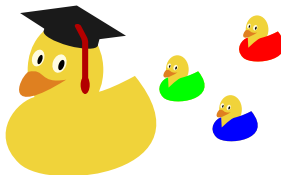


5. predavanje: Algebarske funkcije.

Franka Miriam Brückler



Monomi

Linearne funkcije i funkcije $f(x) = ax^2$ su specijalni slučajevi **monoma**, tj. funkcija

$$x \mapsto ax^n$$

gdje je $n \in \mathbb{N}_0$. Kako mogu izgledati grafovi monoma ovisno o a i n ?

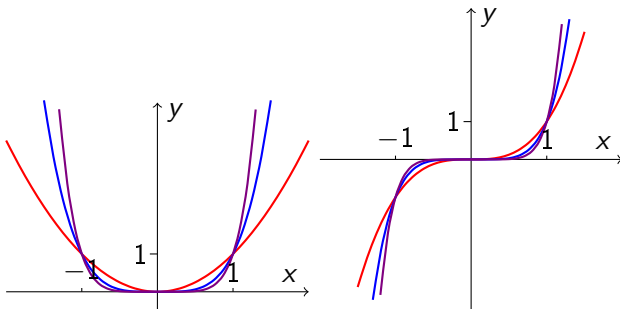
Monomi



Linearne funkcije i funkcije $f(x) = ax^2$ su specijalni slučajevi **monoma**, tj. funkcija

$$x \mapsto ax^n$$

gdje je $n \in \mathbb{N}_0$. Kako mogu izgledati grafovi monoma ovisno o a i n ?



Polinomi

Polinomi su realne funkcije jedne varijable kojima je prirodna domena

Polinomi

Polinomi su realne funkcije jedne varijable kojima je prirodna domena $\mathbb{R}$, a pravilo je zbroj (jednog ili više) monoma. Najveći eksponent nezavisne varijable polinoma je njegov **stupanj**. Koeficijent uz nultu potenciju varijable zove se

Polinomi

Polinomi su realne funkcije jedne varijable kojima je prirodna domena $\mathbb{R}$, a pravilo je zbroj (jednog ili više) monoma. Najveći eksponent nezavisne varijable polinoma je njegov **stupanj**. Koeficijent uz nultu potenciju varijable zove se **slobodni član**, a koeficijent uz najveću potenciju zove se

Polinomi

Polinomi su realne funkcije jedne varijable kojima je prirodna domena $\mathbb{R}$, a pravilo je zbroj (jednog ili više) monoma. Najveći eksponent nezavisne varijable polinoma je njegov **stupanj**. Koeficijent uz nultu potenciju varijable zove se **slobodni član**, a koeficijent uz najveću potenciju zove se **vodeći koeficijent**.

Zadatak

Koji je stupanj, vodeći koeficijent i slobodni član polinoma
 $f(x) = 7 - 2x^3 + 5x$?

Polinomi

Polinomi su realne funkcije jedne varijable kojima je prirodna domena $\mathbb{R}$, a pravilo je zbroj (jednog ili više) monoma. Najveći eksponent nezavisne varijable polinoma je njegov **stupanj**. Koeficijent uz nultu potenciju varijable zove se **slobodni član**, a koeficijent uz najveću potenciju zove se **vodeći koeficijent**.

Zadatak

Koji je stupanj, vodeći koeficijent i slobodni član polinoma $f(x) = 7 - 2x^3 + 5x$?

Zadatak

Nacrtajte graf polinoma zadanog formulom $f(x) = 1 - 2 \cdot (3 - 4x)^5$.

Možemo li graf općenitog polinoma dobiti transformacijama grafova monoma?

Možemo li graf općenitog polinoma dobiti transformacijama grafova monoma?

- Koliko nultočaka može imati polinom stupnja 6?

Možemo li graf općenitog polinoma dobiti transformacijama grafova monoma?

