcije jedne varijable

Što znači **realna funkcija**? A **jedne realne varijable**?

Definicija

Realne funkcije jedne varijable i kao nezavisnu i kao zavisnu varijablu imaju realne brojeve.

Jesmo li u primjeru s baburama dobili realnu funkciju jedne varijable? Formalno još ne, ali za praksu da. Ako želimo zadovoljiti i formalno definiciju realne funkcije jedne varijable, domena i kodomena moraju se sastojati od „čistih“ realnih brojeva:

Realne funkcije jedne varijable

Što znači **realna funkcija**? A **jedne realne varijable**?

Definicija

Realne funkcije jedne varijable i kao nezavisnu i kao zavisnu varijablu imaju realne brojeve.

Jesmo li u primjeru s baburama dobili realnu funkciju jedne varijable? Formalno još ne, ali za praksu da. Ako želimo zadovoljiti i formalno definiciju realne funkcije jedne varijable, domena i kodomena moraju se sastojati od „čistih“ realnih brojeva: Recimo da Vaša prodavačica ima $M = 50$ kg paprika. Nezavisna varijabla x bit će

Realne funkcije jedne varijable

Što znači **realna funkcija**? A **jedne realne varijable**?

Definicija

Realne funkcije jedne varijable i kao nezavisnu i kao zavisnu varijablu imaju realne brojeve.

Jesmo li u primjeru s baburama dobili realnu funkciju jedne varijable? Formalno još ne, ali za praksu da. Ako želimo zadovoljiti i formalno definiciju realne funkcije jedne varijable, domena i kodomena moraju se sastojati od „čistih“ realnih brojeva:

Recimo da Vaša prodavačica ima $M = 50$ kg paprika.

Nezavisna varijabla x bit će $x = \frac{m}{\text{kg}}$ i stoga je domena

Realne funkcije jedne varijable

Što znači **realna funkcija**? A **jedne realne varijable**?

Definicija

Realne funkcije jedne varijable i kao nezavisnu i kao zavisnu varijablu imaju realne brojeve.

Jesmo li u primjeru s baburama dobili realnu funkciju jedne varijable? Formalno još ne, ali za praksu da. Ako želimo zadovoljiti i formalno definiciju realne funkcije jedne varijable, domena i kodomena moraju se sastojati od „čistih“ realnih brojeva:

Recimo da Vaša prodavačica ima $M = 50$ kg paprika.

Nezavisna varijabla x bit će $x = \frac{m}{\text{kg}}$ i stoga je domena $D = [0, 50]$.

Zavisna varijabla y bit će

Realne funkcije jedne varijable

Što znači **realna funkcija**? A **jedne realne varijable**?

Definicija

Realne funkcije jedne varijable i kao nezavisnu i kao zavisnu varijablu imaju realne brojeve.

Jesmo li u primjeru s baburama dobili realnu funkciju jedne varijable? Formalno još ne, ali za praksu da. Ako želimo zadovoljiti i formalno definiciju realne funkcije jedne varijable, domena i kodomena moraju se sastojati od „čistih“ realnih brojeva:

Recimo da Vaša prodavačica ima $M = 50$ kg paprika.

Nezavisna varijabla x bit će $x = \frac{m}{\text{kg}}$ i stoga je domena $D = [0, 50]$.

Zavisna varijabla y bit će $y = \frac{c}{\text{€}}$ i stoga je kodomena

Realne funkcije jedne varijable

Što znači **realna funkcija**? A **jedne realne varijable**?

Definicija

Realne funkcije jedne varijable i kao nezavisnu i kao zavisnu varijablu imaju realne brojeve.

Jesmo li u primjeru s baburama dobili realnu funkciju jedne varijable? Formalno još ne, ali za praksu da. Ako želimo zadovoljiti i formalno definiciju realne funkcije jedne varijable, domena i kodomena moraju se sastojati od „čistih“ realnih brojeva:

Recimo da Vaša prodavačica ima $M = 50$ kg paprika.

Nezavisna varijabla x bit će $x = \frac{m}{\text{kg}}$ i stoga je domena $D = [0, 50]$.

Zavisna varijabla y bit će $y = \frac{c}{\text{€}}$ i stoga je kodomena $K = [0, 100]$.

Realne funkcije jedne varijable

Što znači **realna funkcija**? A **jedne realne varijable**?

Definicija

Realne funkcije jedne varijable i kao nezavisnu i kao zavisnu varijablu imaju realne brojeve.

Jesmo li u primjeru s baburama dobili realnu funkciju jedne varijable? Formalno još ne, ali za praksu da. Ako želimo zadovoljiti i formalno definiciju realne funkcije jedne varijable, domena i kodomena moraju se sastojati od „čistih“ realnih brojeva:

Recimo da Vaša prodavačica ima $M = 50$ kg paprika.

Nezavisna varijabla x bit će $x = \frac{m}{\text{kg}}$ i stoga je domena $D = [0, 50]$.

Zavisna varijabla y bit će $y = \frac{c}{\text{€}}$ i stoga je kodomena $K = [0, 100]$.

Time smo našu funkciju ovisnosti cijene babura o njihovoj masi sveli na funkciju koja je i formalno realna funkcija jedne varijable:

$$c : [0, 50] \rightarrow [0, 100], \quad c(x) = 2x.$$

Prirodna domena

Da Vam je netko dao pravilo $\bar{c}(x) = 2x$, biste li pretpostavili da je domena $[0, 50]$?

Prirodna domena

Da Vam je netko dao pravilo $\bar{c}(x) = 2x$, biste li pretpostavili da je domena $[0, 50]$? Nego?

Prirodna domena

Da Vam je netko dao pravilo $\bar{c}(x) = 2x$, biste li pretpostavili da je domena $[0, 50]$? Nego? $D = \mathbb{R}$.