- Koliko nultočaka može imati polinom stupnja n , $n = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ ili 6 .

Možemo li graf općenitog polinoma dobiti transformacijama grafova monoma?

- Koliko nultočaka može imati polinom stupnja n , $0, 1, 2, 3, 4, 5$ ili 6 .
- Bar jednu realnu nultočku polinom sigurno ima ako je

Možemo li graf općenitog polinoma dobiti transformacijama grafova monoma?

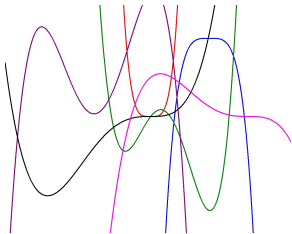
- Koliko nultočaka može imati polinom stupnja $n \geq 0$, 1, 2, 3, 4, 5 ili 6.
- Bar jednu realnu nultočku polinom sigurno ima ako je neparnog stupnja.

Možemo li graf općenitog polinoma dobiti transformacijama grafova monoma?

- Koliko nultočaka može imati polinom stupnja 6 ? $0, 1, 2, 3, 4, 5$ ili 6 .
- Bar jednu realnu nultočku polinom sigurno ima ako je neparnog stupnja.
- Nacrtajte sve moguće *oblike* grafova polinoma stupnja 4 .

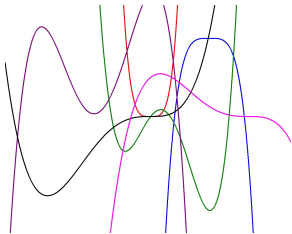
Možemo li graf općenitog polinoma dobiti transformacijama grafova monoma?

- Koliko nultočaka može imati polinom stupnja n ? 0, 1, 2, 3, 4, 5 ili n .
- Bar jednu realnu nultočku polinom sigurno ima ako je neparnog stupnja.
- Nacrtajte sve moguće *oblike* grafova polinoma stupnja 4.



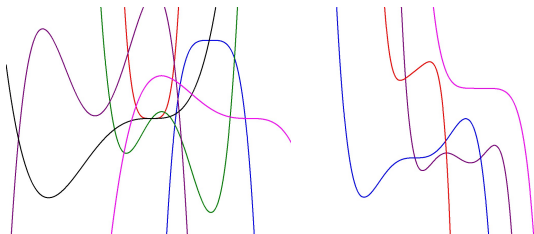
Možemo li graf općenitog polinoma dobiti transformacijama grafova monoma?

- Koliko nultočaka može imati polinom stupnja n ? 0, 1, 2, 3, 4, 5 ili n .
- Bar jednu realnu nultočku polinom sigurno ima ako je neparnog stupnja.
- Nacrtajte sve moguće *oblike* grafova polinoma stupnja 4.
- Kako može izgledati graf polinoma stupnja 5 s negativnim vodećim koeficijentom?



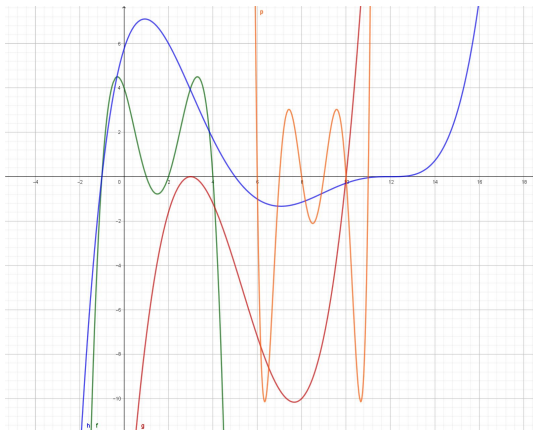
Možemo li graf općenitog polinoma dobiti transformacijama grafova monoma?