Prirodna domena

Da Vam je netko dao pravilo $\bar{c}(x) = 2x$, biste li pretpostavili da je domena $[0, 50]$? Nego? $D = \mathbb{R}$. Funkcijska pravila imaju oblik

ime zavisne varijable = ime funkcije (ime nezavisne varijable)

odnosno

ime funkcije (ime nezavisne varijable) = formula koja sadrži nezavisnu varijablu.

Definicija

*Ako je pravilo neke funkcije zadano matematičkom formulom, **prirodna domena** te funkcije je skup svih vrijednosti nezavisne varijable za koje ta formula ima smisla, tj. za koje se uvrštavanjem u formulu daje izračunati rezultat.*

Prirodna domena

Da Vam je netko dao pravilo $\bar{c}(x) = 2x$, biste li pretpostavili da je domena $[0, 50]$? Nego? $D = \mathbb{R}$. Funkcijska pravila imaju oblik

ime zavisne varijable = ime funkcije (ime nezavisne varijable)

odnosno

ime funkcije (ime nezavisne varijable) = formula koja sadrži nezavisnu varijablu.

Definicija

*Ako je pravilo neke funkcije zadano matematičkom formulom, **prirodna domena** te funkcije je skup svih vrijednosti nezavisne varijable za koje ta formula ima smisla, tj. za koje se uvrštavanjem u formulu daje izračunati rezultat.*

Funkcije $c : [0, 50] \rightarrow [0, 100]$, $c(x) = 2x$ i $\bar{c} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $\bar{c}(x) = 2x$ su dvije različite funkcije!

Proporcionalnost

U primjeru s baburama, kakav je bio kvocijent nezavisne varijable s pripadnom zavisnom (osim kad su one 0)?

Proporcionalnost

U primjeru s baburama, kakav je bio kvocijent nezavisne varijable s pripadnom zavisnom (osim kad su one 0)? Konstantan: Za svaku masu babura koje kupimo, ako smo ih uopće kupili, omjer plaćene cijene i kupljene mase iznosi $C : m = 2 \frac{\text{€}}{\text{kg}}$.

Dakle, postoji konstanta k takva da s zavisna varijabla iz nezavisne dobije množenjem s k . U takvom slučaju kažemo: Zavisna i nezavisna varijabla su **proporcionalne (razmjerne)** (s konstantom proporcionalnosti k). Proporcionalnost kao funkcijska ovisnost je uvijek oblika

$$f(x) = k x.$$

Je li površina kvadrata proporcionalna duljini njegove stranice?

Proporcionalnost

U primjeru s baburama, kakav je bio kvocijent nezavisne varijable s pripadnom zavisnom (osim kad su one 0)? Konstantan: Za svaku masu babura koje kupimo, ako smo ih uopće kupili, omjer plaćene cijene i kupljene mase iznosi $C : m = 2 \frac{\text{€}}{\text{kg}}$.

Dakle, postoji konstanta k takva da s zavisna varijabla iz nezavisne dobije množenjem s k . U takvom slučaju kažemo: Zavisna i nezavisna varijabla su **proporcionalne (razmjerne)** (s konstantom proporcionalnosti k). Proporcionalnost kao funkcijska ovisnost je uvijek oblika

$$f(x) = k x.$$

Je li površina kvadrata proporcionalna duljini njegove stranice? A opseg kruga njegovom promjeru?

Proporcionalnost

U primjeru s baburama, kakav je bio kvocijent nezavisne varijable s pripadnom zavisnom (osim kad su one 0)? Konstantan: Za svaku masu babura koje kupimo, ako smo ih uopće kupili, omjer plaćene cijene i kupljene mase iznosi $C : m = 2 \frac{\text{€}}{\text{kg}}$.

Dakle, postoji konstanta k takva da s zavisna varijabla iz nezavisne dobije množenjem s k . U takvom slučaju kažemo: Zavisna i nezavisna varijabla su **proporcionalne (razmjerne)** (s konstantom proporcionalnosti k). Proporcionalnost kao funkcijska ovisnost je uvijek oblika

$$f(x) = kx.$$

Je li površina kvadrata proporcionalna duljini njegove stranice? A opseg kruga njegovom promjeru? A cijena vožnje taksijem (s početnom cijenom i fiksnom cijenom po kilometru) o pređenom putu?

Graf funkcije

Ostanimo na primjeru s baburama. Možemo li parove (x, y) , gdje je $x = \frac{m}{\text{kg}}$, $y = \frac{C}{\text{€}}$, $y = c(x) = 2x$, crtati u kooordinatnom sustavu?

Graf funkcije

Ostanimo na primjeru s baburama. Možemo li parove (x, y) , gdje je $x = \frac{m}{\text{kg}}$, $y = \frac{\text{€}}{\text{€}}$, $y = c(x) = 2x$, crtati u koordinatnom sustavu?

Za svaku realnu funkciju f jedne varijable njezin **graf** se može nacrtati (prikazati) u pravokutnom koordinatnom sustavu u ravnini. To je zato što se graf sastoji od svih parova $(x, f(x))$, gdje je x u domeni funkcije f , a kod realnih funkcija jedne varijable su onda ti parovi parovi realnih brojeva.

Graf funkcije

Ostanimo na primjeru s baburama. Možemo li parove (x, y) , gdje je $x = \frac{m}{\text{kg}}$, $y = \frac{\text{€}}{\text{€}}$, $y = c(x) = 2x$, crtati u koordinatnom sustavu?

Za svaku realnu funkciju f jedne varijable njezin **graf** se može nacrtati (prikazati) u pravokutnom koordinatnom sustavu u ravnini. To je zato što se graf sastoji od svih parova $(x, f(x))$, gdje je x u domeni funkcije f , a kod realnih funkcija jedne varijable su onda ti parovi parovi realnih brojeva.

Kako biste označili **os apscisa** za naš primjer s baburama?

Graf funkcije

Ostanimo na primjeru s baburama. Možemo li parove (x, y) , gdje je $x = \frac{m}{\text{kg}}$, $y = \frac{\text{€}}{\text{€}}$, $y = c(x) = 2x$, crtati u koordinatnom sustavu?