- Koliko nultočaka može imati polinom stupnja n , 0, 1, 2, 3, 4, 5 ili 6.
- Bar jednu realnu nultočku polinom sigurno ima ako je neparnog stupnja.
- Nacrtajte sve moguće *oblike* grafova polinoma stupnja 4.
- Kako može izgledati graf polinoma stupnja 5 s negativnim vodećim koeficijentom?



Zadatak

Što možete reći o stupnjevima i vodećim koeficijentima polinoma čiji grafovi su prikazani na slici dolje?



Faktorizacija i dijeljenje polinoma

Kako izgleda graf polinoma $p(x) = x^2 - 9$?

Faktorizacija i dijeljenje polinoma

Kako izgleda graf polinoma $p(x) = x^2 - 9$? Taj polinom možemo zapisati faktorizirano kao $p(x) = (x - 3)(x + 3)$. Može li se svaki kvadratni polinom faktorizirati na affine faktore?

Faktorizacija i dijeljenje polinoma



Kako izgleda graf polinoma $p(x) = x^2 - 9$? Taj polinom možemo zapisati faktorizirano kao $p(x) = (x - 3)(x + 3)$. Može li se svaki kvadratni polinom faktorizirati na affine faktore? **Faktorizirati polinom** znači zapisati ga kao umnožak faktora koji su afini ili pak kvadratni bez realnih nultočaka.

Faktorizacija i dijeljenje polinoma

Kako izgleda graf polinoma $p(x) = x^2 - 9$? Taj polinom možemo zapisati faktorizirano kao $p(x) = (x - 3)(x + 3)$. Može li se svaki kvadratni polinom faktorizirati na affine faktore? **Faktorizirati polinom** znači zapisati ga kao umnožak faktora koji su afini ili pak kvadratni bez realnih nultočaka.

Usporedimo:

$$60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 \text{ vs. } x^4 + 2x^3 - 3x^2 = x^2 \cdot (x - 1) \cdot (x + 3)$$

Faktorizacija i dijeljenje polinoma

Kako izgleda graf polinoma $p(x) = x^2 - 9$? Taj polinom možemo zapisati faktorizirano kao $p(x) = (x - 3)(x + 3)$. Može li se svaki kvadratni polinom faktorizirati na affine faktore? **Faktorizirati polinom** znači zapisati ga kao umnožak faktora koji su afini ili pak kvadratni bez realnih nultočaka.

Usporedimo:

$$60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 \text{ vs. } x^4 + 2x^3 - 3x^2 = x^2 \cdot (x - 1) \cdot (x + 3)$$

Teorem

Ako je c nultočka polinoma $p(x)$, onda je $p(x)$ djeljiv s $x - c$.

Što znači $17 : 2 = 8$ i ostatak 1?

Faktorizacija i dijeljenje polinoma

Kako izgleda graf polinoma $p(x) = x^2 - 9$? Taj polinom možemo zapisati faktorizirano kao $p(x) = (x - 3)(x + 3)$. Može li se svaki kvadratni polinom faktorizirati na afine faktore? **Faktorizirati polinom** znači zapisati ga kao umnožak faktora koji su afini ili pak kvadratni bez realnih nultočaka.

Usporedimo:

$$60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 \text{ vs. } x^4 + 2x^3 - 3x^2 = x^2 \cdot (x - 1) \cdot (x + 3)$$

Teorem

Ako je c nultočka polinoma $p(x)$, onda je $p(x)$ djeljiv s $x - c$.

Što znači $17 : 2 = 8$ i ostatak 1?

Zadatak

Vrijedi $4x^3 + 1 = (2x^2 - x) \cdot (2x + 1) + (x + 1)$. Što je u tom izrazu djeljеник, djelitelj, kvocijent, ostatak?

Što znači da je neki cijeli broj djeljiv drugim cijelim brojem?

Što znači da je neki cijeli broj djeljiv drugim cijelim brojem? Ako dijelimo m s n , koji su mogući ostaci?