Za svaku realnu funkciju f jedne varijable njezin **graf** se može nacrtati (prikazati) u pravokutnom koordinatnom sustavu u ravnini. To je zato što se graf sastoji od svih parova $(x, f(x))$, gdje je x u domeni funkcije f , a kod realnih funkcija jedne varijable su onda ti parovi parovi realnih brojeva.

Kako biste označili **os apscisa** za naš primjer s baburama? Na os apscisa nanose se vrijednosti nezavisne varijable. U našem slučaju prikladna oznaka je $\frac{m}{\text{kg}}$, a raspon

Graf funkcije

Ostanimo na primjeru s baburama. Možemo li parove (x, y) , gdje je $x = \frac{m}{\text{kg}}$, $y = \frac{\text{€}}{\text{€}}$, $y = c(x) = 2x$, crtati u koordinatnom sustavu?

Za svaku realnu funkciju f jedne varijable njezin **graf** se može nacrtati (prikazati) u pravokutnom koordinatnom sustavu u ravnini. To je zato što se graf sastoji od svih parova $(x, f(x))$, gdje je x u domeni funkcije f , a kod realnih funkcija jedne varijable su onda ti parovi parovi realnih brojeva.

Kako biste označili **os apscisa** za naš primjer s baburama? Na os apscisa nanose se vrijednosti nezavisne varijable. U našem slučaju prikladna oznaka je $\frac{m}{\text{kg}}$, a raspon je od 0 do 50.

Graf funkcije

Ostanimo na primjeru s baburama. Možemo li parove (x, y) , gdje je $x = \frac{m}{\text{kg}}$, $y = \frac{€}{€}$, $y = c(x) = 2x$, crtati u koordinatnom sustavu?

Za svaku realnu funkciju f jedne varijable njezin **graf** se može nacrtati (prikazati) u pravokutnom koordinatnom sustavu u ravnini. To je zato što se graf sastoji od svih parova $(x, f(x))$, gdje je x u domeni funkcije f , a kod realnih funkcija jedne varijable su onda ti parovi parovi realnih brojeva.

Kako biste označili **os apscisa** za naš primjer s baburama? Na os apscisa nanose se vrijednosti nezavisne varijable. U našem slučaju prikladna oznaka je $\frac{m}{\text{kg}}$, a raspon je od 0 do 50.

Kako biste označili **os ordinata** za naš primjer s baburama?

Graf funkcije

Ostanimo na primjeru s baburama. Možemo li parove (x, y) , gdje je $x = \frac{m}{\text{kg}}$, $y = \frac{\text{€}}{\text{€}}$, $y = c(x) = 2x$, crtati u koordinatnom sustavu?

Za svaku realnu funkciju f jedne varijable njezin **graf** se može nacrtati (prikazati) u pravokutnom koordinatnom sustavu u ravnini. To je zato što se graf sastoji od svih parova $(x, f(x))$, gdje je x u domeni funkcije f , a kod realnih funkcija jedne varijable su onda ti parovi parovi realnih brojeva.

Kako biste označili **os apscisa** za naš primjer s baburama? Na os apscisa nanose se vrijednosti nezavisne varijable. U našem slučaju prikladna oznaka je $\frac{m}{\text{kg}}$, a raspon je od 0 do 50.

Kako biste označili **os ordinata** za naš primjer s baburama? Na os apscisa nanose se vrijednosti zavisne varijable. U našem slučaju prikladna oznaka je $\frac{\text{€}}{\text{€}}$, a raspon

Graf funkcije

Ostanimo na primjeru s baburama. Možemo li parove (x, y) , gdje je $x = \frac{m}{\text{kg}}$, $y = \frac{\text{€}}{\text{€}}$, $y = c(x) = 2x$, crtati u koordinatnom sustavu?

Za svaku realnu funkciju f jedne varijable njezin **graf** se može nacrtati (prikazati) u pravokutnom koordinatnom sustavu u ravnini. To je zato što se graf sastoji od svih parova $(x, f(x))$, gdje je x u domeni funkcije f , a kod realnih funkcija jedne varijable su onda ti parovi parovi realnih brojeva.

Kako biste označili **os apscisa** za naš primjer s baburama? Na os apscisa nanose se vrijednosti nezavisne varijable. U našem slučaju prikladna oznaka je $\frac{m}{\text{kg}}$, a raspon je od 0 do 50.

Kako biste označili **os ordinata** za naš primjer s baburama? Na os apscisa nanose se vrijednosti zavisne varijable. U našem slučaju prikladna oznaka je $\frac{\text{€}}{\text{€}}$, a raspon je od 0 do 100.

Graf funkcije

Ostanimo na primjeru s baburama. Možemo li parove (x, y) , gdje je $x = \frac{m}{\text{kg}}$, $y = \frac{\text{€}}{\text{€}}$, $y = c(x) = 2x$, crtati u koordinatnom sustavu?

Za svaku realnu funkciju f jedne varijable njezin **graf** se može nacrtati (prikazati) u pravokutnom koordinatnom sustavu u ravnini. To je zato što se graf sastoji od svih parova $(x, f(x))$, gdje je x u domeni funkcije f , a kod realnih funkcija jedne varijable su onda ti parovi parovi realnih brojeva.

Kako biste označili **os apscisa** za naš primjer s baburama? Na os apscisa nanose se vrijednosti nezavisne varijable. U našem slučaju prikladna oznaka je $\frac{m}{\text{kg}}$, a raspon je od 0 do 50.

Kako biste označili **os ordinata** za naš primjer s baburama? Na os apscisa nanose se vrijednosti zavisne varijable. U našem slučaju prikladna oznaka je $\frac{\text{€}}{\text{€}}$, a raspon je od 0 do 100.

Kako će u ovom primjeru izgledati graf?

Graf funkcije

Ostanimo na primjeru s baburama. Možemo li parove (x, y) , gdje je $x = \frac{m}{\text{kg}}$, $y = \frac{€}{€}$, $y = c(x) = 2x$, crtati u koordinatnom sustavu?