Što znači da je neki cijeli broj djeljiv drugim cijelim brojem? Ako dijelimo m s n , koji su mogući ostaci?

Dijeljenjem polinoma s polinomom dobivamo dva polinoma: kvocijent i ostatak. Pritom je stupanj ostatka uvijek manji od stupnja djelitelja.

$$p(x) = s(x) \cdot q(x) + r(x), \text{ st } r < \text{st } q \Leftrightarrow p(x) : s(x) = q(x) \text{ i ostatak } r(x)$$

Što znači da je neki cijeli broj djeljiv drugim cijelim brojem? Ako dijelimo m s n , koji su mogući ostaci?

Dijeljenjem polinoma s polinomom dobivamo dva polinoma: kvocijent i ostatak. Pritom je stupanj ostatka uvijek manji od stupnja djelitelja.

$$p(x) = s(x) \cdot q(x) + r(x), \text{ st } r < \text{st } q \Leftrightarrow p(x) : s(x) = q(x) + \text{ostatak } r(x)$$

Primjer

$$(2x^6 - 5x^4) : x^3 = 2x^{6-3} - 5x^{4-3} = 2x^3 - 5x.$$

Što znači da je neki cijeli broj djeljiv drugim cijelim brojem? Ako dijelimo m s n , koji su mogući ostaci?

Dijeljenjem polinoma s polinomom dobivamo dva polinoma: kvocijent i ostatak. Pritom je stupanj ostatka uvijek manji od stupnja djelitelja.

$$p(x) = s(x) \cdot q(x) + r(x), \text{ st } r < \text{st } q \Leftrightarrow p(x) : s(x) = q(x) \text{ i ostatak } r(x)$$

Primjer

$$(2x^6 - 5x^4) : x^3 = 2x^{6-3} - 5x^{4-3} = 2x^3 - 5x.$$

Primjer

Podijelimo $6x^3 + 11x^2 - 31x + 15$ s $3x - 2$.

Što znači da je neki cijeli broj djeljiv drugim cijelim brojem? Ako dijelimo m s n , koji su mogući ostaci?

Dijeljenjem polinoma s polinomom dobivamo dva polinoma: kvocijent i ostatak. Pritom je stupanj ostatka uvijek manji od stupnja djelitelja.

$$p(x) = s(x) \cdot q(x) + r(x), \text{ st } r < \text{st } q \Leftrightarrow p(x) : s(x) = q(x) \text{ i ostatak } r(x)$$

Primjer

$$(2x^6 - 5x^4) : x^3 = 2x^{6-3} - 5x^{4-3} = 2x^3 - 5x.$$

Primjer

Podijelimo $6x^3 + 11x^2 - 31x + 15$ s $3x - 2$.

Zadatak

Koji su ostatak i kvocijent dijeljenja $(2x^6 - 5x^4) : (x^7 + 1)$?

Zadatak

Izračunajte $(10x^7 - 5) : (1 - 2x^2)$.

Zadatak

Izračunajte $(10x^7 - 5) : (1 - 2x^2)$.

Ako je $p(x)$ djeljiv s $(x - c)^k$, ali ne i s $(x - c)^{k+1}$, kažemo da je c nultočka **kratnosti** k . Ako je $k > 1$, govorimo o **višestrukoj nultočki** polinoma. U višestrukim nultočkama x -os je tangenta na graf funkcije; ako je kratnost parna, polinom u toj nultočki ne mijenja predznak, a ako je neparna mijenja.

Zadatak

Izračunajte $(10x^7 - 5) : (1 - 2x^2)$.

Ako je $p(x)$ djeljiv s $(x - c)^k$, ali ne i s $(x - c)^{k+1}$, kažemo da je c nultočka **kratnosti** k . Ako je $k > 1$, govorimo o **višestrukoj nultočki** polinoma. U višestrukim nultočkama x -os je tangenta na graf funkcije; ako je kratnost parna, polinom u toj nultočki ne mijenja predznak, a ako je neparna mijenja.