Za svaku realnu funkciju f jedne varijable njezin **graf** se može nacrtati (prikazati) u pravokutnom koordinatnom sustavu u ravnini. To je zato što se graf sastoji od svih parova $(x, f(x))$, gdje je x u domeni funkcije f , a kod realnih funkcija jedne varijable su onda ti parovi parovi realnih brojeva.

Kako biste označili **os apscisa** za naš primjer s baburama? Na os apscisa nanose se vrijednosti nezavisne varijable. U našem slučaju prikladna oznaka je $\frac{m}{\text{kg}}$, a raspon je od 0 do 50.

Kako biste označili **os ordinata** za naš primjer s baburama? Na os apscisa nanose se vrijednosti zavisne varijable. U našem slučaju prikladna oznaka je $\frac{€}{€}$, a raspon je od 0 do 100.

Kako će u ovom primjeru izgledati graf? Ako je funkcijska ovisnost proporcionalnost, graf je pravac (ili dio pravca) koji prolazi kroz ishodište. Nacrtajte grafove funkcija c i $\bar{c}$!

Mora li graf funkcije sjeći os ordinata?

Mora li graf funkcije sjeći os ordinata? Što govori o funkciji ako graf ne siječe os ordinata?

Mora li graf funkcije sjeći os ordinata? Što govori o funkciji ako graf ne siječe os ordinata? Ako graf siječe os ordinata, može li biti više sjecišta?

Mora li graf funkcije sjeći os ordinata? Što govori o funkciji ako graf ne siječe os ordinata? Ako graf siječe os ordinata, može li biti više sjecišta? Ordinata tog jedinstvenog sjecišta s osi ordinata, ako takvo postoji, predstavlja koji podatak o funkciji?

Mora li graf funkcije sjeći os ordinata? Što govori o funkciji ako graf ne siječe os ordinata? Ako graf siječe os ordinata, može li biti više sjecišta? Ordinata tog jedinstvenog sjecišta s osi ordinata, ako takvo postoji, predstavlja koji podatak o funkciji? Mora li graf funkcije sjeći os apscisa?

Mora li graf funkcije sjeći os ordinata? Što govori o funkciji ako graf ne siječe os ordinata? Ako graf siječe os ordinata, može li biti više sjecišta? Ordinata tog jedinstvenog sjecišta s osi ordinata, ako takvo postoji, predstavlja koji podatak o funkciji?

Mora li graf funkcije sjeći os apscisa? Što govori o funkciji ako graf ne siječe os apscisa?

Mora li graf funkcije sjeći os ordinata? Što govori o funkciji ako graf ne siječe os ordinata? Ako graf siječe os ordinata, može li biti više sjecišta? Ordinata tog jedinstvenog sjecišta s osi ordinata, ako takvo postoji, predstavlja koji podatak o funkciji?

Mora li graf funkcije sjeći os apscisa? Što govori o funkciji ako graf ne siječe os apscisa? Ako graf siječe os apscisa, može li biti više sjecišta?

Mora li graf funkcije sjeći os ordinata? Što govori o funkciji ako graf ne siječe os ordinata? Ako graf siječe os ordinata, može li biti više sjecišta? Ordinata tog jedinstvenog sjecišta s osi ordinata, ako takvo postoji, predstavlja koji podatak o funkciji?

Mora li graf funkcije sjeći os apscisa? Što govori o funkciji ako graf ne siječe os apscisa? Ako graf siječe os apscisa, može li biti više sjecišta? Apscisa svakog sjecišta s osi apscisa predstavlja koji podatak o funkciji?

Mora li graf funkcije sjeći os ordinata? Što govori o funkciji ako graf ne siječe os ordinata? Ako graf siječe os ordinata, može li biti više sjecišta? Ordinata tog jedinstvenog sjecišta s osi ordinata, ako takvo postoji, predstavlja koji podatak o funkciji?

Mora li graf funkcije sjeći os apscisa? Što govori o funkciji ako graf ne siječe os apscisa? Ako graf siječe os apscisa, može li biti više sjecišta? Apscisa svakog sjecišta s osi apscisa predstavlja koji podatak o funkciji?

graf funkcije $\neq$ slika funkcije

Mora li graf funkcije sjeći os ordinata? Što govori o funkciji ako graf ne siječe os ordinata? Ako graf siječe os ordinata, može li biti više sjecišta? Ordinata tog jedinstvenog sjecišta s osi ordinata, ako takvo postoji, predstavlja koji podatak o funkciji?

Mora li graf funkcije sjeći os apscisa? Što govori o funkciji ako graf ne siječe os apscisa? Ako graf siječe os apscisa, može li biti više sjecišta? Apscisa svakog sjecišta s osi apscisa predstavlja koji podatak o funkciji?

graf funkcije $\neq$ slika funkcije

Kako biste pomoću grafičkog prikaza utvrdili za koje vrijednosti varijable je funkcija pozitivna/negativna?

Mora li graf funkcije sjeći os ordinata? Što govori o funkciji ako graf ne siječe os ordinata? Ako graf siječe os ordinata, može li biti više sjecišta? Ordinata tog jedinstvenog sjecišta s osi ordinata, ako takvo postoji, predstavlja koji podatak o funkciji?

Mora li graf funkcije sjeći os apscisa? Što govori o funkciji ako graf ne siječe os apscisa? Ako graf siječe os apscisa, može li biti više sjecišta? Apscisa svakog sjecišta s osi apscisa predstavlja koji podatak o funkciji?

graf funkcije $\neq$ slika funkcije

Kako biste pomoću grafičkog prikaza utvrdili za koje vrijednosti varijable je funkcija pozitivna/negativna? Kad su funkcije c i $\bar{c}$ pozitivne odnosno negativne?

Rast i pad funkcije

Što od sljedećeg je točno?