Zadatak

Odredite kratnosti nultočaka polinoma

$$x^8 - 2x^7 + x^6 - x^4 + 2x^3 - x^2.$$

Zadatak

Izračunajte $(10x^7 - 5) : (1 - 2x^2)$.

Ako je $p(x)$ djeljiv s $(x - c)^k$, ali ne i s $(x - c)^{k+1}$, kažemo da je c nultočka **kratnosti** k . Ako je $k > 1$, govorimo o **višestrukoj nultočki** polinoma. U višestrukim nultočkama x -os je tangenta na graf funkcije; ako je kratnost parna, polinom u toj nultočki ne mijenja predznak, a ako je neparna mijenja.

Zadatak

Odredite kratnosti nultočaka polinoma

$$x^8 - 2x^7 + x^6 - x^4 + 2x^3 - x^2.$$

Zadatak

Faktorizirajte $4x^6 - 3x^4 + x^3$ pa skicirajte graf tog polinoma.

Racionalne funkcije

Zadatak

Skicirajte graf ovisnosti tlaka idealnog plina o njegovom volumenu, ako su množina i temperatura konstantne.

Racionalne funkcije

Zadatak

Skicirajte graf ovisnosti tlaka idealnog plina o njegovom volumenu, ako su množina i temperatura konstantne.

Grafovi negativnih potencija (funkcija zadanih s $f(x) = x^{-n}$ s prirodnim brojem n):

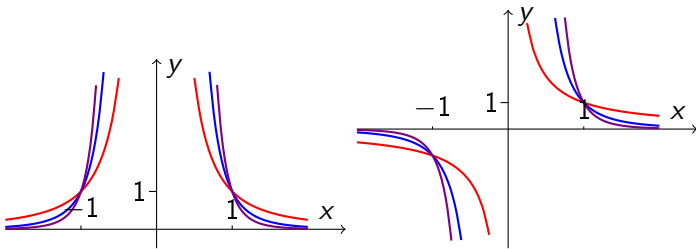
Racionalne funkcije



Zadatak

Skicirajte graf ovisnosti tlaka idealnog plina o njegovom volumenu, ako su množina i temperatura konstantne.

Grafovi negativnih potencija (funkcija zadanih s $f(x) = x^{-n}$ s prirodnim brojem n):



Racionalne funkcije su

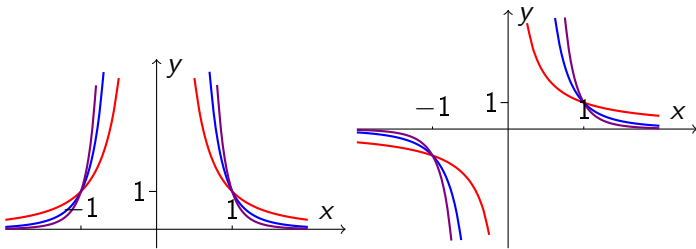
Racionalne funkcije



Zadatak

Skicirajte graf ovisnosti tlaka idealnog plina o njegovom volumenu, ako su množina i temperatura konstantne.

Grafovi negativnih potencija (funkcija zadanih s $f(x) = x^{-n}$ s prirodnim brojem n):



Racionalne funkcije su kvocijenti dvaju polinoma. Jesu li i polinomi racionalne funkcije?

Asimptote

- Jesu li asimptote definirane kao pravci kojima se krivulja približava, ali ih nikad ne dodiruje odnosno siječe?

Asimptote

- Jesu li asimptote definirane kao pravci kojima se krivulja približava, ali ih nikad ne dodiruje odnosno siječe?
- Koliko najviše horizontalnih asimptota može imati graf funkcije?

Asimptote

- Jesu li asimptote definirane kao pravci kojima se krivulja približava, ali ih nikad ne dodiruje odnosno siječe?
- Koliko najviše horizontalnih asimptota može imati graf funkcije? A vertikalnih?

Asimptote

- Jesu li asimptote definirane kao pravci kojima se krivulja približava, ali ih nikad ne dodiruje odnosno siječe?
- Koliko najviše horizontalnih asimptota može imati graf funkcije? A vertikalnih?
- Može li racionalna funkcija imati dvije različite horizontalne asimptote?

Asimptote

- Jesu li asimptote definirane kao pravci kojima se krivulja približava, ali ih nikad ne dodiruje odnosno siječe?
- Koliko najviše horizontalnih asimptota može imati graf funkcije? A vertikalnih?
- Može li racionalna funkcija imati dvije različite horizontalne asimptote? A beskonačno mnogo vertikalnih?

Asimptote

- Jesu li asimptote definirane kao pravci kojima se krivulja približava, ali ih nikad ne dodiruje odnosno siječe?
- Koliko najviše horizontalnih asimptota može imati graf funkcije? A vertikalnih?
- Može li racionalna funkcija imati dvije različite horizontalne asimptote? A beskonačno mnogo vertikalnih?
- Može li prirodna domena racionalne funkcije biti cijeli skup $\mathbb{R}$?

Asimptote

- Jesu li asimptote definirane kao pravci kojima se krivulja približava, ali ih nikad ne dodiruje odnosno siječe?
- Koliko najviše horizontalnih asimptota može imati graf funkcije? A vertikalnih?
- Može li racionalna funkcija imati dvije različite horizontalne asimptote? A beskonačno mnogo vertikalnih?
- Može li prirodna domena racionalne funkcije biti cijeli skup $\mathbb{R}$?
- Koje od sljedećih racionalnih funkcija imaju horizontalne odnosno vertikalne asimptote i koje su to?

$$f(x) = \frac{x^8 + 2x}{7x - 2x^8}; g(x) = \frac{x^5 + 4x^4}{2x^2 - x + 1}; h(x) = \frac{x^2 + x + 1}{x^3 + 3x^2 + 3x + 1}$$

Asimptote

- Jesu li asimptote definirane kao pravci kojima se krivulja približava, ali ih nikad ne dodiruje odnosno siječe?
- Koliko najviše horizontalnih asimptota može imati graf funkcije? A vertikalnih?
- Može li racionalna funkcija imati dvije različite horizontalne asimptote? A beskonačno mnogo vertikalnih?
- Može li prirodna domena racionalne funkcije biti cijeli skup $\mathbb{R}$?
- Koje od sljedećih racionalnih funkcija imaju horizontalne odnosno vertikalne asimptote i koje su to?

$$f(x) = \frac{x^8 + 2x}{7x - 2x^8}; g(x) = \frac{x^5 + 4x^4}{2x^2 - x + 1}; h(x) = \frac{x^2 + x + 1}{x^3 + 3x^2 + 3x + 1}$$

- Skicirajte grafove funkcija zadanih formulama

$$f(x) = 1 - \frac{1}{1+x}; g(x) = \frac{2x^2 - 8x + 5}{x^2 - 4x + 4}; h(x) = \frac{x^3 - 3x^2 + 3x - 1}{x^2 - 2x + 1}$$

Zadatak

Debyeova jednačina $\frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r + 2} = \frac{\rho N_A}{3\epsilon_0 M} \left(\alpha + \frac{\mu^2}{3kT} \right)$ opisuje vezu relativne permitivnosti (dielektrične konstante) ϵ_r (koja je „čisti“ broj) s električnim svojstvima molekula tvari pri polarizaciji u nekom mediju. Skicirajte graf ovisnosti ϵ_r o gustoći uzorka ρ .