- Funkcija je rastuća ako većim nezavisnim varijablama pridružuje veće zavisne varijable.
- Funkcija je rastuća ako manjim nezavisnim varijablama pridružuje veće zavisne varijable.
- Funkcija je padajuća ako manjim nezavisnim varijablama pridružuje manjim zavisne varijable.
- Funkcija je padajuća ako većim nezavisnim varijablama pridružuje manje zavisne varijable.

Rast i pad funkcije

Što od sljedećeg je tačno?

- Funkcija je rastuća ako većim nezavisnim varijablama pridružuje veće zavisne varijable.
- Funkcija je rastuća ako manjim nezavisnim varijablama pridružuje veće zavisne varijable.
- Funkcija je padajuća ako manjim nezavisnim varijablama pridružuje manjim zavisne varijable.
- Funkcija je padajuća ako većim nezavisnim varijablama pridružuje manje zavisne varijable.

Kako iz grafa funkcije očitavamo na kojim intervalima ona raste ili pada?

Rast i pad funkcije

Što od sljedećeg je točno?

- Funkcija je rastuća ako većim nezavisnim varijablama pridružuje veće zavisne varijable.
- Funkcija je rastuća ako manjim nezavisnim varijablama pridružuje veće zavisne varijable.
- Funkcija je padajuća ako manjim nezavisnim varijablama pridružuje manjim zavisne varijable.
- Funkcija je padajuća ako većim nezavisnim varijablama pridružuje manje zavisne varijable.

Kako iz grafa funkcije očitavamo na kojim intervalima ona raste ili pada? Kakve su po pitanju rasta i pada funkcije c i $\bar{c}$?

Rast i pad funkcije

Što od sljedećeg je točno?

- Funkcija je rastuća ako većim nezavisnim varijablama pridružuje veće zavisne varijable.
- Funkcija je rastuća ako manjim nezavisnim varijablama pridružuje veće zavisne varijable.
- Funkcija je padajuća ako manjim nezavisnim varijablama pridružuje manjim zavisne varijable.
- Funkcija je padajuća ako većim nezavisnim varijablama pridružuje manje zavisne varijable.

Kako iz grafa funkcije očitavamo na kojim intervalima ona raste ili pada? Kakve su po pitanju rasta i pada funkcije c i $\bar{c}$? Mora li proporcionalnost biti rastuća?

Rast i pad funkcije

Što od sljedećeg je točno?

- Funkcija je rastuća ako većim nezavisnim varijablama pridružuje veće zavisne varijable.
- Funkcija je rastuća ako manjim nezavisnim varijablama pridružuje veće zavisne varijable.
- Funkcija je padajuća ako manjim nezavisnim varijablama pridružuje manjim zavisne varijable.
- Funkcija je padajuća ako većim nezavisnim varijablama pridružuje manje zavisne varijable.

Kako iz grafa funkcije očitavamo na kojim intervalima ona raste ili pada? Kakve su po pitanju rasta i pada funkcije c i $\bar{c}$? Mora li proporcionalnost biti rastuća? Mora li rastuća ovisnost biti proporcionalnost?

Rast i pad funkcije

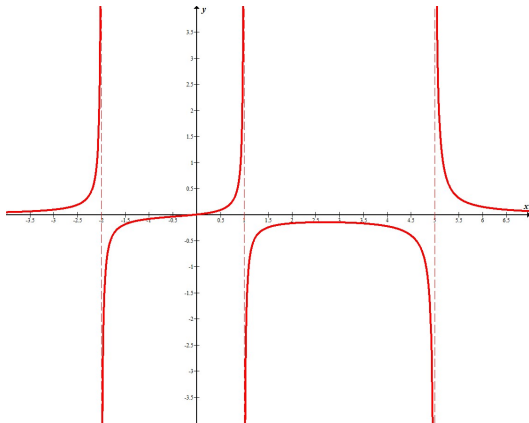
Što od sljedećeg je tačno?

- Funkcija je rastuća ako većim nezavisnim varijablama pridružuje veće zavisne varijable.
- Funkcija je rastuća ako manjim nezavisnim varijablama pridružuje veće zavisne varijable.
- Funkcija je padajuća ako manjim nezavisnim varijablama pridružuje manjim zavisne varijable.
- Funkcija je padajuća ako većim nezavisnim varijablama pridružuje manje zavisne varijable.

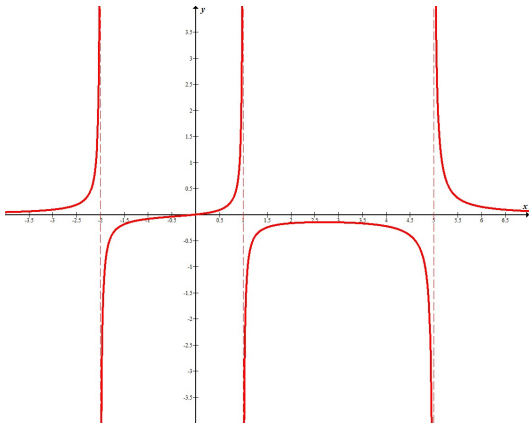
Kako iz grafa funkcije očitavamo na kojim intervalima ona raste ili pada? Kakve su po pitanju rasta i pada funkcije c i $\bar{c}$? Mora li proporcionalnost biti rastuća? Mora li rastuća ovisnost biti proporcionalnost?

Skicirajte po jedan primjer grafa funkcije $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ koja je rastuća, koja je padajuća, koja nije ni rastuća ni padajuća.

Rast i pad se gledaju po intervalima!



Rast i pad se gledaju po intervalima!



Zadatak

Objasnite zašto se pri množenju nejednakosti s pozitivnim brojem nejednakost zadržava, a pri množenju s negativnim „obrće“.

Parnost i neparnost funkcije

Funkcija je **parna** ako promjena predznaka nezavisne varijable ne mijenja iznos zavisne varijable, a funkcija je **neparna** ako promjena predznaka nezavisne varijable izaziva promjenu predznaka zavisne varijable.

Parnost i neparnost funkcije

Funkcija je **parna** ako promjena predznaka nezavisne varijable ne mijenja iznos zavisne varijable, a funkcija je **neparna** ako promjena predznaka nezavisne varijable izaziva promjenu predznaka zavisne varijable. Da bismo mogli razmatrati parnost ili neparnost funkcije, njezina domena mora biti

Parnost i neparnost funkcije

Funkcija je **parna** ako promjena predznaka nezavisne varijable ne mijenja iznos zavisne varijable, a funkcija je **neparna** ako promjena predznaka nezavisne varijable izaziva promjenu predznaka zavisne varijable. Da bismo mogli razmatrati parnost ili neparnost funkcije, njezina domena mora biti simetrična s obzirom na 0.

Je li funkcija c parna ili neparna? A $\bar{c}$?

Parnost i neparnost funkcije

Funkcija je **parna** ako promjena predznaka nezavisne varijable ne mijenja iznos zavisne varijable, a funkcija je **neparna** ako promjena predznaka nezavisne varijable izaziva promjenu predznaka zavisne varijable. Da bismo mogli razmatrati parnost ili neparnost funkcije, njezina domena mora biti simetrična s obzirom na 0.

Je li funkcija c parna ili neparna? A $\bar{c}$?

Zadatak

Mora li domena parne ili neparne funkcije sadržavati 0?

Parnost i neparnost funkcije

Funkcija je **parna** ako promjena predznaka nezavisne varijable ne mijenja iznos zavisne varijable, a funkcija je **neparna** ako promjena predznaka nezavisne varijable izaziva promjenu predznaka zavisne varijable. Da bismo mogli razmatrati parnost ili neparnost funkcije, njezina domena mora biti simetrična s obzirom na 0.

Je li funkcija c parna ili neparna? A $\bar{c}$?

Zadatak

*Mora li domena parne ili neparne funkcije sadržavati 0?
Ako domena parne ili neparne funkcije sadrži 0, je li određena vrijednost te funkcije u 0?*

Parnost i neparnost funkcije

Funkcija je **parna** ako promjena predznaka nezavisne varijable ne mijenja iznos zavisne varijable, a funkcija je **neparna** ako promjena predznaka nezavisne varijable izaziva promjenu predznaka zavisne varijable. Da bismo mogli razmatrati parnost ili neparnost funkcije, njezina domena mora biti simetrična s obzirom na 0.

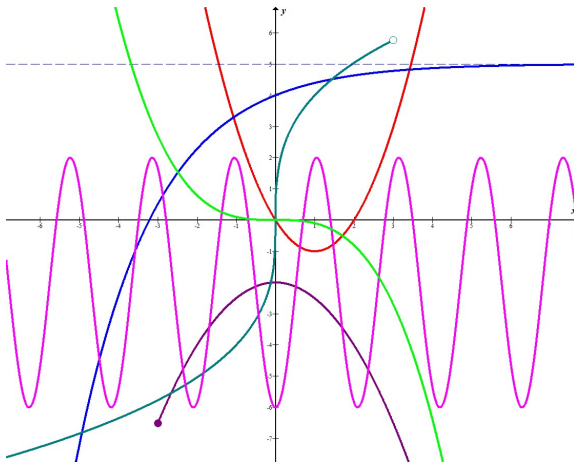
Je li funkcija c parna ili neparna? A $\bar{c}$?

Zadatak

*Mora li domena parne ili neparne funkcije sadržavati 0?
Ako domena parne ili neparne funkcije sadrži 0, je li određena vrijednost te funkcije u 0?*

Kako iz grafa vidimo parnost ili neparnost funkcije?

Kako iz grafa vidimo parnost ili neparnost funkcije? Koji od sljedećih grafova prikazuju (ne)parne i koje su im domene?



Injektivnost, surjektivnost, bijektivnost

Injektivnost funkcije znači

Injektivnost, surjektivnost, bijektivnost

Injektivnost funkcije znači da se nikojim dvjema različitim nezavisnim varijablama ne pridruži ista zavisna varijabla (nijedna horizontala ne siječe graf više od jednom), a **surjektivnost** znači

Injektivnost, surjektivnost, bijektivnost

Injektivnost funkcije znači da se nikojim dvjema različitim nezavisnim varijablama ne pridruži ista zavisna varijabla (nijedna horizontala ne siječe graf više od jednom), a **surjektivnost** znači da je svaki element kodomene zavisna varijabla pridružena bar jednoj nezavisnoj varijabli.

$$\text{injekcija} + \text{surjekcija} = \text{bijekcija}$$

Injektivnost, surjektivnost, bijektivnost

Injektivnost funkcije znači da se nikojim dvjema različitim nezavisnim varijablama ne pridruži ista zavisna varijabla (nijedna horizontala ne siječe graf više od jednom), a **surjektivnost** znači da je svaki element kodomene zavisna varijabla pridružena bar jednoj nezavisnoj varijabli.

$$\text{injekcija} + \text{surjekcija} = \text{bijekcija}$$

Primjer

Ako je funkcija strogo rastuća na cijeloj domeni, ona je sigurno

Injektivnost, surjektivnost, bijektivnost

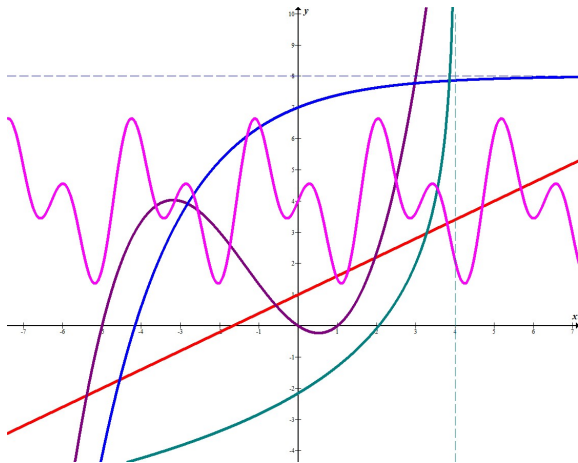
Injektivnost funkcije znači da se nikojim dvjema različitim nezavisnim varijablama ne pridruži ista zavisna varijabla (nijedna horizontala ne siječe graf više od jednom), a **surjektivnost** znači da je svaki element kodomene zavisna varijabla pridružena bar jednoj nezavisnoj varijabli.