Zadatak

Debyeova jednačina $\frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r + 2} = \frac{\rho N_A}{3\epsilon_0 M} \left(\alpha + \frac{\mu^2}{3kT} \right)$ opisuje vezu relativne permitivnosti (dielektrične konstante) ϵ_r (koja je „čisti“ broj) s električnim svojstvima molekula tvari pri polarizaciji u nekom mediju. Skicirajte graf ovisnosti ϵ_r o gustoći uzorka ρ .

Zadatak

Što možete zaključiti o stupnjevima i nultočkama racionalne funkcije čiji graf je prikazan na slici dolje?



Korijeni

- Što su to $\sqrt[8]{\alpha}$ i $\sqrt[17]{\alpha}$ za realni broj α ?

Korijeni

- Što su to $\sqrt[8]{\alpha}$ i $\sqrt[17]{\alpha}$ za realni broj α ?
- Je li vađenje 8. korijena realna funkcija jedne varijable? A vađenje 17. korijena?

Korijeni

- Što su to $\sqrt[8]{\alpha}$ i $\sqrt[17]{\alpha}$ za realni broj α ?
- Je li vađenje 8. korijena realna funkcija jedne varijable? A vađenje 17. korijena?
- Koja je prirodna domena funkcije 8. korijena? A funkcije 17. korijena?

Korijeni

- Što su to $\sqrt[8]{\alpha}$ i $\sqrt[17]{\alpha}$ za realni broj α ?
- Je li vađenje 8. korijena realna funkcija jedne varijable? A vađenje 17. korijena?
- Koja je prirodna domena funkcije 8. korijena? A funkcije 17. korijena? Skicirajte grafove tih dviju funkcija!

Korijeni

- Što su to $\sqrt[8]{\alpha}$ i $\sqrt[17]{\alpha}$ za realni broj α ?
- Je li vađenje 8. korijena realna funkcija jedne varijable? A vađenje 17. korijena?
- Koja je prirodna domena funkcije 8. korijena? A funkcije 17. korijena? Skicirajte grafove tih dviju funkcija!
- Skicirajte ovisnost promjera kugle o njezinom volumenu.

Korijeni

- Što su to $\sqrt[8]{\alpha}$ i $\sqrt[17]{\alpha}$ za realni broj α ?
- Je li vađenje 8. korijena realna funkcija jedne varijable? A vađenje 17. korijena?
- Koja je prirodna domena funkcije 8. korijena? A funkcije 17. korijena? Skicirajte grafove tih dviju funkcija!
- Skicirajte ovisnost promjera kugle o njezinom volumenu.
- Kohlrauschov zakon opisuje ovisnost molarne provodnosti Λ_m (u $S\text{ cm}^2\text{ mol}^{-1}$) o množinskoj koncentraciji c jakog elektrolita i glasi

$$\Lambda_m = \Lambda_m^\circ - \mathcal{K}\sqrt{c}.$$

Pritom su Λ_m° i $\mathcal{K}$ pozitivne konstante. Koje su jedinice tih konstanti? Skicirajte graf ovisnosti molarne provodnosti o koncentraciji.

Algebarske funkcije

Algebarske funkcije su realne funkcije jedne varijable čija pravila se mogu izraziti koristeći konačno mnogo operacija zbrajanja, oduzimanja, množenja, dijeljenja i korjenovanja primijenjenih na nezavisnu varijablu i konstante. U algebarske funkcije mogu se uvrštavati fizikalne veličine skupa s mjernim jedinicama. Pritom, izjednačavati, zbrajati i oduzimati možemo samo članove iste fizikalne dimenzije.

Zadatak

*Ovisnost veličine Υ o veličini σ opisana je jednadžbom $\beta \sigma \Upsilon + \delta \Upsilon = \alpha \beta \sigma$. Veličine α , β i γ su konstantne i pri eksperimentu na koji se odnosi ovaj zadatak imale su iznose $\alpha = 2 \diamond^3$, $\beta = 3 \heartsuit *^{-1}$ i $\delta = 4 \heartsuit^2$. Koje su mjerne jedinice od σ i od Υ ?*