$$\text{injekcija} + \text{surjekcija} = \text{bijekcija}$$

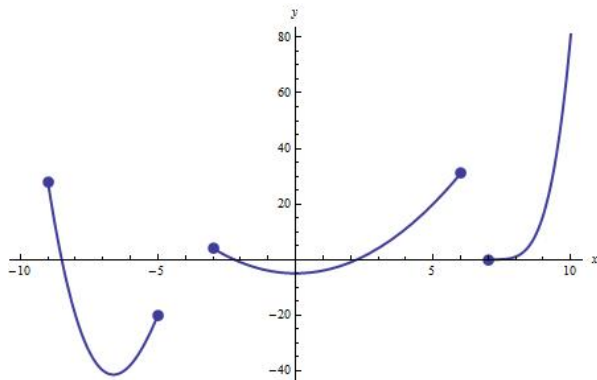
Primjer

Ako je funkcija strogo rastuća na cijeloj domeni, ona je sigurno injekcija. Također, ako je funkcija strogo padajuća na cijeloj domeni, onda je sigurno injekcija.

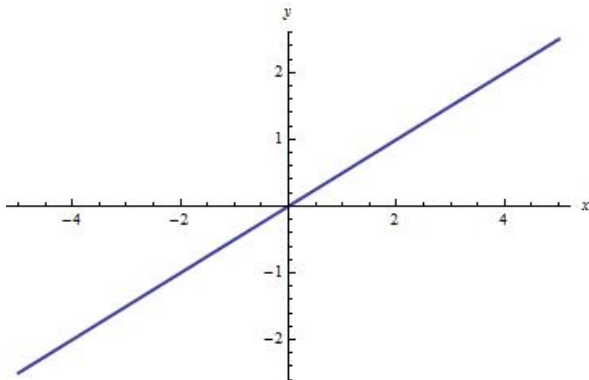
Koji od sljedećih grafova prikazuju injekcije (surjekcije) s domenom i kodomenom $\mathbb{R}$?



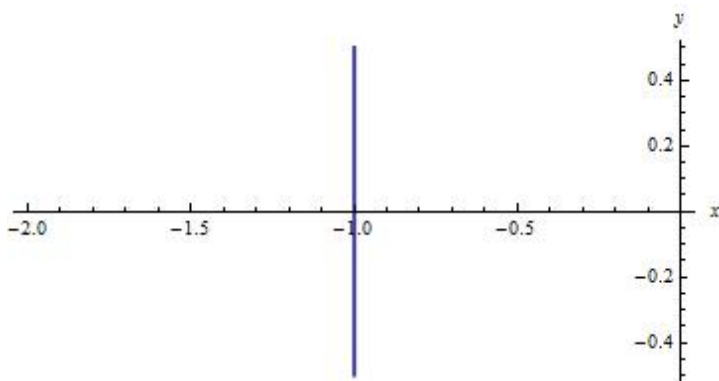
Za svaki od sljedećih dijagrama utvrdite radi li se o prikazu grafa neke funkcije u pravokutnom koordinatnom sustavu? Za one koji jesu, utvrdite domenu, nultočke, vrijednost funkcije u nuli te intervale pozitivnosti i negativnosti, rasta i pada, provjerite parnost, neparnost i bijektivnost.



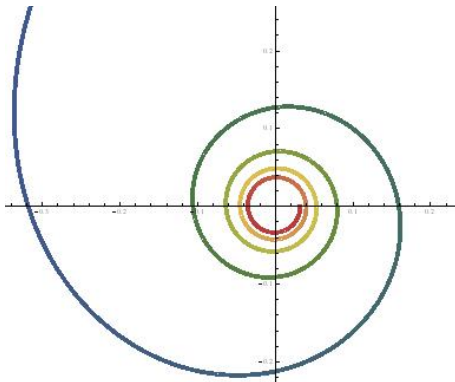
Za svaki od sljedećih dijagrama utvrdite radi li se o prikazu grafa neke funkcije u pravokutnom koordinatnom sustavu? Za one koji jesu, utvrdite domen, nultočke, vrijednost funkcije u nuli te intervale pozitivnosti i negativnosti, rasta i pada, provjerite parnost, neparnost i bijektivnost.



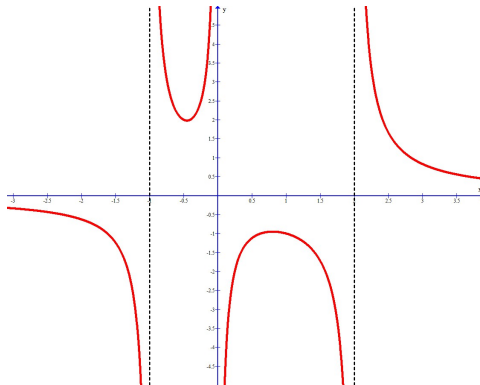
Za svaki od sljedećih dijagrama utvrdite radi li se o prikazu grafa neke funkcije u pravokutnom koordinatnom sustavu? Za one koji jesu, utvrdite domenu, nultočke, vrijednost funkcije u nuli te intervale pozitivnosti i negativnosti, rasta i pada, provjerite parnost, neparnost i bijektivnost.



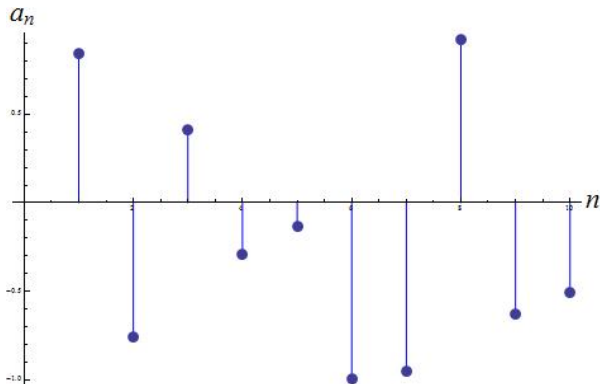
Za svaki od sljedećih dijagrama utvrdite radi li se o prikazu grafa neke funkcije u pravokutnom koordinatnom sustavu? Za one koji jesu, utvrdite domenu, nultočke, vrijednost funkcije u nuli te intervale pozitivnosti i negativnosti, rasta i pada, provjerite parnost, neparnost i bijektivnost.



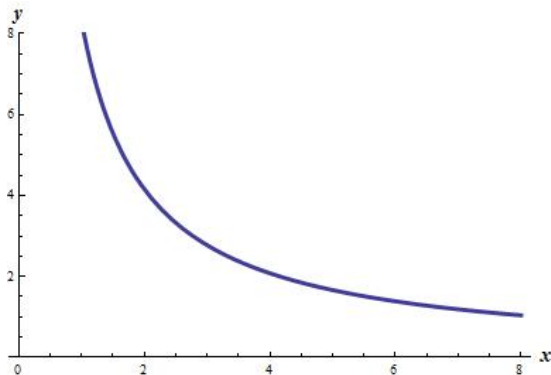
Za svaki od sljedećih dijagrama utvrdite radi li se o prikazu grafa neke funkcije u pravokutnom koordinatnom sustavu? Za one koji jesu, utvrdite domenu, nultočke, vrijednost funkcije u nuli te intervale pozitivnosti i negativnosti, rasta i pada, provjerite parnost, neparnost i bijektivnost.



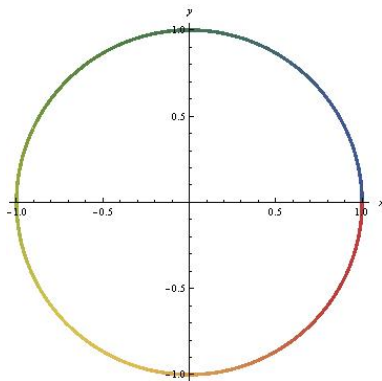
Za svaki od sljedećih dijagrama utvrdite radi li se o prikazu grafa neke funkcije u pravokutnom koordinatnom sustavu? Za one koji jesu, utvrdite domenu, nultočke, vrijednost funkcije u nuli te intervale pozitivnosti i negativnosti, rasta i pada, provjerite parnost, neparnost i bijektivnost.



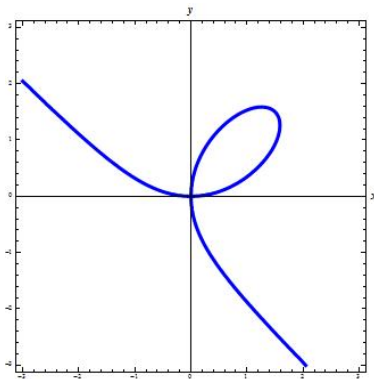
Za svaki od sljedećih dijagrama utvrdite radi li se o prikazu grafa neke funkcije u pravokutnom koordinatnom sustavu? Za one koji jesu, utvrdite domenu, nultočke, vrijednost funkcije u nuli te intervale pozitivnosti i negativnosti, rasta i pada, provjerite parnost, neparnost i bijektivnost.



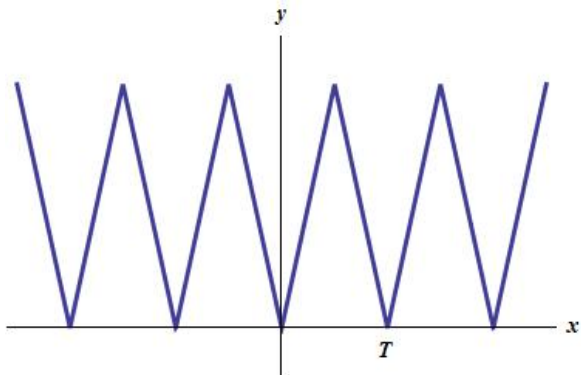
Za svaki od sljedećih dijagrama utvrdite radi li se o prikazu grafa neke funkcije u pravokutnom koordinatnom sustavu? Za one koji jesu, utvrdite domenu, nultočke, vrijednost funkcije u nuli te intervale pozitivnosti i negativnosti, rasta i pada, provjerite parnost, neparnost i bijektivnost.



Za svaki od sljedećih dijagrama utvrdite radi li se o prikazu grafa neke funkcije u pravokutnom koordinatnom sustavu? Za one koji jesu, utvrdite domenu, nultočke, vrijednost funkcije u nuli te intervale pozitivnosti i negativnosti, rasta i pada, provjerite parnost, neparnost i bijektivnost.



Za svaki od sljedećih dijagrama utvrdite radi li se o prikazu grafa neke funkcije u pravokutnom koordinatnom sustavu? Za one koji jesu, utvrdite domenu, nultočke, vrijednost funkcije u nuli te intervale pozitivnosti i negativnosti, rasta i pada, provjerite parnost, neparnost i bijektivnost.



Link na prvi kratki test provjere prisutnosti na nastavi objavljen je na web-stranici kolegija.

Test će ostati otvoren do 06:00 sati ujutro na dan sljedećeg po redu predavanja iz Matematike 1.

Kako bi se mogao evidentirati Vaš pristup, na početku testa pažljivo unesite prezime, ime i JMBAG.

Link na prvi kratki test provjere prisutnosti na nastavi objavljen je na web-stranici kolegija.

Test će ostati otvoren do 06:00 sati ujutro na dan sljedećeg po redu predavanja iz Matematike 1.

Kako bi se mogao evidentirati Vaš pristup, na početku testa pažljivo unesite prezime, ime i JMBAG.

Sljedeće predavanje: 2.3. Transformacije grafova.